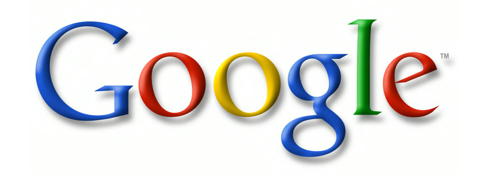
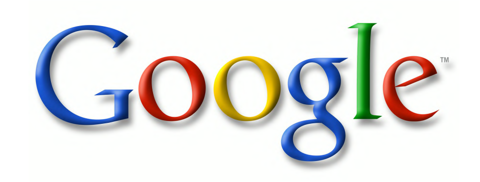

Google



ŒUVRES

DE LAGUERRE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
26680 Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES

DE LAGUERRE

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. CH. HERMITE, H. POINCARÉ et E. ROUCHÉ,

MEMBRES DE L'INSTITUT.

TOME II.

GÉOMÉTRIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

GÉOMÉTRIE.

SUR

LA THÉORIE DES FOYERS,

PAR M. E. LAGUERRE-WERLY, DE BAR-LE-DUC,
Élève de l'Institution Barbet.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1852.

---

1. Soit une conique ayant pour foyer le point $[\alpha, \beta]$, son équation sera de la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = X^2,$$

X étant une fonction linéaire de x et de y, ou bien encore

$$\{(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta)\}\{(x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta)\} = X^2.$$

Sous cette dernière forme, on voit que cette conique est tangente aux deux droites

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}(y-\beta) = 0$$

et

$$(x-\alpha)-\sqrt{-1}(y-\beta) = 0.$$

Réciproquement, si une conique est tangente à ces deux droites, elle a pour foyer le point $[\alpha, \beta]$. Cette propriété analytique peut être employée pour trouver les coordonnées des quatre foyers d'une conique donnée par son équation.

Il suit de là que les coniques confocales doivent être regardées comme tangentes à deux mêmes droites, les coniques bi-confocales comme inscrites dans un même quadrilatère dont les quatre sommets sont les quatre foyers communs. Ces propriétés *projectives*

des foyers nous permettront de généraliser leurs propriétés *métriques*.

2. Ainsi, de la théorie des coniques bi-confocales, nous pourrons tirer tous les théorèmes relatifs aux coniques inscrites dans un même quadrilatère.

Considérons, par exemple, trois coniques bi-confocales; par un point extérieur, menons-leur des tangentes : ces trois couples de tangentes auront une bissectrice commune; donc ils formeront un faisceau en involution. En généralisant, nous retrouverons le théorème de Desargues.

3. Deux coniques bi-confocales se coupent orthogonalement. L'homographie généralise ainsi ce théorème :

Si deux coniques inscrites dans un même quadrilatère se coupent, les deux tangentes menées au point d'intersection, et les droites obtenues en joignant ce point à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit, forment un faisceau harmonique.

4. La considération des foyers imaginaires peut être souvent utile; je ne citerai qu'un exemple.

Considérons une conique et deux tangentes à cette conique; joignons le point d'intersection des deux tangentes aux quatre foyers; les trois couples de droites ainsi obtenues auront une bissectrice commune; donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous trouverons ce théorème, cas particulier de celui de Desargues :

Si une conique est inscrite dans un quadrilatère, que par un point extérieur on mène deux tangentes à cette conique, et puis, qu'on joigne ce point aux quatre sommets du quadrilatère, on obtiendra un faisceau en involution [1].

---

[1] Le théorème sur le quadrilatère qu'on lit dans la *Géométrie supérieure*, p. 249, combiné avec celui-ci, donne lieu à un troisième théorème.

5. Je citerai encore quelques théorèmes, conséquences immédiates des principes précédents :

1° Le lieu des centres des coniques tangentes à deux droites données et ayant un foyer fixe est une droite.

2° Une conique inscrite dans un angle étant donnée, le problème suivant : « Construire une conique tangente à la première et aux deux côtés de l'angle en deux points donnés, » est, en général, susceptible de deux solutions. Les deux points de contact cherchés et le sommet de l'angle sont en ligne droite.

3° Considérons trois coniques confocales, et, par un point pris dans le plan de ces coniques, menons six tangentes. Joignons les six points de contact au foyer commun, nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant une bissectrice commune; donc elles formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous aurons le théorème suivant :

Théorème. — *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* P, *et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes; en joignant les six points de contact au point* P, *on aura un faisceau en involution.*

SUR

LA THÉORIE DES FOYERS,

PAR M. EDMOND LAGUERRE-VERLY,
Élève de l'Institution Barbet.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1853.

I.

1. Considérons trois coniques ayant un même foyer F et, sur une droite arbitraire FZ passant par ce foyer, prenons trois points A, B et C, correspondant respectivement aux trois coniques. Menons par chacun de ces points deux tangentes à la conique correspondante, et joignons les six points de contact au foyer : nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant pour bissectrice commune la ligne FZ; donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant par l'homographie cette propriété, nous obtiendrons le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* O, *et que, sur une droite* OZ *passant par ce point, on prenne trois points* A, B, C *correspondant aux trois coniques; si, par chacun de ces points, on mène des tangentes à la conique correspondante, en joignant les six points de contact ainsi obtenus au point* O, *on obtiendra un faisceau en involution.*

Remarque. — Si les trois coniques se réduisent à une seule, on retombe sur la proposition suivante, due à M. Chasles :

Si trois cordes d'une conique se coupent en un même point,

les six points qu'elles interceptent sur la conique sont en involution; c'est-à-dire qu'en joignant ces six points à un point quelconque de la conique, on a un faisceau en involution.

Si les trois points A, B et C se confondent, on obtient le théorème énoncé t. XI, p. 292.

J'indiquerai encore les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME II. — *Si une conique variable est assujettie à rester tangente à deux droites fixes* A *et* B, *le lieu des pôles d'une droite* D *passant par le point de rencontre de* A *et de* B *par rapport à cette conique variable, est une droite* H *passant par ce même point de rencontre. Les quatre droites* D, A, H, B *forment un faisceau harmonique.*

THÉORÈME III. — *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, les deux tangentes menées à une même conique couperont la polaire du sommet de l'angle, relativement à cette conique, en deux points; et si l'on joint au sommet de l'angle les six points de rencontre ainsi obtenus, on aura un faisceau en involution.*

2. *Coniques biconfocales.* — Une conique ayant deux foyers fixes peut être considérée comme tangente à quatre droites fixes; les théorèmes relatifs aux coniques biconfocales peuvent donc être étendus aux coniques inscrites dans un même quadrilatère. Je citerai quelques exemples de cette transformation.

Soient trois coniques biconfocales; par un point extérieur menons-leur six tangentes. Ces tangentes auront deux à deux la même bissectrice; donc elles formeront un faisceau en involution. En généralisant par homographie, on obtiendra la proposition suivante, corrélative d'un théorème de M. Sturm :

Si trois coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, ces six tangentes formeront un faisceau en involution.

Le problème suivant : *Construire une conique inscrite dans*

un quadrilatère et passant par un point donné A, a en général deux solutions.

Si au point A on mène les deux tangentes aux deux coniques satisfaisant à la question, et qu'on joigne ce point à deux sommets opposés du quadrilatère, on obtiendra un faisceau harmonique.

3. Considérons n coniques situées dans un même plan, les $4n$ foyers de ces coniques seront $4n$ sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces courbes, et les côtés opposés de ces quadrilatères convergeront tous vers deux mêmes points P et Q situés sur la *droite de l'infini* (1).

Observation. — Chaque côté renferme un foyer réel et un foyer imaginaire.

Il suit de là que :

Si l'on transforme homographiquement n coniques situées dans un même plan, aux foyers de ces coniques correspondront les sommets de n quadrilatères respectivement circonscrits à ces coniques transformées, et les côtés opposés de ces quadrilatères se couperont en deux mêmes points P *et* Q *situés sur la droite répondant homographiquement à celle de l'infini.*

Inversement, cette remarque peut servir à résoudre ce problème :

Deux points A *et* B *étant pris dans le plan d'une conique, transformer la figure homographiquement, en sorte que les points correspondant à* A *et* B *soient des foyers de la conique transformée.*

On peut remarquer de plus que, si un cercle se trouve dans le plan des coniques données, il se transforme suivant une conique passant par les deux points fixes P et Q.

Comme application de ce principe, considérons trois coniques inscrites dans un même angle; si nous joignons le sommet de cet

---

(1) Expression employée par M. Poncelet.

angle aux douze foyers de ces coniques, nous obtiendrons ainsi six couples de droites ayant une bissectrice commune; donc trois quelconques d'entre elles forment un faisceau en involution.

On tire de là le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si trois coniques sont inscrites dans un même angle* A, *et que par deux points extérieurs* P *et* Q *on leur mène des tangentes, les tangentes menées de ces deux points à une même conique formeront un quadrilatère donnant deux couples de sommets opposés, et nous aurons, en considérant les trois coniques, six couples de sommets; en joignant trois quelconques de ces couples au sommet* A *on obtiendra un faisceau en involution.*

II.

Les deux droites représentées par les équations

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0$$

et

$$(y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$

que nous avons considérées dans l'étude des foyers des coniques (t. XI, p. 290), jouissent d'une propriété très remarquable, contenue dans la proposition suivante :

Si un angle constant tourne autour du point (α, β), *ses côtés et les droites représentées par les équations*

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$
$$(y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$

forment dans chaque position de l'angle mobile un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. Si l'angle mobile est droit, le faisceau est harmonique.

Les conséquences de ce principe sont nombreuses. Considérons un angle constant tournant autour du foyer d'une conique, les cordes interceptées dans la conique enveloppent deux coniques confocales et doublement tangentes à la première.

On tire de cette proposition le théorème suivant :

Théorème V. — *Si un angle* O *est circonscrit à une conique, et qu'un angle variable tourne autour du point* O *de manière que ses côtés fassent dans chacune de ces positions, avec les côtés de l'angle fixe, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques inscrites dans l'angle* O *doublement tangentes à la première* (Chasles, *Géométrie supérieure,* p. 448).

Je citerai encore les théorèmes suivants :

Théorème VI. — *Si un angle variable tourne autour d'un point fixe* O *pris dans le plan d'une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau harmonique, les cordes interceptées dans la conique par les côtés de l'angle variable enveloppent deux coniques.*

Si le point O est sur la conique, la corde interceptée passe par un point fixe.

Théorème VII. — *Si un angle variable tourne autour d'un point pris sur une conique, en sorte que ses côtés fassent constamment, avec deux droites passant par ce point, un faisceau dont le rapport anharmonique soit constant, la corde interceptée dans la conique par l'angle variable enveloppe une autre conique doublement tangente à la première au point* O (Chasles, *Géométrie supérieure,* p. 450) (¹).

Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un théorème particulier pour nous élever au théorème général; mais il arrive souvent que ce dernier est plus simple et plus facile à démontrer; alors on peut en tirer le théorème particulier.

On verra un exemple de cette méthode dans ce qui va suivre.

(¹) Ces théorèmes ont été communiqués à M. Terquem avant la publication de la *Géométrie supérieure.*

III.

Définition. — Soit un point α, β pris dans le plan d'une conique, les droites représentées par

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0, \qquad (y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0$$

couperont la conique en quatre points donnant deux cordes réelles. Quoique les théorèmes suivants s'appliquent aussi aux cordes imaginaires, nous ne considérerons que les premières; pour abréger, je les nommerai les *droites directrices* du point α, β. Soient $X=0$ et $Y=0$ les équations de ces deux droites, l'équation de la conique pourra se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda XY;$$

donc :

THÉORÈME VIII. — *Le carré de la distance d'un point de la conique à un point fixe α, β est au produit des distances de ce même point aux deux droites directrices correspondantes, dans un rapport constant.*

Remarque. — Si le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique, les deux droites directrices se confondent toutes deux avec la directrice correspondante.

Si la conique est un cercle, une des droites directrices est toujours à l'infini.

Considérons une conique dans un plan, et soient A, A', B, B' quatre points pris arbitrairement sur cette conique; menons la droite AA' et joignons un point quelconque de la conique aux quatre points A, A', B, B'; nous obtiendrons ainsi quatre droites coupant la corde AA' aux quatre points A, A', b, b', et si nous joignons ces quatre points à un point fixe O pris dans le plan, les quatre droites AO, A'O, bO, b'O forment un faisceau dont le rapport anharmonique sera constant.

Maintenant, si nous transformons homographiquement cette figure, en sorte que les deux droites OA et OA' se projettent suivant les droites dont les équations sont

$$(y-\beta)+\sqrt{-1}(x-\alpha)=0, \qquad (y-\beta)-\sqrt{-1}(x-\alpha)=0,$$

α et β étant les coordonnés du point correspondant au point O, on obtiendra le théorème suivant :

Théorème IX. — *Soient* F *un point fixe pris dans le plan d'une conique,* A *et* A′ *deux points pris sur cette conique; un angle dont les côtés passent constamment par les points* A *et* A′, *et dont le sommet se meut sur la conique, intercepte sur une des droites directrices correspondant au point* F *un segment vu de ce point sous un angle constant.*

Remarque. — Ce théorème a encore lieu quand le point F coïncide avec l'un des foyers de la conique; je ferai remarquer que, dans ce cas, l'angle constant est la moitié de l'angle AFA′.

Si les points A, A′ et le pôle de la droite directrice que l'on considère sont en ligne droite, l'angle constant est droit.

Parmi les applications que l'on peut faire du théorème précédent, je citerai la suivante :

Trois segments étant donnés sur une droite, déterminer le point du plan d'où ces trois segments sont vus sous le même angle.

Ce problème peut se résoudre au moyen de la règle et du compas.

4. Problème. — *Un système d'angles* A, B, C, ..., *situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque* $F(A, B, C, \ldots) = 0$, *trouver la relation qui lie les angles correspondants* A′, B′, C′, ..., *quand on transforme la figure homographiquement.*

Solution. — Soient P, Q les deux points correspondant, sur la seconde figure, aux deux points qui, dans la première figure, sont situés respectivement sur la droite de l'infini et sur les deux droites $y = xi$, $y = -xi$.

Les deux côtés de l'angle A′ dans la seconde figure et les droites A′P, A′Q formeront un faisceau dont nous désignerons le rapport anharmonique par a; désignons de même par b, c, d, ... les

rapports correspondant aux autres angles, la relation cherchée est

$$(1) \qquad \mathrm{F}\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log c}{2\sqrt{-1}}, \cdots\right) = 0,$$

la caractéristique log désignant des logarithmes népériens.

N. B. — M. Chasles, dans sa *Géométrie supérieure,* p. 446, § 623, ne donne la solution de ce problème que quand les angles A, B, C, ... ont même sommet ou quand ils sont égaux.

On pourrait se proposer la même question pour un système d'angles situés d'une manière quelconque dans l'espace; mais la question est alors plus complexe et demande quelques développements que nous ne pouvons donner ici.

Remarque. — Il suit de là que toute relation entre des angles est projective; pour ne donner qu'un exemple, nous prendrons ce théorème élémentaire :

La somme des angles d'un polygone plan est un multiple de deux droits.

Si on le transforme homographiquement au moyen du problème précédent, on trouvera le théorème de Carnot relatif aux segments qu'une transversale intercepte sur les côtés d'un polygone.

Je ne m'arrêterai pas sur les conséquences que l'on en peut tirer pour les polygones inscrits ou circonscrits aux coniques, et notamment aux théorèmes que M. Poncelet a donnés à ce sujet dans ses *Propriétés projectives.*

Nous donnerons prochainement les démonstrations de ces diverses propositions et du théorème suivant :

5. Théorème X. (Nous appelons ici *foyers d'une surface de révolution du second ordre* les deux foyers communs à toutes les sections faites suivant l'axe.) — *Le lieu des foyers des surfaces de révolution circonscrites à une surface du second ordre est un système de trois coniques situées dans les trois plans principaux de la surface* [1].

---

[1] Ce sont les courbes *polaires* de M. Chasles.

On déduit comme corollaire le théorème de M. Steiner sur les sommets des cônes de révolution circonscrits à un ellipsoïde.

6. Théorème XI. — *Soit un cône circonscrit à une surface du second ordre; tout plan cyclique du cône coupera la surface suivant une conique dont le sommet du cône sera un foyer.*

Nous joignons ici un exemple pour éclaircir la formule (1) (p. 13).

7. Soient un cercle et deux points A et B pris arbitrairement sur ce cercle, M un point quelconque de la circonférence, et O son centre; on aura

$$2.\widehat{AMB} = \widehat{AOB}.$$

Si nous transformons la figure homographiquement, le cercle se projettera suivant une conique, le point O se projette en O′, et, comme il est facile de le voir, les points P et Q seront les points de contact des tangentes menées à cette conique par le point O′; A et B se projetteront en A′ et B′. Cela posé, joignons les points A′ et B′ au point O′, et appelons a le rapport anharmonique du faisceau O′P, O′A′, O′B′, O′Q (en regardant les droites OP et OQ comme conjuguées).

Joignons les quatre points A′, B′, P, Q à un point quelconque M de la conique, et appelons b le rapport anharmonique du faisceau MA′, MP, MB′, MQ (en regardant les droites MP et MQ comme conjuguées); d'après la formule (1), nous devons avoir

$$2\left(\frac{\log b}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{\log a}{2\sqrt{-1}},$$

ou

$$2\log b = \log a,$$

et en passant des logarithmes aux nombres

$$b^2 = a,$$

d'où le théorème suivant :

Si quatre points conjugués deux à deux sont sur une

conique, le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus du pôle de la droite qui joint deux points conjugués est égal au carré du rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces quatre points sont vus d'un point quelconque de la conique.

SUR LES FOYERS,

PAR MM. LAGUERRE-VERLY ET JOSEPH SACCHI, DE PAVIE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1853.

Si le coefficient angulaire d'une tangente menée par un point à une conique rapportée à des axes se coupant sous l'angle γ est égal à $\cos\gamma \pm \sin\gamma . \sqrt{-1}$, ce point est un foyer.

Cette propriété analytique des foyers, généralisation de celle qui a été indiquée par Plücker, offre un moyen très simple pour déterminer les coordonnées des foyers dans le cas le plus général.

Soient α et β les coordonnées d'un foyer de la conique rapportée à deux axes formant l'angle γ, et posons

$$\begin{aligned} m &= B^2 - 4AC, & l &= D^2 - 4AF, \\ l' &= E^2 - 4CF, & k &= 2AE - BD, \\ k' &= 2CD - BE, & n &= DE - 2BF, \\ P &= m\beta^2 - 2k'\beta + l', & Q &= m\alpha^2 - 2k\alpha + l, \\ R &= m\alpha\beta - k'\alpha - k\beta - n; \end{aligned}$$

l'équation de la tangente à la conique, en nommant p le coefficient angulaire, est

$$my = mpx - pk + k' \pm \sqrt{p^2(k^2 - ml) - 2p(kk' + mn) + k'^2 - ml'},$$

qui doit être satisfaite par

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad p = \cos\gamma \pm \sin\gamma\sqrt{-1};$$

mettant ces valeurs de x et de y, et résolvant l'équation par rapport à p, on a

$$p = \frac{R}{Q} \pm \sqrt{\frac{PQ - R^2}{Q^2}}\sqrt{-1},$$

donc

$$\cos\gamma = \frac{R}{Q}, \qquad \sin\gamma = \frac{\sqrt{(PQ - R^2)}}{Q};$$

ainsi

$$Q\cos\gamma - R = 0, \qquad Q - P = 0,$$

équations qui déterminent les valeurs de α, β, coordonnées des foyers.

Prenant pour axes les diamètres conjugués égaux, l'équation $Q - P = 0$ représente le système des deux axes principaux.

Note. — Soit $y + ex = 0$ l'équation d'une tangente passant par l'origine on a

$$l' - 2en + le^2 = 0 \qquad \text{(t. II, p. 108).}$$

Si l'origine est un foyer

$$l = l', \qquad n = l\cos\gamma;$$

d'où l'on tire

$$e = \cos\gamma \pm i\sin\gamma.$$

SUR

LES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1865.

1. On appelle en général *foyer d'une courbe plane* un point tel que deux des tangentes menées de ce point à la courbe rencontrent la droite de l'infini aux deux points I et J communs à tous les cercles tracés dans le plan (¹).

Soit une courbe plane réelle de degré n et de classe μ, et supposons d'abord qu'elle ne passe pas par les points I et J dont je viens de parler.

Par le point I on pourra mener μ tangentes à la courbe; par le point J passera également un faisceau de μ tangentes. Les intersections de ces deux faisceaux fourniront les μ^2 foyers de la courbe; μ d'entre eux seront réels et suffiront pour déterminer tous les autres. Nous nommerons ces points *foyers ordinaires,* ou simplement *foyers* lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune ambiguïté.

Si la courbe donnée passe par les points I et J, soit i le nombre

(¹) Il serait nécessaire, vu l'importance de ces points et leur fréquent usage en Géométrie, de leur assigner un nom spécial. On pourrait les appeler *ombilics du plan;* ils jouent en effet, par rapport aux courbes tracées dans le plan, le même rôle que les ombilics situés à l'infini sur un ellipsoïde par rapport aux courbes tracées sur cette surface.

Toutes les sphères ont en commun une courbe plane du second ordre située à l'infini. On pourrait l'appeler *courbe ombilicale* ou simplement *ombilicale.* Il est clair que les ombilics d'un plan quelconque sont les points d'intersection de ce plan avec l'ombilicale.



des branches de la courbe qui passent par chacun de ces deux points. Les faisceaux de tangentes menées à la courbe par les points I et J formeront deux groupes bien distincts. Le premier groupe, composé des tangentes qui touchent la courbe en un point autre que les ombilics, fournira $(\mu - 2i)$ foyers réels ordinaires, entièrement analogues à ceux dont nous avons parlé ci-dessus. L'autre groupe, formé des tangentes ayant leur point de contact en un des points I et J sur la droite de l'infini, fournira i foyers réels que l'on doit considérer comme doubles et que nous appellerons *foyers singuliers*.

Les foyers ordinaires et les foyers singuliers jouent le plus souvent un rôle très différent dans la Géométrie des courbes planes. Les courbes du quatrième ordre, ayant pour points doubles à l'infini les points I et J et étudiées par M. Moutard sous le nom d'*anallagmatiques du quatrième ordre,* nous offrent un exemple simple de ces deux espèces de foyers et de leur rôle divers. On sait que ces courbes peuvent être considérées de quatre manières différentes comme l'enveloppe de cercles coupant orthogonalement un cercle directeur fixe et ayant leurs centres sur une conique. Une anallagmatique a deux foyers singuliers réels, qui sont les deux foyers réels communs aux quatre coniques qui peuvent servir à la description de la courbe, et seize foyers ordinaires, dont quatre réels, situés respectivement quatre par quatre sur les quatre cercles directeurs correspondant aux quatre coniques homofocales déjà mentionnées.

Dans tout ce qui suit nous supposerons essentiellement que les courbes considérées ne passent pas par les points I et J, et par conséquent qu'elles n'ont pas de foyers singuliers.

De nos théorèmes généraux il sera d'ailleurs facile, dans chaque cas, de déduire les théorèmes particuliers qui doivent leur être substitués lorsque la courbe a des foyers singuliers.

Pour éviter des répétitions inutiles, dans tous les théorèmes énoncés ci-dessous nous conviendrons de désigner constamment par n et par μ le degré et la classe des courbes considérées.

II. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane algébrique, et soit M un point de son plan dont les coordonnées soient ξ et η; la valeur de la fonction $f(x, y)$, quand on y substitue les

coordonnées ξ et η du point M, savoir $f(\xi, \eta)$, ne dépend que de la position du point M par rapport à la courbe. Elle est nulle pour tous les points de la courbe, qui dans son plan sépare les régions où cette fonction a une valeur positive des régions où elle a une valeur négative. Dans les théorèmes qui suivent, nous ne considérerons que sa valeur absolue. Nous l'appellerons la *puissance* du point M relativement à la courbe, en nous servant d'une dénomination déjà employée par Steiner pour le cercle.

La puissance d'un point n'est jusqu'à présent définie qu'à une constante arbitraire près; nous achèverons de la déterminer au moyen du premier des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe plane, on mène un cercle quelconque, le produit des distances de ce point aux* $2n$ *points d'intersection de ce cercle et de la courbe est égal à la puissance du point* M *par rapport à la courbe, multipliée par la* $n^{ième}$ *puissance du rayon.*

On peut supposer, dans ce théorème, que le cercle se réduise à une droite quelconque passant par le point M et à la droite de l'infini; on obtient ainsi un théorème connu dont on déduit facilement les théorèmes de Newton et de Carnot. Nous n'insisterons pas sur ces faciles déductions, non plus que sur le cas où le point M se trouve sur la courbe elle-même.

Théorème II. — *Si un cercle est tracé dans le plan d'une courbe plane, la demi-somme des angles que font avec une direction fixe arbitraire les* $2n$ *rayons du cercle aboutissant aux points d'intersection, est égale, à un multiple près de* π, *à la somme des angles que font les* n *asymptotes avec cette même direction.*

Relativement aux coniques, le théorème précédent se réduit à cette propriété bien connue : quand un cercle coupe une conique, les bissectrices des angles formés par les cordes communes sont parallèles aux axes.

Théorème III. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les* $\mu + n$ *droites qui la coupent sous un angle donné* V, *le produit de toutes les longueurs comprises entre le point* M *et les pieds de ces droites est égal au produit des*

distances du point M *aux* μ *foyers réels de la courbe, multiplié par la puissance du point* M, *le tout divisé par* $(2\sin V)^n$.

Le produit considéré devient évidemment *minimum,* quand les droites sont normales à la courbe; en d'autres termes, quand $\sin V = 1$.

On a dans ce cas le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les* $(\mu + n)$ *normales à la courbe, le produit des longueurs comprises entre le point* M *et les pieds des normales est égal au produit des distances du point* M *aux* μ *foyers réels, multiplié par la puissance du point* M, *le tout divisé par* 2^n.

Lorsque dans le théorème III on suppose $V = 0$, on obtient pour le produit des $(\mu + n)$ longueurs une valeur infinie; ce qui doit être, car le groupe des droites passant par le point M et rencontrant la courbe sous un angle nul comprend, outre les μ tangentes passant par ce point, les n parallèles aux asymptotes. Le produit des tangentes est donné par le théorème suivant :

Théorème V. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les tangentes à cette courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point* M *et les points de contact est égal au produit des distances du point* M *aux* μ *foyers réels, multiplié par la puissance du point* M, *le tout divisé par* 2^n *et par le produit des distances de ce point aux asymptotes de la courbe.*

Des théorèmes IV et V on déduit la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les tangentes et les normales à cette courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point* M *et les points de contact, multiplié par le produit des distances de ce point aux asymptotes, est égal au produit des longueurs comprises entre le point* M *et les pieds des normales.*

Théorème VII. — *Par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe plane, menons les* $\mu + n$ *droites qui la coupent sous un angle donné* V. *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+\mu}$ *les angles que font ces*

droites avec un axe fixe arbitraire; soient $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ *les angles que font avec le même axe les droites joignant le point* M *aux* μ *foyers réels, et* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ *les angles de cet axe avec les asymptotes de la courbe. Tous ces angles sont reliés entre eux par la relation suivante, qui doit être vérifiée à un multiple près de* π,

$$\sum \lambda - \sum \zeta = \sum f + n\mathrm{V}.$$

Remarque. — Le second membre de l'équation précédente ne dépendant que de l'angle V et de la position relative du point M et des foyers de la courbe, la propriété exprimée par cette équation constitue une propriété générale des courbes de même classe ayant les mêmes foyers.

Si, dans le théorème précédent, on suppose $V = 0$, les angles des asymptotes avec l'axe fixe disparaissent d'eux-mêmes de la relation donnée ci-dessus, et l'on obtient le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si par un point* M, *pris dans le plan d'une courbe, on mène les tangentes à cette courbe, la somme des angles que font ces tangentes avec une direction fixe arbitraire est égale à la somme des angles que font avec cette même direction les droites joignant le point* M *aux foyers réels de la courbe.*

Remarque. — Relativement aux coniques, cette proposition donne ce théorème bien connu de M. Poncelet : Les tangentes menées d'un point à une conique sont également inclinées sur les droites joignant ce point aux foyers.

La considération des courbes tracées sur la sphère conduit à des théorèmes généraux analogues aux théorèmes énoncés dans cette Note relativement aux courbes planes. Nous nous contenterons ici de cette mention, sans entrer dans de plus longs détails à ce sujet.

Lorsqu'une courbe est tangente à la droite de l'infini, elle admet pour foyers les divers points où elle la touche; dans l'application des théorèmes énoncés ci-dessus, il est nécessaire de tenir compte de ces foyers situés à l'infini.

SUR LA DÉTERMINATION

DU

RAYON DE COURBURE DES LIGNES PLANES.

Bulletin de la Société philomathique; 1867.

Si, en un point M d'une courbe, on imagine construite la parabole surosculatrice de la courbe, la position du foyer F de cette parabole donnera d'une façon très nette, non seulement la valeur du rayon de courbure au point considéré, mais encore la variation que cette valeur éprouve en passant à un point infiniment voisin, en un mot la déviation de la courbure.

Cette déviation est mesurée, comme on le sait, par la tangente de l'angle que fait la normale au point M avec la droite joignant ce point au foyer F; quant au rayon de courbure, sa valeur est double de la longueur de la projection sur la normale du segment de droite MF.

Le but de cette Note est d'exposer brièvement quelques propriétés générales des courbes algébriques, qui permettent dans beaucoup de cas de déterminer géométriquement en un point d'une courbe la position du foyer de la parabole surosculatrice. La méthode qui en découle me paraît, par son principe, différer entièrement de celles qui ont été employées jusqu'ici; et l'on peut l'appliquer du reste, complètement, à toutes les courbes de troisième et de quatrième classe.

Le théorème fondamental sur lequel je m'appuierai dans la recherche actuelle est l'un de ceux que j'ai donnés très succinctement dans les *Comptes rendus* (janvier 1865).

Avant de l'énoncer, j'expliquerai quelques expressions nouvelles dont je vais me servir, et qui, dans beaucoup de recherches géométriques, sont utiles par leur précision et leur brièveté.

Imaginons dans un plan deux systèmes de n droites A et B, et prenons arbitrairement un axe fixe H dans ce plan ; si la somme des angles que font avec l'axe fixe des droites du système A est égale à un multiple de π près à la somme des angles que font avec ce même axe les droites du système B, je dirai que les deux systèmes A et B ont *même orientation*. Ils jouiront alors de la propriété énoncée ci-dessus relativement à tout autre axe situé dans le plan.

Soient P un point situé dans un plan et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n autres points de ce plan; menons les droites $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ et sur chacune de ces droites portons une longeur égale à l'inverse du segment correspondant. — Considérons ces longueurs comme représentant des forces; composons-les, et sur la direction de leur résultante portons, à partir du point P, une longueur égale à l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ partie de cette résultante. L'extrémité a du segment ainsi déterminé *sera dite le centre harmonique des points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *relativement au point* P, et la longueur Pa sera la *moyenne harmonique* entre les longueurs $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$.

En adoptant pour un moment les notations de M. de Saint-Venant, qui représente simplement la composition des longueurs par le signe de l'addition, on voit que le mode de définition donné plus haut du centre harmonique revient à l'équation suivante :

$$\frac{n}{Pa} = \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \cdots + \frac{1}{PA_n} \cdot \cdot$$

La désignation nouvelle que je propose ici renferme, on le voit, comme cas particulier, celle qui a été employée par Maclaurin et qui est consacrée par l'usage; elle ne peut donc donner lieu à aucune espèce de confusion et en somme n'introduit aucun terme nouveau dans le langage géométrique.

Je ferai à ce sujet les remarques suivantes, dont l'application se présente fréquemment :

1° Si le point P est à l'infini, le centre harmonique d'un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se confond avec leur centre de gravité.

2° Si l'on considère seulement 2 points A_1 et A_2, leur centre harmonique a se trouvera sur la circonférence passant par les points A_1, A_2 et P et les quatre points P, a, A_1, A_2 diviseront harmoniquement la circonférence.

J'énoncerai de la façon suivante le théorème qui me sert de point de départ :

THÉORÈME I. — *Si par un point* P *situé dans le plan d'une courbe plane réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on joint ce point aux n foyers réels de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation.* (Théorème VII des *Comptes rendus*.)

On déduit immédiatement de là le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si, par un point* P, *pris dans le plan d'une courbe plane réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, le centre harmonique des n points de contact relativement au point* P *est le même que le centre harmonique des n foyers réels.*

En particulier, si l'on suppose le point P à l'infini, on obtient un système de tangentes parallèles; le centre de gravité des points de contact est le même que celui des foyers; il est donc fixe : théorème bien connu que l'on doit à M. Chasles.

En appliquant le théorème II à un point infiniment voisin de la courbe, on en déduit la proposition suivante relative à la détermination du foyer de la parabole surosculatrice :

THÉORÈME III. — *Par un point* M *d'une courbe plane de classe n, menons à la courbe les* $(n-2)$ *tangentes différentes de celle qui a son point de contact en ce point; sur la direction de chaque tangente, et du côté opposé à celui où se trouve le point de contact, portons une longueur égale à l'inverse du segment compris entre le point* M *et ce point de contact; joignons le point* M *aux n foyers, et sur chacune de ces droites portons, du côté où se trouve le foyer correspondant, une longueur égale à l'inverse de la distance du point* M *à ce foyer.*

Si nous composons toutes ces longueurs entre elles en les considérant comme des forces, et si, sur la direction de la résultante, nous portons à partir du point M *une longueur égale à l'inverse de cette résultante, l'extrémité de la droite ainsi obtenue sera le foyer de la parabole surosculatrice au point* M.



Remarque. — Si un des foyers de la courbe se trouve à l'infini, il est clair que, dans le théorème précédent, il n'y a pas à en tenir compte.

Si tous les foyers étaient à l'infini, la position seule des tangentes interviendrait dans l'application du théorème. Ce cas se présente parfois; ainsi, lorsque les extrémités d'un segment de droite de longueur donnée sont assujetties à se mouvoir, chacune sur une courbe algébrique donnée, l'enveloppe de cette droite est une courbe de l'espèce indiquée; et ce caractère seul, d'avoir tous ses foyers à l'infini, suffit pour établir relativement à cette courbe un grand nombre de propriétés dignes de remarque.

Une courbe de ce genre est l'épicycloïde à trois points de rebroussement; c'est une courbe de troisième classe ayant tous ses foyers à l'infini.

Le théorème précédent appliqué à cette courbe fournit la propriété suivante :

Par un point M d'une telle épicycloïde, menons la tangente à la courbe qui n'a pas son point de contact au point M lui-même et soit t le point de contact de cette tangente; si nous prolongeons tM d'une longueur égale à elle-même, l'extrémité de la longueur ainsi obtenue sera le foyer de la parabole surosculatrice de l'épicycloïde au point M.

SUR LES COURBES

RÉSULTANT

DE L'INTERSECTION D'UNE SPHÈRE AVEC UNE SURFACE

DU SECOND DEGRÉ.

Bulletin de la Société philomathique; 1867.

1. On sait, depuis les travaux de M. Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables, que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du même plan qui passe par l'un des points I et J; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel, et n'en renferme évidemment qu'un; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée.

De la considération des droites isotropes découlent, pour les courbes algébriques, deux notions fondamentales : la première est celle des foyers que, d'après Plücker, je définirai comme les points de concours des diverses droites isotropes que l'on peut mener tangentiellement à la courbe; relativement à ces foyers, il y a lieu de faire une distinction importante entre les foyers ordinaires et les foyers singuliers (voir *Comptes rendus*, 1865); la deuxième est celle des droites *conjointes* relativement à un point.

Si par un point M, pris dans le plan d'une courbe, on mène les deux droites isotropes qui se coupent en ce point, les $2n$ points d'intersection de la courbe et des droites seront situés, deux à deux, sur n droites réelles ; je nommerai ces droites les conjointes du point M relatives à la courbe, en me servant d'une expression déjà employée, à peu près dans le même sens, par M. Chasles dans la théorie des coniques. Si l'on prend la polaire réciproque de la courbe par rapport à un cercle décrit du point M comme centre, les n foyers de la transformée seront les pôles des conjointes du point M.

2. Toutes les sphères décrites dans l'espace ont en commun une conique imaginaire située sur le plan de l'infini (Poncelet), et que l'on peut appeler *ombilicale*. Les ombilics d'un plan quelconque sont les points où ce plan coupe l'ombilicale. — Toutes les droites isotropes passant par un point de l'espace formeront un cône s'appuyant sur l'ombilicale, et que je nommerai *cône isotrope*. Par une droite, on peut mener deux plans tangents à l'ombilicale ; je désignerai de tels plans sous le nom de *plans isotropes ;* pour un plan isotrope, les deux ombilics, qui sont généralement distincts, se confondent entre eux.

La surface développable circonscrite à une surface quelconque et à l'ombilicale sera dite *développable isotrope* de cette surface ; les lignes doubles seront les focales de la surface ; il y a lieu d'ailleurs de distinguer les focales singulières et les focales ordinaires.

3. Toutes les génératrices rectilignes d'une sphère sont des droites isotropes ; le plan tangent, en un point P de cette sphère, la coupe suivant les deux droites isotropes de ce plan tangent qui passent au point P. Sur une sphère donnée, imaginons deux génératrices i et j de systèmes différents et se coupant en un point réel P de cette sphère ; les autres génératrices isotropes de la surface se partageront en deux groupes : l'un, I, formé des génératrices de même système que i et rencontrant toutes la droite j ; l'autre, J, formé des génératrices de même système que j et rencontrant toutes la droite i.

Si l'on fait une projection stéréographique sur un plan parallèle au plan tangent en P, les génératrices de la sphère du système I

se projetteront suivant un système de droites isotropes parallèles à j, et celles du système J, suivant un système de droites isotropes parallèles à i. — Cette propriété est fondamentale dans la théorie de la projection stéréographique.

4. Soit tracée sur une sphère une courbe algébrique que, pour plus de simplicité, je supposerai réelle. — Imaginons les tangentes à la courbe qui sont des droites isotropes du système I, et soit n le nombre de ces tangentes; il y aura également n droites isotropes du système J, qui seront tangentes à la courbe, et l'ensemble de ces $2n$ droites formera un réseau dont les n^2 points de rencontre seront les foyers de la courbe; on peut prendre de différentes façons n de ces points, de sorte que deux quelconques d'entre eux ne se trouvent pas sur une même droite isotrope; ces n points formeront alors un système indépendant. — Parmi les n^2 foyers, il y a toujours n foyers réels, et il n'y en a que n; ils forment un système indépendant, et par conséquent permettent de déterminer tous les autres. — Si l'on joint par une droite deux foyers réels quelconques, la polaire de cette droite coupera la sphère en deux points imaginaires, qui seront des foyers de la courbe; réciproquement la polaire de la droite réelle, qui passe par deux foyers imaginaires conjugués, coupe la sphère en deux foyers réels.

A proprement parler, les courbes sphériques n'ont pas de foyers singuliers, c'est-à-dire de tangentes isotropes dont le point de contact soit sur l'ombilicale. Nous donnerons cependant ce nom aux points dont voici la définition : prenons deux points imaginairement conjugués de l'intersection de la courbe avec l'ombilicale, les génératrices isotropes passeront par ces points, se couperont en deux points réels diamétralement opposés. Nous nommerons ces points *foyers singuliers*. Ils jouissent de la propriété suivante, que, si l'on considère un cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base la courbe, ce cône admet pour focales singulières les droites joignant les couples des foyers singuliers. — Un cercle sur la sphère n'a pas de foyers ordinaires; il n'a que deux foyers singuliers, qui sont ses pôles sphériques [1] :

---

[1] Pour éviter toute confusion dans la suite, je désignerai constamment les pôles sphériques d'un cercle sous le nom de *foyers;* le centre d'un cercle sera le

En général, l'intersection d'une sphère avec une surface de degré m a $2m$ foyers singuliers et $2m(m-7)$ foyers ordinaires.

Lorsqu'on projette stéréographiquement une courbe, les génératrices isotropes de la sphère se projettent suivant des droites isotropes; il en résulte que les foyers ordinaires de la courbe se projettent suivant les foyers ordinaires de la transformée. Il n'en est pas de même des foyers singuliers; pour les obtenir, on considérera l'une quelconque des surfaces qui, avec la sphère, définissent la courbe, et l'on prendra son intersection avec le plan tangent au pôle de transformation. — Les polaires des conjointes de ce pôle, relativement à l'intersection dont je viens de parler, couperont le plan de projection aux foyers singuliers de la transformée.

5. Je considérerai spécialement dans cette Note les courbes qui résultent de l'intersection d'une sphère par une surface du second degré. Elles ont été déjà l'objet des travaux d'un grand nombre de géomètres, notamment de MM. Quetelet, Dandelin, Chasles. M. Darboux a aussi publié divers Notes très intéressantes à ce sujet (*Nouvelles Annales de Math.* et *Annales de l'École normale,* 1865).

Ces courbes correspondent exactement sur la sphère aux courbes planes remarquables étudiées par M. Moutard, et qu'il a nommées *anallagmatiques du quatrième ordre*. Par analogie, je les désignerai brièvement sous le nom d'*anallagmatiques sphériques*.

Un telle courbe peut être placée sur quatre cônes du second degré (Poncelet). Soit C l'un de ces cônes et T son sommet; si l'on considère les divers plans tangents que l'on peut mener à ce cône, on voit immédiatement que la courbe peut être considérée comme l'enveloppe des cercles suivant lesquels ils coupent la sphère. Mais il importe de définir la suite de ces cercles par des considérations qui soient purement relatives à la sphère. Dans ce but, je remarquerai d'abord que tous les cercles considérés coupent orthogonalement le cercle de la sphère dont le sommet T est le pôle, cercle que je désignerai par S; en second lieu, que les foyers

---

point de son plan qui porte ce nom, et son pôle, le pôle de son plan par rapport à la sphère.

de ces cercles se trouvent sur le cône supplémentaire du cône G, ayant pour centre le centre de la sphère.

En désignant par G la conique sphérique résultant de l'intersection de la sphère par ce cône supplémentaire, on peut donc énoncer le théorème suivant :

L'anallagmatique sphérique peut être considérée comme l'enveloppe de cercles dont les foyers décrivent une conique sphérique, et qui coupe orthogonalement un cercle fixe.

Par l'anallagmatique considérée passent, outre le cône C, trois autres cônes C_1, C_2, C_3. Désignons respectivement par S_1, S_2, S_3 et G_1, G_2, et G_3 les cercles et les coniques sphériques relatives à ces cônes et analogues à S et à G; l'anallagmatique pourra être engendrée, au moyen de l'une quelconque de ces coniques, de la façon définie ci-dessus.

Il y a donc, en tout, quatre modes différents de génération.

Le plan polaire de chacun des sommets passant par les trois autres, il en résulte que chacun des cercles S, S_1, S_2 et S_3 coupe orthogonalement les trois autres; les quatre cônes C, C_1, C_2 et C_3 sont homocycliques, donc les quatre coniques G, G_1, G_2 et G_3 sont homofocales.

6. Projetons stéréographiquement l'anallagmatique sphérique. On voit immédiatement que si l'on désigne par s la projection du cercle S et par k la projection de la conique polaire du cône G relativement à la sphère, conique que j'appellerai K, la courbe résultant de la projection de l'anallagmatique sphérique pourra être considérée comme l'enveloppe d'un cercle mobile coupant orthogonalement le cercle s, tandis que son centre parcourt la conique k. — C'est donc une anallagmatique plane; et, comme l'anallagmatique sphérique, elle admet quatre modes de génération.

Il est important d'établir que les quatre coniques directrices, correspondant aux quatre modes de génération, sont homofocales.

A cet effet, soient O le pôle de transformation et i et j les deux génératrices isotropes passant par ce point. On sait que les droites isotropes du plan N, sur lequel se fait la projection, forment deux systèmes distincts : l'un, que je désignerai par I_0, est formé de droites parallèles à i; l'autre, que je désignerai par J_0, de droites

parallèles à j. — Considérons une droite isotrope du système I_0, qui soit tangente à k; les droites I_0 et i sont dans un même plan, qui, contenant la génératrice i, est tangent à la sphère; il est tangent aussi à la conique K. Par suite, il est tangent aux coniques K_1, K_2 et K_3, et son intersection avec le plan N doit être tangente aux coniques k_1, k_2 et k_3. Ce que je viens de dire des droites du système I_0 s'applique aux droites de l'autre système. Les quatre coniques considérées ont donc mêmes tangentes isotropes, et par conséquent sont homofocales.

(Toutes ces propriétés des anallagmatiques planes ont été signalées pour la première fois par M. Moutard en 1861).

On démontrerait d'une façon analogue que la projection stéréographique d'une anallagmatique plane sur une sphère est une anallagmatique sphérique.

7. Au lieu de considérer l'anallagmatique comme résultant de l'intersection de la sphère par le cône C, on peut la considérer comme la courbe de contact de la développable circonscrite à la sphère et à la conique K.

Cette façon de considérer la courbe est peut-être celle qui se prête le mieux à la démonstration géométrique de ses propriétés.

J'indiquerai d'abord rapidement la disposition de ses foyers. Elle a quatre foyers singuliers, qui sont les foyers communs aux quatre coniques G, G_1, G_2 et G_3. Elle a seize foyers ordinaires, qui sont les points d'intersection de chacune des coniques K, K_1, K_2 et K_3, avec celui des cercles S, S_1, S_2 et S_3 qui lui correspond. Quatre de ces foyers sont réels; ils peuvent être tous les quatre sur un des cercles que je viens de mentionner, ou être distribués deux à deux sur deux de ces cercles. De là deux classes principales dans l'ensemble des anallagmatiques.

8. *Propriété géométrique relative à trois foyers quelconques situés sur un même cercle.* — Considérons, par exemple, le cercle S et f, g, h, trois foyers situés sur ce cercle; ces trois points se trouvent également sur la conique K. Soit M un point de la courbe sphérique; le plan Q tangent à la sphère en ce point coupe le plan R de la conique K, suivant une droite μV tangente à cette conique. Or, les trois points f, g et h étant sur la sphère, fM^2,

$g\text{M}^2$ et $h\text{M}^2$ sont respectivement proportionnelles aux distances de ces mêmes points au plan Q ou encore à la tangente μV. En appelant x, y et z ces distances, l'équation de la conique en coordonnées tangentielles est de la forme

$$\lambda\sqrt{x}+\mu\sqrt{y}+\rho\sqrt{z}=0.$$

Si maintenant nous remplaçons x, y et z par les quantités proportionnelles fM, gM et hM, il viendra pour l'équation de l'anallagmatique

$$\lambda f\text{M}+\mu g\text{M}+\rho h\text{M}=0.$$

La même méthode permet d'établir d'autres relations remarquables; ainsi, si l'on peut inscrire dans le cercle S un quadrilatère circonscrit à la conique K (auquel cas on pourra le faire d'une infinité de façons); en désignant par α, β, γ, δ les sommets consécutifs d'un tel quadrilatère, la courbe sphérique correspondante satisfera à une relation de la forme

$$\frac{m\alpha-m\gamma}{m\beta-m\delta}=\text{const}.$$

Les courbes que l'on peut définir ainsi forment dans l'ensemble des anallagmatiques un groupe très remarquable; mais leurs plus importantes propriétés dépendent de considérations différentes de celles que je viens d'exposer. On pourrait les distinguer sous le nom général de *cassiniennes,* par analogie avec l'ellipse de Cassini, qui peut être considérée comme leur type principal.

9. Étant donnés quatre points f, g, h et k situés sur un même cercle d'une sphère, proposons-nous de faire passer par un point M pris sur cette sphère une anallagmatique ayant les points donnés pour foyers ordinaires.

Soit RV la trace du plan tangent en M sur le plan du cercle; le problème se réduit évidemment à construire dans ce plan une conique tangente RV et passant par les points donnés. Or, les points de contact des deux coniques satisfaisant à la question, points que je désigne par p et q, sont les points doubles d'une involution formée par les points de rencontre de la droite RV avec les différentes coniques que l'on peut faire passer par les points donnés. En particulier, le cercle qui les contient est une de ces



coniques; soient α et α' les points où il coupe RV. Les quatre points p, q; α, α' sont en rapport harmonique; il en est de même du faisceau de droites Mp, Mq; Mα, Mα'. Mais les droites Mα, Mα' sont deux droites isotropes; donc l'angle pMq est droit; et comme Mp et Mq sont respectivement les normales aux anallagmatiques qui satisfont au problème et qui correspondent respectivement aux points p et q, il s'ensuit que ces courbes se coupent à angle droit.

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DE

LA GÉOMÉTRIE AU CALCUL INTÉGRAL.

Bulletin de la Société philomathique; 1867.

§ I. — En étudiant les beaux théorèmes découverts par M. Poncelet sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à des coniques, Jacobi a montré, le premier, le lien intime qui unit cette théorie à celle des fonctions elliptiques et fait voir comment, en employant un système de cercles ayant même axe radical, on pouvait effectuer géométriquement l'addition et la multiplication des fonctions elliptiques. En terminant son Mémoire, Jacobi avait fait remarquer que la considération plus générale d'un système de coniques devait conduire à des résultats analogues à ceux qu'il avait rencontrés; je ne pense pas qu'il ait depuis développé cette indication et poussé plus loin cette recherche qui lui paraissait digne d'intérêt.

M. Chasles, dans un Mémoire publié dans les *Comptes rendus* en 1844, a repris cette idée en suivant une voie moins directe que celle de Jacobi et donné une représentation géométrique très élégante de l'addition des fonctions elliptiques au moyen d'un système de coniques homofocales.

Le but de cette Note est de résoudre d'une façon complète et générale la question posée par Jacobi.

§ II. — Pour abréger, je désignerai, dans ce qui suit, par puissance d'un point relativement à une courbe la valeur que prend le premier membre de l'équation de cette courbe $f(x, y) = 0$, lorsque l'on substitue aux variables les valeurs des coordonnées de

ce point. La puissance d'un point est une fonction qui ne dépend évidemment que de la forme de la courbe et de la position relative du point; la définition précédente ne la définit qu'à un facteur constant près.

§ III. — Considérons, dans un même plan, deux coniques fixes A et B. Menons à la conique A une tangente quelconque T, et soient m et μ les deux points où cette tangente coupe la conique B. Si la droite T se déplace en restant tangente à A, pour un déplacement infiniment petit, elle tournera autour de son point de contact t; soient m' et μ' les points où, dans sa nouvelle position, elle coupe la conique B. Appelons V le point de rencontre des droites mm' et $\mu\mu'$, la théorie des transversales fournit immédiatement la relation suivante où, pour abréger, j'ai écrit ds et $d\sigma$ au lieu de mm' et $\mu\mu'$,

$$\frac{ds}{mt.m\mathrm{V}} = \frac{d\sigma}{\mu t.\mu\mathrm{V}}.$$

D'après un théorème connu, les tangentes $m\mathrm{V}$ et $\mu\mathrm{V}$ sont proportionnelles aux racines cubiques des rayons de courbure r et ρ de la courbe aux points m et μ; d'après le théorème de Newton sur les transversales, les segments mt et μt sont proportionnels aux racines carrées des puissances des points m et μ relativement à la conique A; en désignant ces puissances par $\pi(m)$ et $\pi(\mu)$, on peut donc écrire la relation suivante,

$$(1) \qquad \frac{ds}{\sqrt[3]{r\sqrt{\pi(m)}}} = \frac{d\sigma}{\sqrt[3]{\rho\sqrt{\pi(\mu)}}}.$$

§ IV. — Dans cette équation différentielle, les variables sont séparées; si nous exprimons que la droite $m\mu$ est tangente à A, nous aurons une intégrale particulière de cette équation. Mais, lorsque l'on a un faisceau de coniques ayant quatre points communs, le rapport des puissances de deux points quelconques situés sur l'une de ces courbes par rapport à une autre courbe quelconque du faisceau est constant, quelle que soit cette dernière courbe. Donc on peut, au lieu de la conique A, considérer une quelconque des coniques qui passent par les quatre points d'intersection de A et de B; et si l'on exprime que la droite $m\mu$

est tangente à cette conique, on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (1).

§ V. — Cette intégrale générale peut être représentée par un faisceau de coniques ayant quatre points communs; ou, si l'on préfère se représenter le déplacement de la droite $m\mu$ par celui de son pôle, par un faisceau de coniques inscrites dans un même quadrilatère. Les deux cas particuliers les plus remarquables sont fournis, d'un côté, par un système de cercles ayant même axe radical et, de l'autre, par un système de coniques homofocales. Dans le cas où la conique B est une ellipse, on peut simplifier l'équation (1); soient, en effet,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de cette ellipse rapportée à ses axes et $f(x, y) = 0$ l'équation de la conique A rapportée à ces mêmes axes.

En posant $x = a \cos\lambda$ et $y = b \sin\lambda$, et en désignant par L et λ les valeurs de l'amplitude aux points m et μ, la relation (1) deviendra

$$\frac{dL}{\sqrt{f(a\cos L,\ b\sin L)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{f(a\cos\lambda,\ b\sin\lambda)}}.$$

§ VI. — Examinons en particulier le cas où la conique B se réduit à un cercle. En désignant par a, b, c, d les points d'intersection de ce cercle avec la conique A, l'on a

$$\frac{\pi(m)}{\pi(\mu)} = \frac{ma.mb.mc.md}{\mu a.\mu b.\mu c.\mu d}$$

et l'équation différentielle (1) devient

$$(2) \qquad \frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{\mu a.\mu b.\mu c.\mu d}}.$$

La forme qui résulte de cette équation, pour la différentielle de l'intégrale elliptique de première espèce la plus générale, est celle qui se prête le mieux aux considérations de la Géométrie pure. Je reviendrai du reste plus tard sur ce point en traitant de la théorie géométrique de la transformation des intégrales elliptiques.

§ VII. — L'équation (2) peut se mettre immédiatement sous la forme de l'équation différentielle d'Euler; fixons la position de chaque point du cercle par sa distance à un point fixe arbitraire et soient L, λ, A, B, C, D les valeurs des angles correspondant aux points m, μ, a, b, c, d; la relation (2) pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{dL}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(L-A)\sin\frac{1}{2}(L-B)\sin\frac{1}{2}(L-C)\sin\frac{1}{2}(L-D)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\lambda-A)\sin\frac{1}{2}(\lambda-B)\sin\frac{1}{2}(\lambda-C)\sin\frac{1}{2}(\lambda-D)}},$$

ou bien en posant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}Z = x$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda = \xi$,

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}A)(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}B)(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}C)(x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}D)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}A)(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}B)(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}C)(\xi-\operatorname{tang}\frac{1}{2}D)}}.$$

§ VIII. — On peut donner à l'équation différentielle d'Euler une autre interprétation géométrique et qui mérite d'être signalée (1). On sait qu'une anallagmatique plane peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles orthogonaux à un cercle fixe B et dont les centres décrivent une conique A. Je modifierai légèrement cette définition et présenterai de la façon suivante le mode de description de la courbe : soit menée à A une tangente réelle extérieure au cercle et la coupant par suite en deux points imaginaires conjugués m et μ. Si l'on mène les quatre droites *isotropes* (2) passant par ces points, ces droites se rencontreront en deux autres points réels M et $\mathcal{M}$; le lieu de ces points sera l'anallagmatique définie ci-dessus.

Il est évident que les points M et $\mathcal{M}$ sont réciproques par rapport au cercle fixe B.

Pour fixer la position d'un point quelconque du plan, je prendrai pour coordonnées les segments interceptés sur un axe fixe entre les intersections de cet axe avec les droites isotropes issues du point donné et un point fixe de cet axe que je prendrai pour origine des coordonnées.

(1) Elle a été remarquée pour la première fois par M. Darboux (*Annales de l'École normale* 1865)

Dans ce système, en désignant par x, y et x', y' les coordonnées respectives de deux points, par d leur distance et θ l'angle que fait avec l'axe fixe la droite qui les joint, on a évidemment

$$x - x' = de^{-\theta i} \quad \text{et} \quad y - y' = de^{-\theta i},$$

formules où, suivant l'usage habituel, i désigne le symbole $\sqrt{-1}$, Soient maintenant z et y les coordonnées du point M de l'anallagmatique définie ci-dessus, l'origine des coordonnées étant placée, pour plus de simplicité, au centre du cercle B; α, β, γ, δ les abscisses des points de rencontre de ce cercle avec la conique A; ces quatre points sont les foyers de l'anallagmatique. Soient α', β', γ', δ' les ordonnées de ces mêmes points; leurs valeurs sont, du reste (le cercle et la conique étant supposés réels), imaginairement conjuguées des valeurs des abscisses.

La relation (¹)

$$\frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{d\sigma}{\sqrt{\mu a.\mu b.\mu c.\mu d}}$$

pourra se mettre sous la forme suivante, où λ désigne un angle réel constant, ne dépendant que de la position des foyers sur le cercle,

$$(3) \quad \frac{dx\, e^{\lambda i}}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} = \frac{dy\, e^{-\lambda i}}{\sqrt{(y-\alpha')(y-\beta')(y-\gamma')(y-\delta')}}$$

et, d'après ce qui a été dit plus haut, l'intégrale générale de cette équation sera fournie par l'équation des anallagmatiques, ayant pour foyers les quatre points dont les coordonnées sont α, α'; β, β'; γ, γ' et δ, δ'.

§ IX. — On aurait pu, en partant d'une propriété géométrique très simple des anallagmatiques, écrire immédiatement l'équation différentielle précédente. Mais la marche que j'ai suivie, quoique plus longue, a l'avantage de faire voir d'une façon nette comment les propriétés des anallagmatiques relatives aux intégrales elliptiques se rattachent à la théorie de Jacobi. Ces courbes se présentent nécessairement quand on veut étudier la marche de l'inté-

(¹) *Voir* ma Communication, séance du 23 mars.

grale pour des valeurs imaginaires de la variable. Tout le temps que la droite tangente à la conique coupe le cercle en deux points réels, la marche simultanée de ces deux points représente d'une manière précise la marche de l'intégrale. Dès qu'elle devient extérieure au cercle, au lieu des points imaginaires m et μ où elle coupe ce cercle, il faut considérer les points réels de l'anallagmatique M et m qui leur correspondent.

On a d'ailleurs la relation très simple suivante entre les éléments différentiels relatifs au cercle et l'anallagmatique :

$$\frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{dS}{\sqrt{Ma.Mb.Mc.Md}}\sqrt{-1}.$$

Pour chaque point du plan, outre l'anallagmatique donnant lieu à la relation précédente, il passe une anallagmatique coupant orthogonalement la première et fournissant la relation suivante :

$$\frac{ds}{\sqrt{ma.mb.mc.md}} = \frac{dS}{\sqrt{Ma.Mb.Mc.Md}}.$$

Les considérations précédentes montrent l'importance des courbes anallagmatiques du quatrième ordre dans l'étude de la représentation géométrique des intégrales elliptiques, lorsqu'on y introduit la considération des imaginaires; cette considération, du reste, me semble indispensable si l'on veut approfondir les propriétés des coniques qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques, théorie dans laquelle la considération des fonctions imaginaires joue un rôle capital.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. M. Moutard a le premier étudié d'une façon complète les surfaces anallagmatiques, c'est-à-dire les surfaces du quatrième ordre qui ont pour ligne double *l'ombilicale* [1]. Il a montré que ces surfaces pouvaient être définies géométriquement, comme l'enveloppe des sphères dont les centres parcourent une surface du second degré A et qui coupent orthogonalement une sphère fixe S. Cette sphère peut être désignée sous le nom de sphère directrice de la surface; son centre est évidemment un pôle principal de l'anallagmatique engendrée. Au point de vue géométrique, il est avantageux de modifier un peu la définition précédente et de la présenter ainsi : A la surface du second degré donnée A, on mène un plan tangent quelconque qui coupe la sphère directrice S suivant un cercle; par ce cercle, on peut faire passer deux cônes *isotropes*, dont les sommets sont évidemment deux points réciproques par rapport à la sphère directrice. Ces deux points, lorsque le plan tangent prend toutes les positions possibles sur la surface A, engendrent la surface anallagmatique, enveloppe des sphères ayant leur centre sur la surface A et coupant orthogonalement la sphère directrice.

2. M. Moutard a montré que la surface ainsi définie pouvait être engendrée de cinq manières différentes au moyen de cinq sur-

[1] *Voir* le *Bulletin de la Société philomathique,* t. IV. Séance du 6 avril 1867.



faces du second ordre A, A_1, A_2, A_3 et A_4, et de cinq sphères directrices correspondant à ces surfaces; que, par suite, la surface anallagmatique possédait cinq pôles principaux de transformation.

Je me propose dans cette Note d'exposer de quelle façon sont reliées entre elles les surfaces du second ordre qui peuvent servir à la génération d'une anallagmatique donnée et comment elles se rattachent géométriquement aux focales de cette anallagmatique.

Les focales d'une surface sont, comme on le sait, les lignes doubles de la développable *isotrope* qui lui est circonscrite. M. Chasles a le premier donné cette notion de *focale* dans son *Aperçu historique,* etc., et montré d'une façon précise ce qui était le point délicat de la question, la notion qui dans l'espace correspondait à la notion du foyer dans le plan. Il a développé du reste depuis les idées qu'il avait alors émises, et je renverrai notamment sur ce sujet à une Note *Sur les surfaces du second ordre homofocales,* insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (11 juin 1860), Note à laquelle, du reste, j'aurai, dans ce qui suit, plusieurs fois occasion de me rapporter.

Une surface anallagmatique étant définie par une surface du second degré A et une sphère directrice S, appelons C l'anallagmatique sphérique qui résulte de leur intersection; la même surface peut être définie par quatre autres surfaces du second degré A_1, A_2, A_3, A_4 et quatre sphères directrices correspondantes S_1, S_2, S_3, S_4. Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les intersections respectives de ces surfaces, on voit immédiatement que les anallagmatiques sphériques C_1, C_2, C_3, C_4 sont les focales de la surface anallagmatique donnée.

Ces cinq focales ne sont pas indépendantes entre elles. Car, étant pris l'une d'elles, C, par exemple, si on lui circonscrit une surface développable *isotrope,* cette surface développable, outre la courbe primitive C, renfermera d'autres lignes doubles qui seront évidemment aussi des focales de la surface proposée.

Or, ces autres lignes doubles seront précisément les quatre anallagmatiques C_1, C_2, C_3, C_4.

De là résulte immédiatement le théorème suivant, qui mérite peut-être, par sa simplicité, d'être explicitement énoncé. Soient une courbe M résultant de l'intersection de deux surfaces du

second ordre P et Q, et une section plane quelconque R de la surface P, la surface développable circonscrite à la fois aux courbes M et R admet, comme lignes doubles, outre la courbe M, quatre autres courbes du quatrième ordre, et chacune de ces courbes est située sur une surface du second ordre passant par la conique R.

3. L'arête de rebroussement de la développable *isotrope* circonscrite à une surface du second degré jouit d'une propriété curieuse signalée par M. Moutard dans les *Nouvelles Annales;* elle consiste en ce que la projection de cette arête sur chacun des plans principaux de la surface est la développée de la focale contenue dans ce plan. Il existe une propriété analogue relativement aux surfaces anallagmatiques. Considérons une sphère directrice quelconque A et soient O son centre et E l'arête de rebroussement de la développable *isotrope* circonscrite, le cône ayant pour sommet le point O et pour base la courbe E coupera la sphère correspondante A suivant le lieu des centres de courbures sphériques de la focale située sur cette sphère.

4. Lorsqu'une surface, telle que la surface anallagmatique considérée, contient l'*ombilicale,* la développable isotrope qui lui est circonscrite se décompose en deux surfaces distinctes. L'une est l'enveloppe des plans, pour lesquels le point de contact avec la surface n'est pas sur l'*ombilicale* même ; les lignes doubles de cette surface sont les *focales ordinaires,* et dans le cas actuel elles se composent des cinq anallagmatiques sphériques dont j'ai parlé ci-dessus.

L'autre est l'enveloppe des plans qui touchent la surface le long de l'ombilicale et ses lignes doubles sont les *focales singulières.* Dans le cas actuel, ces focales singulières se composent de trois coniques qui sont les *focales ordinaires* communes aux cinq surfaces A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 qui peuvent servir à la génération de l'anallagmatique.

Les focales singulières, tout en jouissant des propriétés générales des focales, s'en séparent cependant en certains points; ainsi, tandis que les focales ordinaires se transforment, par la méthode des rayons vecteurs réciproques, en focales ordinaires de la transformée, il n'en est pas de même des focales singulières. Les sur-

faces du système triple orthogonal, découvert par M. Moutard et formé de surfaces anallagmatiques, ont les mêmes focales ordinaires, mais leurs focales singulières varient pour chaque surface.

5. Considérons une surface anallagmatique définie, comme il a été dit au n° 1, au moyen d'une surface du second degré A et d'une sphère directrice S.

La développable circonscrite à ces deux surfaces a quatre lignes doubles qui sont des coniques. Soient K_1, K_2, K_3 et K_4 ces quatre coniques. D'après un théorème dû à M. Chasles (*loc. cit.*), par chacune de ces coniques on peut faire passer une surface homofocale à A. *Les quatre surfaces du second degré ainsi déterminées seront précisément les surfaces* A_1, A_2, A_3, A_4, *au moyen desquelles, d'après le théorème de M. Moutard, on peut engendrer la surface.*

Étant prise une de ces surfaces, par exemple la surface A_1, qui passe par la conique K_1, il sera facile de déterminer la sphère directrice correspondante. En effet, que l'on mène le plan de la conique K_1, il coupera la surface A suivant une conique. Si l'on circonscrit à cette dernière conique et à la surface A_1 une surface développable, cette surface, d'après un théorème de M. Chasles (*loc. cit.*), sera circonscriptible à une sphère, et *cette sphère sera précisément la sphère directrice correspondant à la surface* A.

6. Divers théorèmes relatifs, soit aux surfaces du second ordre homofocales, soit aux surfaces anallagmatiques, découlent des considérations précédentes. Je me bornerai à énoncer les deux suivants :

Théorème I. — *Étant données deux surfaces homofocales du second ordre et un plan fixe* H, *par une droite* D *tracée dans ce plan, menons les plans tangents aux deux surfaces. En joignant les points de contact appartenant à des surfaces différentes, nous obtiendrons quatre droites. Toutes les droites ainsi obtenues, lorsque* D *se déplace dans le plan* H, *sont normales à une même surface anallagmatique.*

Soient S, T les coniques suivant lesquelles le plan H coupe les deux surfaces homofocales données; construisons une conique

quelconque passant par les quatre points d'intersection de S et de T; si la droite D se meut tangentiellement à cette conique, les droites obtenues par la construction précédente formeront une surface développable, et par conséquent traceront sur l'anallagmatique une de ses lignes de courbure.

Théorème II. — *Étant données deux surfaces homofocales* A *et* B *et une droite* D, *menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces, et soient* b *et* b' *les points de contact relatifs à la surface* B, *à l'un des points de contact relatifs à la surface* A; *les droites* ab *et* ab' *sont dans un même plan avec la normale au point* a *et également inclinées sur cette normale.*

7. Les considérations que j'ai exposées dans cette Note au sujet des surfaces anallagmatiques s'appliquent évidemment aux courbes planes anallagmatiques. Je me dispenserai donc d'énoncer les propositions relatives à ces courbes.

SUR LES

CASSINIENNES PLANES ET SPHÉRIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. On peut considérer une anallagmatique sphérique comme le lieu des points de contact des plans tangents à une conique fixe K et à une sphère. Soit S le cercle suivant lequel le plan de la conique coupe la sphère; si l'on peut inscrire dans le cercle S un quadrilatère circonscrit à la conique K (et alors, d'après le théorème de Poncelet, on pourra le faire d'une infinité de façons) en désignant par α, β, γ, δ les sommets consécutifs d'un tel quadrilatère, les divers points m de l'anallagmatique satisferont à une relation de la forme

$$\frac{m\alpha . m\gamma}{m\beta . m\delta} = \text{const.}$$

J'ai signalé cette propriété dans une Note insérée au *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1867).

Les courbes qui jouissent de cette propriété constituent dans l'ensemble des anallagmatiques un groupe remarquable et jouissant de propriétés spéciales dignes d'intérêt. Je les désignerai sous le nom de *cassiniennes,* par analogie avec l'ellipse de Cassini qui peut être regardée comme leur type principal.

2. Je vais donner ici une autre définition de ces courbes, qui, quoique moins simple peut-être en apparence que la précédente, se prête bien mieux aux recherches géométriques.

Soit, en général, tracée sur une sphère une anallagmatique: par cette courbe passent quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère. Prenons une quel-

conque des arêtes de ce tétraèdre et l'arête opposée qui est sa polaire par rapport à la sphère. Il sera facile d'établir les propositions suivantes. Toute droite qui passe par un point a de l'anallagmatique et qui s'appuie sur les deux arêtes du tétraèdre considérées, coupe la sphère en un second point b qui appartient aussi à l'anallagmatique. Je dirai que les deux points a et b sont conjugués, et, pour simplifier le langage, j'appellerai simplement *corde* la droite qui joint deux points conjugués. Si l'on désigne par P et Q les points où l'une des arêtes considérées coupe la sphère, il résulte de ce qui précède que deux points conjugués quelconques et les points P et Q sont toujours situés sur un même cercle et partagent ce cercle harmoniquement. Par suite, si l'on appelle I le point milieu du segment PQ, il en résulte que le produit des distances du point I à deux points conjugués quelconques est constant et que les droites qui joignent ce point milieu aux deux points conjugués sont dans le même plan que la droite PQ et également inclinées sur cette droite (¹).

3. Comme dans un tétraèdre il existe trois couples d'arêtes opposées, on voit que, pour une anallagmatique donnée, on peut imaginer trois modes de groupement des points.

Or, si la courbe est une *cassinienne,* on pourra choisir les deux arêtes du tétraèdre de telle sorte que les points conjugués fournis par le mode de groupement correspondant jouissent de la propriété suivante :

Si l'on prend le conjugué harmonique d'un point quelconque de la sphère P *par rapport à chaque couple de points conjugués* (²), *c'est-à-dire si, sur le cercle passant par le point* P *et chaque couple de points conjugués, on prend le conjugué harmonique de ce point, le lieu des points ainsi obtenus est un cercle.*

Pour abréger, je désignerai simplement ce cercle sous le nom de *cercle correspondant au point* P.

(¹) Le point I est donc pour l'anallagmatique un des points que M. Moutard a désignés sous le nom de *pôles secondaires de transformation.*

(²) Voir *Bulletin de la Société philomathique,* février 1867.



La propriété précédente est caractéristique et peut servir de définition à la cassinienne.

Considérons une sphère et deux droites quelconques dont chacune soit la polaire réciproque de l'autre par rapport à la sphère. Sur cette sphère on peut tracer une infinité de courbes jouissant de la propriété énoncée au n° 2, que toute droite passant par un point de la courbe et s'appuyant sur les deux droites fixes dont je viens de parler rencontre la sphère en un second point de la courbe. Je désignerai les deux points de la courbe situés sur une telle droite sous le nom de *points conjugués*. Maintenant, considérons le lieu des points qui sont conjugués harmoniques d'un point R de la sphère, par rapport aux différents couples de points conjugués d'une courbe quelconque de l'espèce dont je viens de parler. Si ce lieu est un cercle pour une position particulière quelconque du point P, il en sera de même quelle que soit la position de ce point sur la sphère et la courbe considérée sera une cassinienne.

Dans tout ce qui suit, je considérerai exclusivement le mode de groupement qui donne lieu à la proposition énoncée ci-dessus; en sorte que le point conjugué d'un point de la courbe sera parfaitement déterminé. Des deux arêtes du tétraèdre considérées, il y en a toujours une qui coupe la sphère en deux points réels; je désignerai ces deux points par les lettres P et Q.

Ceci posé, on établira facilement les propositions suivantes :

4. *Si l'on considère une corde quelconque d'une cassinienne, c'est-à-dire la droite qui joint deux points conjugués, sa polaire réciproque par rapport à la sphère, sur laquelle est tracée la cassinienne, rencontrera cette sphère en deux points conjugués de la courbe et sera par conséquent aussi une corde.*

De là résulte que la surface engendrée par toutes les cordes, surface qui est du quatrième degré, est à elle-même sa polaire réciproque.

5. La propriété précédente constitue une propriété caractéristique des cassiniennes et l'on peut énoncer la propriété suivante :

Si une anallagmatique est telle qu'une droite passant par deux points de cette courbe ait pour polaire, par rapport à la

sphère sur laquelle elle est tracée, une droite rencontrant la courbe en deux points, cette anallagmatique est une cassinienne dont la droite proposée ainsi que sa polaire sont des cordes; et alors, d'après le théorème précédent, il y a une infinité de droites qui jouissent de la même propriété.

6. *Si* A *désigne le cercle correspondant à un point* R *de la sphère, les cercles correspondant aux divers points du cercle* A *passeront par le point* R.

7. *Le cercle correspondant à un point de la courbe lui est tangent en ce point et coupe la courbe en deux autres points qui sont conjugués.*

8. Considérons une corde quelconque d'une cassinienne; par cette corde on peut mener quatre plans tangents à la courbe. Deux des points de contact se trouveront sur la polaire de la corde, les deux autres seront deux points conjugués. Si, par la corde qui joint ces deux derniers points, on mène des plans tangents à la courbe, deux des points de contact seront les points conjugués formant les extrémités de la première corde considérée.

Deux cordes liées ensemble de la façon que je viens d'indiquer seront dites *cordes associées*.

Leur propriété principale est renfermée dans la proposition suivante :

Toute droite qui touche la sphère sur laquelle est tracée une cassinienne en un point de cette courbe et rencontre une de ses cordes, rencontre aussi la corde qui lui est associée.

9. Cette propriété donne lieu au théorème suivant :

Si une droite se déplace en s'appuyant sur deux droites fixes et en restant tangente à une sphère, la courbe suivant laquelle la surface ainsi engendrée touche la sphère est une cassinienne dont les deux droites fixes sont deux cordes; et, d'après la proposition précédente, *la cassinienne ainsi obtenue peut être engendrée d'une infinité de façons au moyen de deux cordes associées quelconques de la courbe.*

10. Une cassinienne est complètement définie lorsqu'on connaît



les deux points P et Q, qui sont conjugués harmoniques par rapport à tous les couples de points conjugués, et le cercle A correspondant à un point R de la sphère.

Soient M un point quelconque de la sphère et N son réciproque par rapport au cercle A, je veux dire le point où la sphère est percée par la droite qui joint le point M au pôle du plan du cercle. Il est facile de déterminer sur la sphère deux points α et γ, qui soient en rapport anharmonique avec les points M et R, ainsi qu'avec les points P et Q. On peut, si l'on veut, considérer les droites PQ et MR ainsi que leurs polaires; il y aura deux droites qui les rencontreront toutes les quatre, et ces droites seront elles-mêmes polaires réciproques. Par suite, il y en aura une et une seule qui coupera la sphère en des points réels; ces deux points seront les deux points α et γ cherchés. On déterminerait de même deux points β et δ qui soient conjugués harmoniques par rapport aux couples de points N, R et P, Q.

Cela posé, un point quelconque m de la cassinienne considérée satisfera à la relation suivante :

$$\frac{m\alpha . m\gamma}{m\beta . m\delta} = \text{const.}$$

On voit que les points α et γ sont deux points conjugués de la sphère, en prenant ce mot dans le sens où je l'ai employé au n° 3, c'est-à-dire que la droite $\alpha\gamma$ rencontre la droite fixe PQ ainsi que sa polaire; il en est de même des points β et δ. De plus il est évident que l'un des quatre points peut être pris arbitrairement. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une cassinienne et étant pris arbitrairement sur la sphère sur laquelle elle est tracée un couple quelconque de points conjugués, il est toujours possible de trouver un autre couple de points conjugués, de telle sorte que le produit des distances d'un point de la courbe aux points du premier couple soit dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux points du second couple.

11. En particulier, il y existe toujours sur une sphère un couple de points conjugués qui sont diamétralement opposés. Pour les obtenir il suffit de mener par le centre de la sphère une droite

s'appuyant sur la droite PQ et sur sa polaire. Désignons par a et a' ce couple de points; on pourra déterminer d'après le théorème précédent deux autres points c et d, tels que pour tout point de la courbe l'on ait la relation

$$\frac{ma.ma'}{mc.md} = \text{const.},$$

ou encore

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\widehat{ma}.\sin\frac{1}{2}\widehat{ma'}}{mc.md} = \text{const.};$$

et, comme $\sin\frac{1}{2}\widehat{ma'} = \cos\frac{1}{2}\widehat{ma}$, la relation précédente pourra s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\sin\widehat{ma}}{mc.md} = \text{const.}$$

D'où la proposition suivante :

Étant donnée une cassinienne, on peut toujours déterminer un diamètre de la sphère sur laquelle elle est tracée et deux points fixes de cette sphère, de telle sorte que le produit des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux points fixes divisé par la distance de ce même point au diamètre donne un quotient constant.

12. *Si par une corde d'une cassinienne fixe et deux points conjugués quelconques, on mène des plans, ces divers plans forment un faisceau en involution, et les deux plans doubles de l'involution coupent la sphère suivant deux cercles orthogonaux.*

13. *Soient* A, B *et* C, D *deux couples quelconques de points conjugués d'une cassinienne; et soient* a, b, c, d *les points de la sphère qui leur sont diamétralement opposés; m désignant un point quelconque de la courbe, la différence des aires des triangles sphériques mac et mbd est constante.*

14. Les cassiniennes se changent en cassiniennes par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques. Aux



couples de points conjugués de la première courbe correspondent des couples de points conjugués de la transformation.

En particulier, au moyen d'une projection stéréographique, les cassiniennes sphériques se transforment en cassiniennes planes. Je me bornerai, au sujet de ces courbes, à énoncer quelques propriétés que ne partagent pas les cassiniennes sphériques.

Si l'on désigne par a, b et c, d deux couples quelconques de points conjugués, la différence des angles sous lesquels ces segments ac et bd sont vus d'un point quelconque de la courbe est constante.

15. *Dans le cas où la cassinienne est du troisième degré, la différence de ces angles est nulle.*

On peut donc dire que la cassinienne cubique est *le lieu d'où deux segments de droite sont vus sous des angles égaux.*

L'on en déduit que, *si l'on joint un point fixe de la courbe à tous les couples de points conjugués, toutes les droites ainsi obtenues sont également inclinées sur deux droites fixes rectangulaires.*

16. Le lieu des points milieux des droites qui joignent les points conjugués d'une cassinienne plane est un cercle. Lorsque la cassinienne est du troisième degré, ce cercle se réduit à une droite.

Par chaque point de ce cercle (ou de cette droite) passent deux *cordes* de la cassinienne se coupant orthogonalement.

L'enveloppe des cordes d'une cassinienne plane est une courbe de quatrième classe ayant pour foyers les deux foyers singuliers de la courbe et les deux points fixes du plan qui sont en rapport harmonique avec chaque couple de points conjugués.

Lorsque la cassinienne est du troisième degré, elle n'a plus qu'un foyer singulier et l'enveloppe des cordes est alors une courbe de troisième classe.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette dernière courbe se compose de la cassinienne elle-même et de la droite, lieu des points milieux des droites qui joignent les points conjugués.

17. Les cassiniennes cubiques planes ont été depuis longtemps étudiées sous le nom de *focales*. On peut consulter à ce sujet divers travaux de MM. Quetelet, Dandelin et Chasles dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles* et la *Correspondance mathématique de Quetelet*.

Le Tome V de cette dernière collection renferme à ce sujet un très intéressant Mémoire de M. Van Rees, qui y a donné les propriétés énoncées dans le n° 15 et en a déduit les principales conséquences.

SUR LES

SECTIONS CIRCULAIRES DES SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P, par le cercle d'intersection de la sphère et du plan on peut faire passer deux cônes *isotropes*. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P, et réciproquement que le plan P est le plan associé au point p et au point p'.

Cela posé, on peut énoncer les deux lemmes suivants :

Lemme I. — *Si un plan pivote autour d'un point fixe* O, *le lieu des points associés au plan dans ses diverses positions est une sphère ayant pour centre le point* O *et coupant orthogonalement la sphère fixe* S.

Lemme II. — *Si un plan tourne autour d'une droite fixe, le lieu des points associés au plan dans ses diverses positions est un cercle ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère* S *sur la droite et coupant orthogonalement cette sphère.*

2. Une surface anallagmatique peut être définie comme le lieu des points associés par rapport à une sphère S des divers plans qui touchent une surface du second degré A. L'intersection de la surface A et de la sphère S est d'ailleurs une des focales de la surface. A chaque point de l'anallagmatique est associé un plan qui

touche la surface A en un certain point correspondant au premier; à toute courbe tracée sur l'anallagmatique correspondra une certaine courbe formée par les points de contact avec la surface A des divers plans associés aux points de la courbe tracée sur l'anallagmatique.

Des deux lemmes que j'ai donnés ci-dessus on déduit immédiatement les deux propositions suivantes :

La normale en un point M *d'une anallagmatique est la droite qui joint ce point au point correspondant sur la surface* A.

Étant donnés une courbe C *tracée sur l'anallagmatique et un point* M *de cette courbe, si l'on désigne par* c *la courbe correspondante tracée sur la surface du second degré* A *et par* m *le point de cette courbe qui correspond au point* M, *le plan normal en* M *à la courbe* C *est le plan qui passe par ce point et par la tangente conjuguée de la tangente menée en* m *à la courbe* c.

3. Pour faire une application de ces propositions très simples, je démontrerai brièvement le beau théorème donné par M. Moutard sur l'orthogonalité des surfaces anallagmatiques homofocales.

Les surfaces d'un système homofocal peuvent être engendrées au moyen d'une sphère fixe S et des diverses surfaces du second ordre passant par une anallagmatique sphérique K située sur cette sphère.

Cherchons les surfaces d'un tel système qui passent par un point de l'espace M. Pour cela, menons par ce point un cône isotrope, il coupera la sphère suivant un cercle C, dont le plan P sera le plan associé au point M. Le problème est évidemment ramené à mener par la courbe K une surface du second degré tangente au plan P. Or ce plan devant être tangent à la surface cherchée, doit la couper suivant deux droites renfermant nécessairement les quatre points d'intersection de la courbe K avec le cercle C. On aura donc trois solutions, et les trois points de contact correspondant à ces trois solutions seront les trois points de concours des diagonales du quadrilatère formé par les quatre points d'intersection dont je viens de parler. En désignant par p, q, r ces trois points d'intersection, il résulte de la première proposition établie

au n° 2 que les normales aux trois surfaces homofocales passant par le point M sont les droites Mp, Mq, Mr. Mais les trois points p, q, r sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport au cercle C; les droites Mp, Mq, Mr forment donc un trièdre conjugué par rapport au cône ayant pour base C et pour sommet le point M, c'est-à-dire par rapport à un cône isotrope, donc elles forment un trièdre trirectangle.

4. Sur une surface anallagmatique il existe dix systèmes de sections circulaires qui ont été découverts par M. Moutard. Leur existence résulte très simplement de la définition donnée au n° 2. Que l'on imagine en effet un plan se mouvant tangentiellement à la surface A, de façon que son point de contact décrive une génératrice g de cette surface; pendant ce mouvement le plan tangent tournera autour de cette génératrice; le lieu des points qui lui sont associés par rapport à la sphère S sera donc un cercle coupant orthogonalement cette sphère. A toutes les génératrices de la surface A du même système que g correspondra un système de sections circulaires de l'anallagmatique; un autre système de sections circulaires correspondra au second système de génératrices rectilignes de la surface A.

Comme l'anallagmatique est susceptible de cinq modes de génération différentes, l'on voit que l'on obtiendra ainsi cinq groupes de sections circulaires, chaque groupe comprenant deux systèmes distincts.

Deux cercles d'un même groupe et de même système ne se rencontrent jamais.

Deux cercles d'un même groupe et de systèmes différents se coupent en deux points et sont par conséquent situés sur une même sphère.

Deux cercles de groupes différents se coupent toujours en un point.

Les sections circulaires d'une anallagmatique jouissent d'un grand nombre de propriétés analogues à celles des génératrices rectilignes des surfaces du second ordre; je me contenterai ici de mentionner la suivante, semblable de tous points à une propriété fondamentale des surfaces du second ordre donnée par M. Chasles :

Étant donnés quatre cercles quelconques d'un même groupe

et un cercle variable C *d'un autre groupe rencontrant les quatre cercles fixes aux points* a, b, c *et* d; *si l'on mène par le cercle variable* C *les sphères qui touchent la surface aux points* a, b, c *et* d, *le rapport anharmonique de ces quatre sphères est constant.*

5. Pour plus de clarté, je désignerai par S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4 les cinq sphères au moyen desquelles on peut engendrer la surface et par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les cinq surfaces du second degré homofocales qui leur correspondent; pour indiquer le mode de génération relatif à la sphère S_i et la surface A_i, j'emploierai simplement l'expression de génération (S_i).

Cela posé, j'ai montré au n° 2 qu'à chaque courbe tracée sur une anallagmatique correspondait une courbe tracée sur la surface du second degré qui sert à engendrer la surface.

Il est utile, dans un certain nombre de questions, de connaître les courbes qui, dans un mode de génération donné, par exemple (S_0), correspondent aux diverses sections circulaires de la surface.

Relativement au groupe qui appartient proprement à la génération (S_0), il est clair, d'après ce qui précède, que les sections de ce groupe sont représentées par les génératrices rectilignes de la surface A_0.

Pour obtenir la représentation des autres groupes, imaginons que nous circonscrivions à la sphère S_0 et à la surface A_0 une surface développable; cette surface a pour lignes doubles quatre coniques, qui, dans un théorème connu, seront situées sur les quatre surfaces A_1, A_2, A_3 et A_4. Je désignerai ces quatre coniques par la notation C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_4^0; les indices inférieurs indiquant celle des surfaces A sur laquelle chacune des coniques est située.

Si maintenant de chacun des points de la conique C_1^0 on mène des cônes circonscrits à A_0, les diverses courbes de contact sur cette surface seront les courbes correspondant aux sections circulaires du groupe appartenant proprement à la génération (S_1); les coniques C_2^0, C_3^0 et C_4^0 fourniront de même les courbes correspondant aux sections circulaires des groupes appartenant aux générations (S_2), (S_3) et (S_4).

On obtiendrait d'une façon analogue les coniques qui, sur les

surfaces A_1, A_2, A_3 et A_4, correspondent aux différents groupes de sections circulaires.

L'on est amené ainsi à considérer seize coniques analogues à celles que j'ai définies plus haut comme lignes doubles de la surface développable circonscrite à S_0 et à A_0.

Avec ces quatre dernières elles forment un système de vingt coniques qui sont distribuées quatre par quatre sur les cinq surfaces A. Le tétraèdre formé par les plans de quatre d'entre elles situées sur une même surface est un tétraèdre conjugué par rapport à cette surface.

SUR LES COURBES GAUCHES

RÉSULTANT

DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES

DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. On sait que les courbes gauches du quatrième ordre sont de deux espèces différentes; par les unes on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre; par les autres on en peut faire passer une infinité et elles peuvent être définies comme l'intersection de deux de ces surfaces. Je ne m'occuperai ici que de ces dernières et, pour abréger le discours, je les désignerai sous le nom de *biquadratiques gauches,* ou simplement de *biquadratiques* lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune ambiguïté.

Par toute biquadratique gauche l'on peut faire passer quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre T conjugué par rapport aux diverses surfaces du second ordre que l'on peut faire passer par la courbe. Considérons deux arêtes opposées de ce tétraèdre; il est facile de voir que toute droite, qui rencontre la courbe en un point m et s'appuie en même temps sur les deux arêtes considérées du tétraèdre, rencontre la courbe en un second point m'. Je dirai que les points m et m' sont conjugués, et j'appellerai simplement *corde* la droite qui joint deux points conjugués [1]. Les diverses cordes de la courbe forment une surface réglée du quatrième ordre ayant pour lignes doubles les deux arêtes du tétraèdre; je désignerai cette surface par la lettre R.

[1] *Voir* ma Communication du 14 mars 1868 à la Société philomathique.

Comme, dans le tétraèdre T, il existe trois couples d'arêtes opposées, l'on voit que l'on peut grouper les points de la courbe de trois façons différentes; on obtiendra ainsi trois systèmes de cordes formant trois surfaces réglées du quatrième ordre, la surface R et deux surfaces analogues que j'appellerai R_1 et R_2. Je désignerai simplement les modes de groupement qui correspondent à ces trois surfaces par la notation (R), (R_1) et (R_2).

A chaque point de la courbe ne correspond, dans un mode de groupement donné, qu'un seul point conjugué; mais, en tout, il lui correspond trois points dont chacun lui est conjugué dans un des trois modes de groupement que j'ai définis plus haut.

Ces définitions permettent d'établir facilement les propositions suivantes :

2. Étant donnée une droite quelconque rencontrant en deux points une biquadratique gauche, on peut mener par cette droite quatre plans tangents à la courbe. Chacun des points de contact a pour points conjugués les trois autres points de contact, en sorte que, si l'on joint le premier point aux trois autres, on obtient les trois cordes, correspondant aux trois modes de groupement, qui passent par ce premier point. Chacune de ces droites s'appuie donc sur deux arêtes opposées du tétraèdre T. La droite joignant deux points de contact pris arbitrairement et la droite joignant les deux autres points sont deux cordes du même système, en sorte qu'elles rencontrent les deux mêmes arêtes opposées du tétraèdre.

3. *Si a, a' et b, b' désignent deux couples quelconques de points conjugués, les droites a, b et a', b' sont les génératrices d'une même surface du second ordre passant par la courbe.*

4. *Si, par une droite quelconque rencontrant la courbe en deux points et par trois couples quelconques de points conjugués, l'on mène des plans, les plans ainsi obtenus forment un faisceau en involution.*

En particulier :

Si, par une tangente quelconque à la courbe et par trois

couples quelconques de points conjugués, l'on mène des plans, les plans ainsi obtenus forment un faisceau en involution.

M. Chasles a donné un théorème analogue, relatif aux cubiques gauches (*Comptes rendus,* 10 août 1857, n° 22).

5. Soit a, b un couple quelconque de points conjugués d'une biquadratique gauche; si par la droite ab l'on mène les plans tangents à la courbe, les quatre points de contact forment deux couples de points conjugués a', b' et a'', b'' appartenant au même groupe de points conjugués que a et b.

Ces deux couples sont parfaitement déterminés et les droites $a'b'$, $a''b''$ rencontrent les deux arêtes du tétraèdre T sur lesquelles s'appuie la droite ab. De ces deux couples, il y en a un, c'est celui que je désignerai par a', b', qui jouit de la propriété suivante. Les droites qui joignent chacune des extrémités de la corde ab aux deux extrémités de la corde $a'b'$ forment un système de quatre droites situées sur une même surface du second ordre passant par la biquadratique. Le couple de points conjugués a'', b'' ne jouit pas de cette propriété.

Je dirai que $a'b'$ et ab sont deux cordes conjuguées et que $a''b''$ et ab sont deux cordes associées, ou bien encore, que ces couples de droites sont respectivement des génératrices conjuguées et des génératrices associées de la surface réglée R, lieu des cordes correspondant au mode de groupement que je considère.

Ces définitions établies, on aura les propositions suivantes :

6. Si l'on joint les extrémités de chacune des cordes appartenant à un mode de groupement donné, par exemple au groupement (R), aux extrémités de la corde conjuguée, toutes les droites ainsi obtenues sont les génératrices d'une *seule et même* surface du second ordre, que je désignerai par A. Aux deux autres modes de groupement correspondraient deux autres surfaces du second degré que j'appellerai A_1 et A_2.

Deux cordes conjuguées, appartenant au groupement (R), ou, si l'on veut, deux génératrices conjuguées de la surface réglée R, sont polaires réciproques par rapport à la surface A; en sorte que la surface R est à elle-même sa polaire réciproque par rapport à la surface A.

Si par un point quelconque de la surface A on mène les droites qui s'appuient sur les divers couples de génératrices conjuguées de la surface R, toutes les droites ainsi obtenues sont dans un même plan.

7. *Si une droite se meut tangentiellement à la surface* A, *en s'appuyant constamment sur deux génératrices associées quelconques de la surface* R, *elle touche la surface* A *suivant la biquadratique dont cette surface est dérivée.*

Cette propriété résulte immédiatement de la proposition suivante : Toute droite qui touche la surface A en un point de la biquadratique et qui rencontre une génératrice de la surface R rencontre aussi son associée.

Le théorème précédent complète une proposition énoncée par M. Chasles (*Comptes rendus,* 24 février 1862, n° 64), et fournit le moyen d'obtenir effectivement une biquadratique donnée par le mode de génération indiqué ci-dessus.

On voit que par toute biquadratique l'on peut faire passer trois surfaces du second ordre fournissant une solution du problème, chacune de ces surfaces correspondant à un des trois modes de groupement des points de la courbe, et, au moyen d'une quelconque de ces surfaces, on peut encore engendrer la courbe d'une infinité de façons différentes.

Les surfaces réglées du quatrième ordre et à directrices doubles que j'ai désignées par R, R_1 et R_2 jouissent de propriétés particulières qui méritent d'être signalées.

En général, si l'on considère une surface réglée du quatrième ordre, contenant deux droites doubles D et Δ, l'on voit que par chaque point a de la directrice D passent deux génératrices coupant Δ en deux points; de même, par chaque point b de Δ passent deux génératrices coupant D en deux points. Les génératrices divisent donc les deux directrices de telle sorte qu'à un point de D correspondent deux points de Δ et réciproquement.

La correspondance entre les points des deux droites D et Δ peut être exprimée par une relation à trois termes de la façon suivante. Il existe en général, sur la droite D, quatre points tels que le couple de points correspondant à chacun d'eux sur la droite Δ se confond en un seul point; désignons par α, α' et α'' trois quel-

conques de ces points. De même il existe sur la droite Δ quatre points tels que le couple de points correspondant sur la droite D se confonde en un seul point; désignons par β, β' et β'' trois quelconques de ces points.

Cela posé, la relation qui existe entre deux points correspondants a et b situés respectivement sur les droites D et Δ pourra être écrite sous la forme suivante :

$$p\sqrt{a\alpha.b\beta}+q\sqrt{a\alpha'.b\beta'}+r\sqrt{a\alpha''.b\beta''}=0,$$

relation où p, q et r désignent des quantités numériques constantes.

Dans le cas des surfaces que j'ai étudiées dans cette Note, la correspondance entre les points des deux directrices doubles a lieu de telle façon qu'à un couple de points de la droite D correspond un couple de points de la droite Δ; c'est-à-dire que si, au point a de la droite D, correspondent les deux points b et b' de la droite Δ, à ces deux derniers points correspondront deux mêmes points de la droite D, parmi lesquels se trouvera nécessairement le point a.

M. Chasles a depuis longtemps signalé l'importance de ce mode de correspondance dans son Mémoire *Sur la résolution des équations du troisième et du quatrième degré*. Les surfaces à directrices doubles du quatrième ordre, pour lesquelles a lieu ce mode de correspondance, jouent dans l'ensemble des surfaces de la même famille le même rôle que les *cassiniennes* dans l'ensemble des courbes anallagmatiques.

On peut, dans ce cas, exprimer la relation qui existe entre les points correspondants des deux directrices, et cela d'une infinité de façons, par des équations à deux termes; tandis que, dans le cas général, cette relation ne peut pas être exprimée plus simplement que par l'équation à trois termes donnée ci-dessus.

SUR QUELQUES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES

ET SUR LEUR APPLICATION A LA

THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1868.

1. Avant d'aborder ce qui est relatif aux anallagmatiques, je m'occuperai d'abord du lieu décrit par le sommet d'un angle de grandeur donnée dont les côtés s'appuient respectivement sur deux courbes fixes. Je dirai d'abord ce que l'on doit entendre par angle de deux droites, lorsque le sens dans lequel doivent être prises ces droites n'est pas déterminé. Étant données deux droites A et B, faisons tourner la première autour de leur point de rencontre, et dans un sens déterminé, par exemple celui des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce que cette droite s'applique sur B; je dirai que l'angle ainsi décrit est l'angle que fait la droite A avec la droite B. Si l'on continuait le mouvement de rotation, après avoir décrit un angle égal à π, A viendrait de nouveau s'appliquer sur B. L'angle que fait A avec B n'est donc déterminé qu'à un multiple près de π; sa tangente est déterminée, mais son sinus et son cosinus ne le sont pas; le double de cet angle est déterminé à un multiple près de 2π, et les valeurs de toutes ces lignes trigonométriques sont parfaitement connues.

Ces définitions étant établies, étant donnés dans un plan deux points fixes A et B, si l'on cherche dans ce plan le lieu du point M, tel que l'angle de MA avec MB ait une valeur donnée (à un multiple près de π, nécessairement), l'on trouvera pour ce lieu un cercle, passant par les points A et B, et *tous* les points de ce cercle feront partie du lieu. Le cercle symétrique du précédent

serait le lieu des points M, pour lesquels l'angle de MA avec MB aurait une valeur supplémentaire de la valeur donnée précédemment.

2. Ceci posé, cherchons le centre du cercle, lieu des points M tels que l'angle que fait MA avec MB ait une valeur donnée ω. Ce centre est le *foyer singulier* de la courbe, c'est donc le point réel situé sur la tangente menée à cette courbe en un quelconque des ombilics.

Appelons I l'ombilic par lequel passent les diverses lignes isotropes du plan qui ont pour coefficient angulaire i.

Soit K un point du lieu infiniment voisin du point I, en sorte que KI est infiniment voisine de la tangente au cercle en I. Le point K appartenant au lieu, l'angle que fait KA avec KB est égal à ω. Maintenant, joignons le point K au deuxième ombilic du plan J ; la droite KJ sera infiniment voisine de la droite de l'infini, et le point k', où elle coupera la droite AB, sera infiniment voisin du point à l'infini sur cette droite. Soit k le point où la droite KI coupe la droite AB ; d'après une proposition fondamentale que j'ai donnée pour la première fois dans une Note *Sur la théorie des foyers,* insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1853), l'on sait que le rapport anharmonique des quatre points A, B ; k, k' est égal à $e^{2\omega i}$, quantité qui est *parfaitement déterminée* (*voir* n° 1).

L'on aura donc

$$\frac{\mathrm{A}k}{\mathrm{A}k'} : \frac{\mathrm{B}k}{\mathrm{B}k'} = e^{2\omega i};$$

d'où en passant à la limite et en remarquant que le point k' est alors à l'infini

$$\frac{\mathrm{A}k}{\mathrm{B}k} = e^{2\omega i}.$$

D'où cette conclusion : Pour trouver le centre du cercle, lieu des points M tels que l'angle de MA avec MB ait une valeur donnée ω, prenons sur la droite AB un point k tel que le rapport $\frac{\mathrm{A}k}{\mathrm{B}k}$ ait pour valeur $e^{2\omega i}$; menons par ce point la droite isotrope qui passe au point I, le point réel situé sur cette droite sera le centre cherché.

3. Soient maintenant deux courbes quelconques A et B, cherchons le lieu des points M tels qu'une des tangentes menées de ce point à la courbe A fasse un angle donné avec une des tangentes menées de ce même point à la courbe B. Ce lieu a déjà occupé divers géomètres, notamment M. Cremona et M. Faure, qui ont déterminé son degré et sa classe. Je me propose ici de déterminer ses foyers principaux; on sait d'ailleurs que cette courbe (en général) ne rencontre la droite de l'infini qu'aux ombilics, qui sont pour elle des points multiples de l'ordre $n - 1$, $2n$ étant le degré de la courbe. Considérons en particulier l'ombilic I; chacune des tangentes menées à la courbe et la touchant en ce point contiendra un point réel qui sera le foyer singulier correspondant à la branche de courbe que l'on considère. Soit un point K situé sur cette branche et à une distance infiniment voisine du point I; en sorte que la droite KI est infiniment voisine de la tangente en I à cette branche du lieu. Soient Ka et Kb les droites menées tangentiellement aux courbes A et B et qui font l'angle donné ω. Ces deux tangentes sont nécessairement infiniment voisines de deux droites isotropes; soit F le foyer de A, qui est infiniment voisin du point réel situé sur la droite Ka; soit G le foyer de B, qui est infiniment voisin du point réel situé sur la droite Kb.

Je joins le point K au deuxième ombilic du plan J; la droite KJ coupe la droite FG en un point k' infiniment voisin de la droite de l'infini. La droite Ka coupe FG en un point F′ infiniment voisin de F, et la droite Kb coupe FG en un point G′ infiniment voisin de G. Soit de plus k le point où KI coupe FG; d'après la proposition fondamentale que j'ai rappelée plus haut, l'on a

$$\frac{F'k}{F'k'} : \frac{G'k}{G'k'} = e^{2\omega i}.$$

D'où, en passant à la limite et en remarquant que les points F′ et G′ viennent alors se confondre avec les points F et G et que le point k' s'en va à l'infini,

$$\frac{Fk}{Gk} = e^{2\omega i}.$$

L'on obtiendra donc le foyer singulier correspondant à la branche de courbe considérée, en déterminant, sur la droite FG, le point k

par cette équation, en joignant ce point à l'ombilic I et en prenant le point réel situé sur cette courbe.

En comparant ce résultat avec celui que j'ai obtenu dans le paragraphe précédent, l'on en déduit la proposition suivante :

Le foyer singulier, correspondant à la branche de courbe considérée, est le centre du cercle décrit sur FG *comme segment et capable de l'angle donné* ω.

4. L'ensemble des foyers singuliers de la courbe s'obtiendra facilement. Désignons par $F, F_1, \ldots, F_m$ les m foyers de la courbe A, et par $G, G_1, \ldots, G_n$ les n foyers de la courbe B. Prenons un foyer quelconque F_i de A et un foyer quelconque F_j de B : le centre du cercle, décrit sur F_iF_j comme segment et capable de l'angle donné, sera un des foyers singuliers de la courbe ; et on les obtiendra tous en combinant, de toutes les façons possibles, chacun des foyers de B.

Remarquons, en passant, que, d'après ce qui précède, l'équation du degré mn, à laquelle conduit la détermination des foyers singuliers du lieu, sera résoluble par la résolution d'une équation du degré m et d'une équation du degré n.

Un des cas les plus utiles dans les applications est celui où la courbe B se réduit à un point P. La courbe étudiée est alors une podaire, c'est-à-dire le lieu des projections du point P sur les tangentes à la courbe A. Les foyers singuliers de cette podaire sont les points milieux des segments qui joignent le point P aux différents foyers de A.

5. Je vais traiter maintenant le problème inverse du problème précédent. Étant données deux courbes fixes A et B, un angle de grandeur constante se déplace de façon que son sommet parcoure la courbe A, tandis qu'un de ses côtés roule sur la courbe B, quels sont les foyers de la courbe C, enveloppée par le deuxième côté de l'angle?

Pour plus de clarté, je considérerai simplement le cas où l'angle constant est droit et où la courbe B se réduit à un point fixe P. Le cas le plus général se ramènerait facilement à ce cas particulier.

Je supposerai que la courbe A ait m branches qui se croisent en chacun des ombilics du plan, en sorte qu'elle aura m foyers sin-

guliers que je désignerai par G, G', etc.; soit, de plus, n le nombre des points où elle coupe la droite des infinis en dehors des ombilics. On voit que la courbe sera du degré $2m+n$ et qu'elle aura n asymptotes qui ne seront pas *isotropes*.

Joignons le point fixe P à l'un quelconque des points de la droite de l'infini, distincts des ombilics, qui appartiennent à la courbe; la droite de l'infini est perpendiculaire à cette droite; elle est donc tangente à la courbe C et elle la touche en un point α situé à l'infini sur la direction d'une perpendiculaire à l'asymptote qui passe au point α. Ce point α est d'ailleurs un foyer du lieu cherché; d'où cette conclusion : Le lieu a n foyers situés sur la droite de l'infini et sur la direction des droites perpendiculaires aux n asymptotes de la courbe qui ne sont pas isotropes.

Menons maintenant par le point P la droite isotrope qui passe par l'ombilic I; cette droite coupe la courbe A en $m+n$ points distincts de l'ombilic. Soit b l'un quelconque de ces points; la perpendiculaire au point b à la droite Pb se confond avec cette ligne elle-même; cette droite est donc une tangente isotrope du lieu cherché. Le même raisonnement s'appliquerait à la droite isotrope qui joint le point P au deuxième ombilic J; d'où cette conclusion : Le point fixe P est un foyer du lieu cherché, et un foyer multiple qui doit compter pour $(m+n)$ foyers réels.

La droite PI a encore m de ses points de rencontre, avec la courbe A, confondus au point I; la perpendiculaire en ce point à PI est indéterminée. Pour voir ce qui a lieu, considérons sur une des branches de la courbe A, par exemple sur celle qui est caractérisée par le foyer singulier G, un point K infiniment voisin du point I. Joignons PK, puis menons en K la perpendiculaire à cette droite; cette perpendiculaire, étant à la limite d'une droite isotrope, le point réel qu'elle contient sera, à la limite, un foyer du lieu cherché. D'un autre côté, la droite IK s'écarte infiniment peu de la tangente en I à la branche considérée de la courbe A; elle coupe donc la droite réelle PG en un point k infiniment voisin du point G. La droite KJ, s'écartant infiniment peu de la droite de l'infini, coupe PG en un point k' infiniment voisin de cette droite. Soit H le point où la perpendiculaire en K à la droite PK coupe KG; l'on voit facilement que les quatre points P, H, k, k' forment un système de points harmoniques; on a donc la relation

suivante :

$$\frac{Pk}{Pk'} : \frac{Hk}{Hk'} = -1,$$

d'où, en passant à la limite, $PG = GH$.

On voit que le point H s'obtient en joignant le point P au foyer singulier G et en prolongeant la droite PG d'une longueur égale à elle-même.

En considérant la branche de courbe, passant au point J, qui correspond au même foyer singulier G, on obtiendrait aussi une tangente isotrope au lieu cherché passant par H; donc ce point est un foyer de la courbe C.

6. En réunissant les résultats obtenus précédemment, l'on arrive au résultat suivant :

« La courbe C, définie comme ci-dessus, est de $2(m+n)^{\text{ième}}$ classe; elle a :

» 1° n foyers situés à l'infini et sur des directions perpendiculaires aux n asymptotes de la courbe A qui ne sont pas isotropes;

» 2° Un foyer multiple au point fixe P, qui compte pour $(m+n)$ foyers;

» 3° m autres foyers H, H', etc., que l'on obtient en joignant le point P aux foyers singuliers de la courbe A, et en prolongeant d'une longueur égale à elle-même chacune des droites ainsi obtenues. »

7. Je vais appliquer ce résultat à la recherche de la relation qui existe entre les différents points d'intersection d'une courbe et d'un cercle. J'ai donné cette relation dans ma Note intitulée *Théorèmes généraux sur les courbes algébriques,* qui a été insérée dans les *Comptes rendus* (janvier 1863). Je la reproduirai ici en la présentant sous une forme plus commode.

Étant donné un système de n droites situées dans un plan, et un axe fixe dans ce plan, si l'on fait la somme des angles que fait chacune de ces droites avec l'axe fixe, la somme de ces angles (somme qui sera déterminée à un multiple près de π) mesurera ce que j'appelle l'*orientation* du système des droites relativement à l'axe fixe. Le système étant représenté, par exemple, par A, je désignerai simplement son orientation par rapport à un axe donné par



la notation (A). Si deux systèmes de droites A et B ont une même orientation, ce qu'on exprimera par la relation

$$(A) = (B),$$

il est clair que cette propriété subsistera quel que soit l'axe fixe que l'on ait choisi comme terme de comparaison.

Ceci posé, soit une courbe algébrique B de degré p, ne passant pas d'ailleurs par les ombilics, en sorte qu'elle n'a pas de foyers singuliers. Coupons cette courbe par un cercle quelconque; les $2p$ points d'intersection peuvent toujours se distribuer deux par deux sur p droites réelles (dans cette Note, je ne m'occupe exclusivement que de courbes réelles ou du moins ayant une équation réelle), et cela pourra se faire de plusieurs manières, s'il y a plus de deux points d'intersection réels. Le théorème que j'ai donné dans les *Comptes rendus* peut alors s'énoncer ainsi :

L'orientation du système formé par ces p droites réelles est la même que l'orientation du système formé par les asymptotes de la courbe B.

Cette orientation est évidemment constante, et lorsqu'on la connaît, on peut, étant donnés $(2p - 1)$ des points d'intersection, construire le dernier point.

8. Je considère maintenant une courbe A, telle que celle que j'ai examinée ci-dessus, possédant m foyers singuliers G, G', etc. et n asymptotes non isotropes, en sorte que son degré est égal à $2m + n$.

Un cercle quelconque la coupe en $2(m + n)$ points distincts des ombilics; soit d un quelconque de ces points. Prenons sur ce cercle un point arbitraire P et désignons par Q le point diamétralement opposé à P; considérons enfin la courbe C, dont j'ai déterminé les foyers dans le n° 6, et qui est l'enveloppe du côté d'un angle droit dont le deuxième côté s'appuie sur P, tandis que son sommet parcourt la courbe A. Il est clair que la droite Qd et les droites analogues sont les diverses tangentes que l'on peut mener à la courbe C par le point Q.

Je rappellerai un théorème que j'ai donné dans ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes,* insérée



dans le *Bulletin de la Société philomathique* (février 1867), théorème qui peut s'énoncer ainsi :

Si par un point Q pris dans le plan d'une courbe réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, l'orientation du faisceau formé par ces tangentes est la même que celle du faisceau formé par les droites qui joignent le point Q aux foyers de la courbe.

Appliquons ce théorème : désignons par (Qd) l'orientation du faisceau de droite formé par Qd et les droites analogues, par (QP) l'orientation du faisceau formé par les $(m+n)$ droites coïncidant avec QP, par (Z) l'orientation du faisceau formé par les droites menées par Q parallèlement aux n asymptotes de la courbe A qui ne sont pas isotropes, par (QH) l'orientation du faisceau formé par la droite QH et les droites analogues; nous obtiendrons la relation

$$(Qd) = (QP) + (QH) + (Z) + \frac{n\pi}{2},$$

ou bien

$$(Qd) - (QP) - \frac{n\pi}{2} = (QH) + (Z).$$

Imaginons maintenant un système de $(m+n)$ droites réelles passant par les $2(m+n)$ points d'intersection du cercle et de la courbe A, et soit (T) son orientation, il est facile de voir que l'on a

$$(T) = (Qd) - (QP) - (m+n)\frac{\pi}{2}.$$

Transportons, parallèlement à eux-mêmes, de sorte que leur orientation ne change pas, les faisceaux entrant dans le second membre de la relation ci-dessus, en leur donnant comme sommet commun le centre R du cercle. Par suite de la position relative des points H, H', etc. et G, G', etc., on voit qu'au lieu du faisceau formé par les droites allant du point Q aux points H, H', etc., nous aurons à considérer le faisceau formé par les droites allant du point R aux points G, faisceau dont je désignerai l'orientation par (RG); le deuxième faisceau reste toujours composé des parallèles aux asymptotes et la relation donnée ci-dessus peut s'écrire

ainsi

$$(\mathrm{T}) = (\mathrm{RG}) + (\mathrm{Z}) + \frac{m\pi}{2},$$

d'où le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une courbe algébrique, ayant m foyers singuliers et de degré $2m+n$; un cercle quelconque la coupe en $2(m+n)$ points distincts des ombilics. Si l'on imagine un faisceau de $(m+n)$ droites réelles passant par ces points d'intersection, l'orientation de ce faisceau diffère de m angles droits de l'orientation du faisceau formé par les n asymptotes de la courbe qui ne sont pas des droites isotropes, et par les m droites qui joignent le centre du cercle aux foyers singuliers de la courbe.*

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES SPIRIQUES.

Bulletin de la Société Philomathique; 1869.

1. On désigne sous le nom de lignes *spiriques* les courbes anallagmatiques du quatrième ordre qui ont un axe de symétrie. Ces lignes ont été depuis longtemps l'objet des études des géomètres, et, récemment encore, M. de La Gournerie leur a consacré un remarquable Mémoire inséré dans le *Journal de Liouville* (1869).

Comme toutes les anallagmatiques, ces courbes ont quatre foyers singuliers, dont deux réels et deux imaginaires; ces quatre foyers sont d'ailleurs les foyers ordinaires des quatre coniques homofocales au moyen desquelles, d'après la proposition de M. Moutard, on peut décrire ces courbes en les considérant comme enveloppes de cercles.

On peut distinguer deux espèces de spiriques; dans les premières, que je dirai être de première espèce, les deux foyers singuliers réels sont situés sur l'axe de symétrie; dans les autres, que je dirai être de deuxième espèce, ce sont les deux foyers singuliers imaginaires qui sont situés sur cet axe. Leurs propriétés, du reste, sont les mêmes au fond, et ne diffèrent que par les diverses façons de les énoncer. Dans tout ce qui suit, je considérerai spécialement les spiriques de première espèce.

N'ayant à considérer ici que les foyers singuliers de ces courbes, *je les désignerai simplement sous le nom de foyers.* Autour de chaque foyer singulier, comme centre, on peut décrire un cercle qui oscule la courbe en chacun des ombilics; je désignerai les deux cercles ainsi définis sous le nom de *cercles focaux*.

Étant donné un cercle, j'entends par puissance d'un point, rela-

tivement à ce cercle, le carré de la longueur de la tangente que l'on peut mener de ce point au cercle.

Les spiriques renferment, comme cas particuliers, un grand nombre de courbes remarquables, notamment les ovales de Descartes, ou, pour me servir d'une expression plus nette déjà employée par M. de La Gournerie, les *cartésiennes;* elles peuvent être considérées comme des spiriques dans lesquelles les deux foyers réels viennent se confondre.

La spirique peut encore s'abaisser au troisième degré; je la désignerai dans ce cas, pour abréger, par le nom de *cataspirique*. La cataspirique n'a qu'un seul foyer; elle peut être considérée comme une spirique dans laquelle un des foyers est rejeté à l'infini.

Les coniques peuvent aussi être regardées comme des spiriques dont les deux foyers ont été rejetés à l'infini.

D'un point de l'axe d'une spirique, on peut mener huit normales à la courbe, dont quatre se confondent avec l'axe et dont les quatre autres sont symétriques par rapport à cet axe. Je désignerai sous le nom de points *associés* les deux points situés d'un même côté de l'axe, et tels que les normales élevées en ces points concourent en un même point de l'axe.

2. Les spiriques jouissent de toutes les propriétés connues des anallagmatiques; elles possèdent en outre des propriétés particulières. Ces propriétés se déduisent facilement de la proposition suivante, qui s'établit immédiatement par la définition même des spiriques :

Proposition. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une spirique et un point mobile* C *situé sur cette courbe; si l'on joint le point mobile aux deux points fixes et si, par le milieu des cordes ainsi obtenues, on mène des perpendiculaires à ces cordes, ces perpendiculaires déterminent sur l'axe de la courbe deux divisions homographiques, dont les points doubles sont les deux foyers situés sur l'axe.*

Théorème I. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une spirique, si l'on joint un point* C *mobile sur cette courbe aux deux points fixes et si, sur les milieux des cordes* AC *et* BC, *on mène des perpendiculaires à ces cordes, coupant l'axe de*

symétrie aux points α *et* β; F *et* G *désignant les deux foyers réels de la spirique, le rapport*

$$\frac{F\alpha}{F\beta} : \frac{G\alpha}{G\beta}$$

demeure constant, quelle que soit la position du point C *sur la courbe, et sa valeur est égale au rapport des puissances des points* A *et* B *relativement au cercle focal ayant pour centre le foyer* F.

Théorème II. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une cataspirique et un point mobile* C *situé sur la courbe; si, par le milieu des cordes* AC *et* BC, *on mène des perpendiculaires coupant respectivement l'axe de la courbe aux points* α *et* β, *le rapport*

$$\frac{F\alpha}{F\beta}$$

est constant, quelle que soit la position du point mobile sur la courbe, et ce rapport est égal au quotient des puissances des points A *et* B *relativement à la courbe.*

Théorème III. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* B *d'une cartésienne et un point mobile* C *situé sur la courbe; si, par les milieux des cordes* AC *et* BC, *on mène des perpendiculaires à ces cordes, coupant respectivement l'axe de la courbe aux points* α *et* β, *la différence*

$$\frac{1}{F(\alpha)} - \frac{1}{F(\beta)}$$

est constante, quelle que soit la position du point mobile sur la courbe, et la valeur de cette différence est proportionnelle à la différence des carrés des distances du foyer aux points A *et* B.

Théorème IV. — *Le produit des puissances d'un point quelconque d'une spirique relativement à ses deux cercles focaux est constant.*

Théorème V. — *Si l'on prend les polaires du point d'une spirique relativement à ses deux cercles focaux, la portion de*

la tangente interceptée entre ces deux droites a pour point milieu le point de contact.

Théorème VI. — *Étant donnée une corde quelconque* AB *d'une spirique, si l'on prend les points de rencontre* α *et* β *de l'axe avec les normales menées à la courbe par les extrémités de cette corde, et le point* K *où la perpendiculaire élevée au milieu de la corde coupe cet axe, le point* K *est l'un des deux points doubles de l'involution déterminée par les points* F, G *et* α, β.

Remarque. — Cette propriété est exprimée par la relation suivante :

$$\frac{\overline{FK}^2}{\overline{GK}^2} = \frac{F\alpha . F\beta}{G\alpha . G\beta}.$$

Lorsque la courbe est une cataspirique, le foyer G est rejeté à l'infini, et l'on a la relation

$$\overline{FK}^2 = F\alpha . F\beta.$$

Lorsque la courbe est une cartésienne, les deux foyers coïncident en un même point F, et par conséquent les quatre points F, K; α, β sont en rapport harmonique.

Si la courbe est une conique, les deux foyers sont à l'infini et le point K est le milieu du segment αβ.

Théorème VII. — *Si deux points d'une spirique sont situés sur une même perpendiculaire à l'axe, ou s'ils sont à égale distance du centre de la courbe, les normales en ces points coupent l'axe en des points équidistants du centre.*

J'appelle ici *centre de la spirique* le point milieu des deux foyers.

Théorème VIII. — *Le point de l'axe où concourent les normales en deux points associés et le point où la perpendiculaire, élevée au milieu de la corde qui les joint, coupe l'axe, partagent harmoniquement le segment intercepté entre les foyers.*

Théorème IX. — *Le milieu de la droite qui joint deux points associés quelconques est situé sur une droite fixe perpendiculaire à l'axe.*

Théorème X. — *La somme des carrés des distances des deux points associés à un foyer est constante et égale au double du carré du rayon de ce cercle.*

Théorème XI. — *Si, par le milieu d'une corde d'une spirique, on mène une perpendiculaire à cette corde, le rapport des distances du point de rencontre de cette droite avec l'axe aux deux foyers est égal et de signe contraire au quotient de la puissance d'une des extrémités quelconques de la corde relativement au cercle focal du premier foyer, par la puissance de l'autre extrémité relativement à l'autre cercle focal.*

Théorème XII. — *La normale en un point d'une spirique partage la droite joignant les foyers en deux segments dont le rapport est égal et de signe contraire à celui des puissances du point relativement aux cercles focaux.*

Théorème XIII. — *Sur une normale quelconque à une spirique, le rapport des segments déterminés par le centre de courbure, sur la portion de la normale interceptée entre l'axe et la courbe, est proportionnel au* carré *du sinus de l'angle que la normale fait avec l'axe et au* cube *de la longueur de la tangente menée du point de rencontre de la normale avec l'axe au cercle décrit sur la droite qui joint les deux foyers comme diamètre.*

3. Les spiriques, qui ont deux axes de symétrie, sont à la fois de première et de seconde espèce et jouissent des propriétés précédentes relativement à leurs deux axes. De là des propriétés particulières que j'exposerai dans une autre Communication.

Les surfaces anallagmatiques, ayant un plan de symétrie, jouissent relativement aux normales qu'on peut leur mener de quelques-unes des propriétés énoncées ci-dessus. Je développerai plus tard ce point important de leur théorie.

SUR UNE

FORMULE RELATIVE AUX COURBES TRACÉES

SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

1. J'ai énoncé, comme exercice, dans les *Nouvelles Annales,* la proposition suivante :

Étant donnés deux points quelconques A *et* B *d'une surface du second ordre, si en ces points l'on mène les normales à la surface, et si l'on désigne par* a *et* b *les points où ces normales coupent un plan de symétrie quelconque de la surface, le plan mené par le milieu de la corde* AB *et perpendiculairement à cette corde passe par le milieu du segment* ab.

La même propriété peut s'énoncer ainsi : *Les projections des normales* Aa *et* Bb *sur la corde* AB *sont égales et de signes contraires.*

D'où la proposition suivante :

Soient deux points A *et* A' *situés sur une surface du second ordre; désignons par* N *et* N' *les longueurs des normales en ces deux points, c'est-à-dire les longueurs des segments compris sur chaque normale entre la surface et un de ses plans de symétrie, par* V *et* V' *les angles que font respectivement les directions de ces normales avec la direction de la corde* AA'; *on a, quelle que soit la position de ces deux points sur la surface, la relation*

$$\frac{N'}{N} = -\frac{\cos V}{\cos V'}. \qquad (1)$$

2. Imaginons maintenant une courbe quelconque C tracée sur une surface du second ordre, et soient M et M′ deux points infiniment voisins de cette courbe; la relation précédente aura lieu pour ces deux points. N désignant la normale au point M, $N + dN$ sera la normale au point M′. Il s'agit maintenant d'évaluer le rapport des deux cosinus $\cos V$ et $\cos V'$.

A cet effet, je me servirai des désignations et des formules employées par M. Serret dans sa Note *Sur les lignes de courbure des surfaces* insérée dans le *Traité de calcul différentiel* de Lacroix (p. 298).

Désignons par α, β, γ les angles que forme, avec trois axes rectangulaires, la tangente à la courbe au point M dont les coordonnées sont x, y, z; par ξ, υ, ζ et λ, μ, ν les angles formés avec les mêmes axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur. Soient aussi $d\varepsilon$ et $d\eta$ les angles de contingence et de torsion.

Désignons par α', β', γ' les angles formés avec les axes par la normale à la surface du second ordre au point (x, y, z). On peut toujours assigner une ligne à double courbure C′ qui corresponde point par point à la courbe C, de telle sorte que la tangente en un point de cette courbe soit parallèle à la normale menée à la surface du second ordre par le point correspondant de la courbe C. Soient ξ', υ', ζ' et λ', μ', ν' les angles que font avec les axes la normale principale et l'axe du plan osculateur de cette courbe; soient, de plus, $d\varepsilon'$ et $d\eta'$ les angles de contingence et de torsion.

Cela posé, on peut écrire les trois groupes suivants de formules, par lesquelles les angles ω et ϖ se trouvent complètement définis :

$$
(\mathrm{A})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,\\
&\cos\alpha\cos\xi' + \cos\beta\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta' = \sin\omega,\\
&\cos\alpha\cos\lambda' + \cos\beta\cos\mu' + \cos\gamma\cos\nu' = \cos\omega,\\
&\cos\xi\cos\alpha' + \cos\upsilon\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = -\sin\varpi,\\
&\cos\xi\cos\xi' + \cos\upsilon\cos\upsilon' + \cos\zeta\cos\zeta' = -\cos\varpi\cos\omega,\\
&\cos\xi\cos\lambda' + \cos\upsilon\cos\mu' + \cos\zeta\cos\nu' = \cos\varpi\sin\omega,\\
&\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \cos\varpi,\\
&\cos\lambda\cos\xi' + \cos\mu\cos\upsilon' + \cos\nu\cos\zeta' = -\sin\varpi\cos\omega,\\
&\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = \sin\varpi\sin\omega,
\end{aligned}
\right.
$$

La différentiation de ces équations conduit aux trois suivantes :

$$(2)\qquad \sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon,$$

$$(3)\qquad d\eta' + d\omega = -\cos\varpi\, d\varepsilon,$$

$$(4)\qquad d\varpi = d\eta + \cos\omega\, d\varepsilon'.$$

3. Pour évaluer $\cos V$ et $\cos V'$, je remarque que, les cosinus des angles que fait la normale au point M avec les axes étant respectivement $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, le cosinus de l'angle que fait la normale au point M′ avec l'axe des x est

$$\cos\alpha' + d\cos\alpha' + \frac{1}{2} d^2 \cos\alpha',$$

expression qui, en prenant l'arc de la courbe pour variable indépendante et en employant les formules données par M. Serret (Lacroix, p. 284 et suivantes), devient

$$\cos\alpha' + \cos\xi'\, d\varepsilon' + \frac{1}{2}(\cos\xi'\, d^2\varepsilon' - \cos\alpha'\, d\varepsilon'^2 - \cos\lambda'\, d\varepsilon'\, d\eta').$$

Les cosinus des angles que fait cette normale avec les deux autres axes auraient une forme semblable; il est inutile de les écrire.

Cherchons maintenant les cosinus des angles que fait avec les axes la corde MM′; il suffit évidemment de trouver des quantités proportionnelles à ces cosinus. On pourra donc, au lieu de ces cosinus, employer les projections de la corde MM′ sur les trois axes, ou bien δx, δy et δz : $x + \delta x$, $y + \delta y$ et $z + \delta z$ désignant les coordonnées du point M′.

La formule de Taylor donne, en se bornant aux premiers termes,

$$\delta x = \left(\frac{dx}{ds}\right) ds + \frac{1}{2} d\left(\frac{dx}{ds}\right) ds + \frac{1}{6} d^2\left(\frac{dx}{ds}\right) ds;$$

or $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$; on pourra donc prendre, pour le cosinus de l'angle que fait avec l'axe des x la corde MM′, l'expression

$$\cos\alpha + \frac{1}{2} d\cos\alpha + \frac{1}{6} d^2(\cos\alpha),$$

expression qui, au moyen des formules de M. Serret, devient

$$\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\xi\, d\varepsilon + \frac{1}{6}(\cos\xi\, d^2\varepsilon - \cos\alpha\, d\varepsilon^2 - \cos\lambda\, d\varepsilon\, d\eta).$$

Les deux autres cosinus auraient une forme semblable; il est inutile d'en donner la valeur.

Ceci posé, la formule connue qui donne le cosinus de l'angle de deux droites fournit immédiatement, en employant les relations (A), les deux expressions suivantes :

$$(5)\qquad \cos V = -\frac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos V' = &-\frac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \sin\omega\, d\varepsilon' \\ &-\frac{1}{2}\cos\varpi\cos\omega\, d\varepsilon\, d\varepsilon' + \frac{1}{2}\sin\omega\, d^2\varepsilon' - \frac{1}{2}\cos\omega\, d\varepsilon'\, d\eta'. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière expression peut se simplifier; on a, en effet, d'après l'équation (2),

$$\sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon;$$

en outre, en différentiant cette dernière relation, on obtient

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d(\sin\varpi\, d\varepsilon) - \cos\omega\, d\varepsilon'\, d\omega,$$

ou bien, comme d'après l'équation (3),

$$d\omega = -d\eta' - \cos\varpi\, d\varepsilon,$$

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d(\sin\varpi\, d\varepsilon) + \cos\omega\, d\varepsilon'\, d\eta' + \cos\omega\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\varepsilon';$$

en portant ces valeurs de $\sin\omega\, d\varepsilon'$ et de $\sin\omega\, d^2\varepsilon'$ dans l'équation (6), il viendra, toutes réductions faites,

$$(7)\qquad \cos V' = \frac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \frac{1}{2}d(\sin\varpi\, d\varepsilon).$$

L'équation (1) devient donc, en multipliant les deux termes du second membre par 2,

$$1 + \frac{dN}{N} = -\frac{-\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta}{\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + d(\sin\varpi\, d\varepsilon)};$$

d'où, en réduisant,

$$\frac{dN}{N} = \frac{\frac{2}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon + \frac{2}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta - d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon};$$



ou bien encore

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d^2\varepsilon}{d\varepsilon} - \frac{d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon} + \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\tang\varpi}.$$

Remarquons maintenant que $d\varepsilon = \frac{ds}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la courbe C, et que l'arc est la variable indépendante; par conséquent, on a $d^2\varepsilon = ds\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. La relation précédente devient donc

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)} - \frac{d\left(\frac{\sin\varpi}{\rho}\right)}{\frac{\sin\varpi}{\rho}} + \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\tang\varpi};$$

d'où, en intégrant,

$$\log N = \frac{2}{3}\log\frac{1}{\rho} - \log\frac{\sin\varpi}{\rho} + \frac{2}{3}\int\frac{d\eta}{\tang\varpi};$$

et, en passant des logarithmes aux nombres, après avoir chassé le dénominateur 3,

$$\frac{N^3}{\rho}\sin\varpi^3 = e^{2\int\frac{d\eta}{\tang\varpi}} \times \text{const}.$$

D'où l'on déduit la proposition suivante, en remarquant que ϖ désigne le complément de l'angle que fait avec la normale à la surface la normale principale de la courbe C :

Théorème. — *Étant donnée une courbe quelconque tracée sur une surface du second ordre, désignons, en un point quelconque de cette courbe, l'angle de torsion par $d\eta$ et par ϖ le complément de l'angle que fait en ce point, avec la normale à la surface, la normale principale; cela posé, si l'on considère un arc de la courbe compris entre les points A_0 et A_1, et si l'on désigne respectivement par N_0 et N_1, ρ_0 et ρ_1, ϖ_0 et ϖ_1 les valeurs de la normale, du rayon de courbure de la courbe et de l'angle ϖ aux points extrêmes de l'arc, on a la relation suivante :*

$$(8) \qquad \frac{N_1^3}{\rho_1^3}\sin\varpi_1^3 : \frac{N_0^3\sin\varpi_0^3}{\rho_0} = e^{2\int\frac{d\eta}{\tang\varpi}},$$

l'intégrale contenue dans le second membre s'étendant le long de la courbe du point A_0 au point A_1.

4. La formule précédente fournit aisément les relations connues pour les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

Considérons d'abord une ligne géodésique; d'après la définition de cette ligne, on a pour tous ses points $\sin\varpi = 1$ et $\tang\varpi = \infty$; l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) est donc nulle, et il vient simplement

$$\frac{N_1^3}{\rho_1} : \frac{N_0^3}{\rho_0} = 1;$$

d'où cette proposition :

Le long d'une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, le rayon de courbure de la courbe est proportionnel au cube de la normale.

C'est le théorème de Joachimsthal.

5. Supposons maintenant que C soit une des lignes de courbure de la surface; alors, d'après le théorème de Lancret, on a

$$d\eta = d\varpi;$$

l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) devient alors

$$\int \frac{d\varpi}{\tang\varpi} = \log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0,$$

le second membre de cette équation devient

$$e^{2(\log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0)} = \frac{\sin\varpi_1^2}{\sin\varpi_0^2},$$

et la formule (8) donne alors

$$\frac{N_1^3\sin\varpi_1}{\rho_1} : \frac{N_0^3\sin\varpi_3}{\rho_0} = 1;$$

d'où l'on conclut que le long de la courbe $\frac{N^2\sin\varpi}{\rho}$ conserve une valeur constante. Remarquons maintenant que, d'après le théorème de Meusnier, $\frac{\sin\varpi}{\rho}$ est égal à $\frac{1}{r}$, r désignant le rayon de courbure de la section normale tangente à C; le long d'une même ligne de courbure $\frac{N^2}{r}$ conserve donc la même valeur.



D'où cette proposition, due à M. Dupin :

Le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe varie proportionnellement au cube de la normale.

6. Si j'avais voulu me restreindre au cas des lignes géodésiques et des lignes de courbure, il eût été très facile de remplacer les considérations analytiques qui précèdent par des considérations géométriques très simples et très élémentaires qui eussent conduit immédiatement aux théorèmes de Joachimsthal et de M. Dupin. Je laisse ce soin au lecteur; mon seul but, dans cette Note, était d'établir la formule générale (8), sur laquelle j'aurai plus tard l'occasion de revenir, tant pour en montrer l'application à la géométrie des surfaces du second ordre que pour montrer comment elle s'étend aux surfaces de degré supérieur.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. BOURGET.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

Une erreur s'est glissée dans la rédaction de la question 960. Il existe bien, pour chaque surface du second ordre, un groupe de surfaces du même ordre qui jouissent de la propriété indiquée, mais ces surfaces ne sont pas homofocales à la première.

Permettez-moi, en faisant ici cette rectification, d'entrer à ce sujet dans quelques détails qui, malgré leur simplicité, pourront peut-être intéresser vos lecteurs.

Proposons-nous cette question :

Trouver deux surfaces S *et* Σ *qui se correspondent point par point, de telle sorte que le plan mené perpendiculairement à la corde qui joint deux points quelconques* A *et* B *de la surface* S *et par le milieu de cette corde passe par le milieu de la corde* $\alpha\beta$ *qui joint les points correspondants sur la surface* Σ.

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point quelconque de S et (ξ, η, ζ) les coordonnées du point correspondant de Σ, en sorte que ξ, η, ζ sont des fonctions actuellement indéterminées de x, y et z; soient encore (x', y', z') les coordonnées d'un autre point arbitraire de S et (ξ', η', ζ') les coordonnées du point qui lui correspond sur Σ. Si les deux surfaces S et Σ jouissent de la propriété énoncée ci-dessus, on devra avoir

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\xi + \xi' - x - x')(x - x') \\ &\quad + (\eta + \eta' - y - y')(y - y') + (\zeta + \zeta' - z - z')(z - z') = 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que les relations qui existent entre les

points correspondants des deux surfaces soient de la forme

$$(2) \qquad \xi = mx, \qquad \eta = ny, \qquad \zeta = pz,$$

m, n et p désignant des quantités constantes, l'équation (1) deviendra alors

$$(m-1)(x'^2 - x^2) + (n-1)(y'^2 - y^2) + (p-1)(z'^2 - z) = 0$$

ou bien

$$(m-1)x'^2 + (n-1)y'^2 + (p-1)z'^2 = (m-1)x^2 + (n-1)y^2 + (p-1)z^2.$$

On satisfera donc d'une façon générale à l'équation (1), quels que soient les deux points donnés, si on les assujettit à rester sur la surface du second ordre

$$(m-1)x^2 + (n-1)y^2 + (p-1)z^2 = \text{const.}$$

Faisons la constante égale à λ^2 et $m - 1 = \frac{\lambda^2}{a^2}$, $n - 1 = \frac{\lambda^2}{b^2}$, $p - 1 = \frac{\lambda^2}{c^2}$; a^2, b^2 et c^2 étant de nouvelles constantes, l'équation de la surface S deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et l'équation d'une quelconque des surfaces Σ sera, en vertu des formules de transformation (2),

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2+\lambda^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2+\lambda^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2+\lambda^2)^2} = 1,$$

équation où λ désigne un paramètre arbitraire.

Il résulte immédiatement, soit des formules (2), soit encore de la propriété même qui a servi à définir les surfaces, que la droite qui joint un point quelconque A de S au point correspondant de Σ est normale en S au point A.

On voit immédiatement que les surfaces Σ peuvent être regardées comme le lieu des points qui partagent dans un rapport constant les portions des normales interceptées entre la surface S et un quelconque des plans de symétrie de cette surface.

Si l'on fait successivement $\lambda^2 = -a^2$, $-b^2$ et $-c^2$, la surface Σ se confond tour à tour avec les trois plans de symétrie de S;

on peut donc faire correspondre chacun de ces plans avec S, et point par point de telle sorte que le mode de correspondance jouisse de la propriété indiquée. Le point correspondant sur un des plans de symétrie à un point donné A de S est évidemment le point de ce plan où passe la normale en A à la surface; d'où la solution de la question que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales*.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE [1].

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

Définition des droites isotropes et des ombilics. — Coordonnées isotropes. — Représentation d'un point imaginaire. — Distance de deux points imaginaires.

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai toujours un plan *réel* et les figures tracées dans ce plan. Plus tard, en traitant de la Géométrie de l'espace, j'examinerai quelles modifications et quelles restrictions on doit apporter aux résultats obtenus, quand on veut les appliquer à des plans imaginaires et aux figures tracées dans ces plans.

Considérons donc un plan réel, et dans ce plan deux axes rectangulaires réels Ox et Oy, auxquels nous rapporterons les points du plan suivant la méthode de Descartes.

Soient A un point quelconque de ce plan, α et β ses coordonnées réelles ou imaginaires.

L'équation d'un cercle ayant ce point pour centre et la longueur ρ pour rayon sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2.$$

Si nous supposons que le rayon ρ décroisse indéfiniment jusqu'à devenir nul, la courbe représentée par l'équation précédente variera de forme, en demeurant toujours un cercle. A la limite, pour $\rho = 0$, elle représentera un cercle de rayon nul; remarquons que, dans ce cas, le premier membre de son équation se décom-

[1] Nous reproduisons ici la première leçon du Cours de Géométrie supérieure, professé cette année par M. Laguerre à la salle Gerson.

pose en deux facteurs

$$(y-\beta)+(x-\alpha)i$$

et

$$(y-\beta)-(x-\alpha)i;$$

en sorte que, en réalité, le cercle de rayon nul ayant pour centre le point réel ou imaginaire dont les coordonnées sont α et β se décompose en deux droites dont les équations sont

$$(y-\beta)=i(x-\alpha)$$

et

$$(y-\beta)=-i(x-\alpha).$$

Ces droites remarquables, en lesquelles se décompose un cercle lorsque son rayon devient nul, sont caractérisées évidemment par cette propriété très simple d'avoir respectivement $+i$ et $-i$ pour coefficient angulaire.

Si donc l'on imagine tracées dans le plan toutes les droites analogues que l'on obtiendrait en considérant tous les cercles de rayon nul ayant pour centres les différents points du plan, l'on voit que toutes ces droites formeront dans le plan deux systèmes de droites parallèles.

Pour l'un de ces systèmes, le coefficient angulaire est $+i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta)=(x-\alpha)i;$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du premier système* passant par le point (α, β). Toutes les droites isotropes du premier système étant parallèles entre elles concourent en un même point de l'infini, qui est défini par le coefficient angulaire commun à ces droites; dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ce point de la droite de l'infini par la lettre I.

Pour l'autre système, le coefficient angulaire est $-i$, en sorte que la droite de ce système qui passe par le point (α, β) a pour équation

$$(y-\beta)=-i(x-\alpha);$$

je dirai que cette droite est la droite *isotrope du second système* passant par le point (α, β). Toutes les droites de ce second sys-

tème concourent en un même point de la droite de l'infini, que je désignerai constamment par la lettre J.

2. Il était nécessaire, vu l'importance des droites remarquables que je viens de mentionner, de leur donner un nom spécial, bref et expressif. L'expression de droite *isotrope,* n'ayant pas encore de signification en Géométrie, m'a paru convenable pour atteindre ce but; elle se justifie en remarquant que l'équation d'une quelconque de ces droites, comme il est facile de le vérifier, ne change pas de forme lorsque, conservant la même origine pour les axes, on passe du système d'axes primitif à un autre système d'axes rectangulaires quelconques.

Une propriété essentielle de droites isotropes, et qui pourrait servir à les définir, est la suivante : la distance entre deux points quelconques d'une droite isotrope *situés à distance finie dans le plan* est nulle. En d'autres termes, ces droites satisfont à l'équation différentielle

$$ds = 0.$$

Sur une surface quelconque, on peut étudier les courbes qui satisfont à cette équation différentielle; ces courbes sont des lignes géodésiques de la surface, et nous leur donnerons aussi le nom de *lignes isotropes.*

Les deux points remarquables de la droite de l'infini vers lesquels convergent les deux systèmes de droites isotropes d'un plan, et que nous avons désignés par les lettres I et J, méritent aussi, vu leur fréquent usage, une dénomination simple et concise; je les désignerai sous le nom d'*ombilics du plan;* ces points jouent, en effet, dans le plan, le même rôle que jouent, dans la théorie des surfaces du second ordre, les ombilics de ces surfaces situés à l'infini.

3. De ce qui précède, il résulte que par chaque point du plan réel ou imaginaire passent deux droites isotropes, l'une du premier système et l'autre du second système, et que ces droites peuvent être obtenues en joignant le point donné aux deux ombilics du plan.

Les deux droites isotropes passant ainsi par un point A forment, dans leur ensemble, un cercle de rayon nul qui jouit de toutes les

propriétés du cercle. Voici celles de ces propriétés sur lesquelles je m'appuierai principalement :

« Si une droite menée par un point B du plan coupe, aux points m et m', les deux droites isotropes issues d'un point A, le produit des segments Bm et Bm' est égal au carré de la longueur BA.

» Les choses étant posées comme précédemment, la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite Bmm' a pour pied le point milieu du segment mm'. »

Le cercle ainsi formé par les deux droites isotropes passant par un point A ne contient évidemment d'autre point réel que le point A, si ce point est réel. Examinons ce qui se passe lorsque le point A est imaginaire.

On peut d'abord remarquer que toute droite imaginaire du plan contient un point réel. En effet, son équation, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire, peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = 0.$$

D'où l'on voit que le point réel, qui est l'intersection des deux droites réelles $P = 0$ et $Q = 0$, se trouve sur la droite proposée. Toute droite imaginaire contient donc toujours un point réel, qui peut être à l'infini, lorsque les droites $P = 0$ et $Q = 0$ sont parallèles; dans ce cas, la droite imaginaire passe par un point réel de la droite de l'infini, ou, autrement dit, a une direction réelle. Il est d'ailleurs évident qu'une droite imaginaire ne peut contenir qu'un seul point réel.

Je dirai que deux points sont *imaginairement conjugués* lorsque leurs coordonnées sont respectivement des quantités imaginairement conjuguées; que deux droites sont imaginairement conjuguées lorsque l'on peut passer de l'équation de l'une à l'équation de l'autre en changeant $+i$ et $-i$, et réciproquement.

De cette définition, il résulte immédiatement que :

1° Si un point se trouve sur une droite imaginaire D, le point qui lui est imaginairement conjugué se trouve sur la droite imaginairement conjuguée à D;

2° Deux droites imaginairement conjuguées se coupent en un point réel;



3° Deux points imaginairement conjugués sont toujours situés sur une même droite réelle, et cette droite est évidemment la seule droite réelle qu'on puisse faire passer par chacun des deux points.

Cela posé, si, par un point A, on mène une droite isotrope du premier système, cette droite contient un point réel a, qui sera d'ailleurs à distance finie, puisque la droite isotrope a une direction imaginaire et coupe la droite de l'infini à l'ombilic I; de même la droite isotrope du second système, passant par le point A, contient un point réel a', situé également à distance finie.

On voit que le point A détermine complètement les deux points a et a' ; réciproquement, ces deux derniers points déterminent sans ambiguïté le point A, car ce dernier point est l'intersection de la droite isotrope du premier système passant par a avec la droite isotrope du second système passant par a'.

Nous pourrons donc fixer sans ambiguïté la position d'un point imaginaire dans le plan, par la position des deux points réels a et a', ou, si l'on veut, par la position du segment aa' ; nous dirons que aa' est le *segment représentatif* du point imaginaire A, que a est l'origine de ce segment, et que a' en est l'extrémité.

Il est très important d'établir que ce segment représentatif d'un point est toujours le même, quels que soient les axes du plan auxquels on l'ait rapporté.

Soient, à cet effet, α et β les coordonnées imaginaires d'un point A, et, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire,

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' i,$$
$$\beta = \beta' + \beta'' i.$$

La droite isotrope du premier système passant par ce point a pour équation

$$(y - \beta' - \beta'' i) = (x - \alpha' - \alpha'' i) i;$$

les coordonnées a_0 et b_0 du point réel a situé sur cette droite sont évidemment

$$a_0 = \alpha' - \beta''$$

et

$$b_0 = \beta' + \alpha''.$$

Changeons maintenant de système d'axes rectangulaires, en transportant leur origine au point (ξ, η) et, en les faisant tourner de

l'angle ω, les formules de transformation à employer seront les suivantes :

$$X = \xi + x \cos\omega - y \sin\omega,$$
$$Y = \eta + x \sin\omega + y \cos\omega.$$

Les nouvelles coordonnées du point A seront, dans ce nouveau système,

$$\xi + (\alpha' + \alpha'' i) \cos\omega - (\beta' + \beta'' i) \sin\omega$$

et

$$\eta + (\alpha' + \alpha'' i) \sin\omega + (\beta' + \beta'' i) \cos\omega.$$

Les coordonnées du point réel situé sur la droite isotrope du premier système passant par ce point seront, d'après les formules précédentes,

$$a'_0 = \xi + \alpha' \cos\omega - \beta' \sin\omega - \alpha'' \sin\omega - \beta'' \cos\omega$$

et

$$b'_0 = \eta + \alpha' \sin\omega + \beta' \cos\omega + \alpha'' \cos\omega - \beta'' \sin\omega,$$

ou bien

$$a'_0 = \xi + a_0 \cos\omega - b_0 \sin\omega,$$
$$b'_0 = \eta + a_0 \sin\omega + b_0 \cos\omega.$$

L'on voit que a'_0 et b'_0 se déduisent de a_0 et de b_0 par les formules de transformation données ci-dessus; la proposition est donc démontrée.

4. Cette proposition justifie l'emploi du segment aa' pour représenter le point imaginaire A. La position de ce segment ne dépend que de la position du point imaginaire lui-même, et nullement du choix des axes coordonnés, que nous n'aurons plus dès lors à considérer que pour éclaircir et établir avec plus de sûreté quelques formules fondamentales.

Je désignerai, dans tout ce qui suit, un point imaginaire par une simple lettre, ou, lorsque l'on voudra mettre en évidence les éléments réels qui le déterminent, par son segment représentatif; en sorte qu'un point imaginaire A, ayant pour segment représentatif aa', sera représenté par la notation (a, a').

Aux considérations qui précèdent, j'ajouterai les réflexions suivantes. Quand un point est réel, les deux extrémités du segment qui le représentent se confondent avec ce point lui-même. Le cas d'un point réel est donc contenu dans le cas général d'un point imaginaire.



Soient A un point imaginaire, aa' son segment représentatif; si l'on imagine menée par a une droite isotrope du second système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite Aa; de même, si par a' on mène une droite isotrope du premier système, cette droite sera imaginairement conjuguée à la droite Aa'.

Les deux droites ainsi obtenues se coupent en un point A' qui est évidemment le point imaginairement conjugué du point A, et qui sera représenté par le segment $a'a$.

D'où cette proposition : Si (a, a') désigne un point imaginaire, (a', a) désigne le point qui lui est imaginairement conjugué.

D'où encore les conséquences suivantes, que je me borne à mentionner à cause de leur simplicité :

1° La droite réelle qui joint deux points imaginairement conjugués est perpendiculaire au segment qui représente à la fois ces deux points et elle passe par le milieu de ce segment;

2° Si un point imaginaire est situé sur une droite réelle D, et si l'on connaît l'origine a de son segment représentatif, il suffira pour obtenir l'extrémité de ce segment, d'abaisser de l'origine une perpendiculaire sur D et de prolonger cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même.

5. Dans le cours de ces leçons, lorsque, pour plus de clarté ou pour développer certains points particuliers, j'aurai recours à la Géométrie analytique, j'emploierai de préférence un système de coordonnées particulier, déjà employé du reste avec succès par divers géomètres, et que je désignerai sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Pour le définir, considérons un point quelconque O du plan, et menons par ce point dans un sens déterminé une droite indéfinie $O\omega$, que j'appellerai l'*axe des coordonnées,* le sens positif de cet axe étant fixé par ce qui précède.

Par un point quelconque du plan A, menons une droite isotrope du premier système, et soit α le point de rencontre de cette droite avec l'axe; désignons de même par β le point de rencontre de l'axe avec la droite isotrope du second système passant par le point A. Je prendrai pour coordonnées les deux longueurs $O\alpha$ et $O\beta$, qui définissent évidemment la position du point A, et je poserai $O\alpha = u$ et $O\beta = w$.

Les formules relatives aux coordonnées isotropes sont faciles à établir; je me bornerai aux suivantes, dont je vais me servir tout à l'heure.

Si nous rapportons la figure à des axes rectangulaires, en prenant Oω pour axe des x, et la perpendiculaire en O pour axe des y, et si, de plus, nous désignons par x et y les coordonnées du point A dans ce nouveau système, l'on voit immédiatement que l'on a

$$u = x + yi,$$
$$w = x - yi.$$

Soient deux points du plan a et a', et ici je les suppose *essentiellement réels;* soient respectivement x, y et x', y', u, w et u', w' leurs coordonnées dans les deux systèmes.

On a les formules connues

$$x' - x = aa' \cos\lambda,$$
$$y' - y = aa' \sin\lambda,$$

formules dans lesquelles aa' est *essentiellement positif,* et où λ désigne l'angle qu'il faut faire décrire au segment aa', en le faisant tourner autour du point a, dans le sens des aiguilles d'une montre ([1]), jusqu'à ce que la *direction positive* de cette droite devienne parallèle à la *direction positive* de l'axe Oα. J'entends ici par direction positive de la droite aa', la direction dans laquelle se mouvrait un point mobile allant du point a au point a', sans passer par l'infini.

Il est clair que, par la définition qui précède, l'angle λ est défini à un multiple près d'une circonférence entière.

Multiplions maintenant la deuxième des relations précédentes par i, ajoutons-la à la première; retranchons-les ensuite l'une de l'autre; on obtiendra les deux équations fondamentales suivantes :

$$(1) \qquad u' - u = aa'.e^{\lambda i},$$
$$(2) \qquad w' - w = aa'.e^{-\lambda i},$$

équations où aa' et λ ont le sens que j'ai fixé précédemment.

([1]) C'est ce que, durant tout ce Cours, j'appellerai le *sens direct de rotation.*

Des deux équations précédentes découlent les deux qui suivent :

$$(3) \qquad \frac{u'-u}{w'-w} = e^{2\lambda i},$$

$$(4) \qquad (u'-u)(w'-w) = \overline{aa'}^2.$$

Je ferai remarquer, en terminant, que les formules précédentes subsistent même quand les points a et a' sont imaginaires, mais alors il est très délicat de fixer la valeur précise de l'angle λ.

La formule (4) seule peut être employée sans ambiguïté, car elle détermine le carré de la distance des deux points, carré qui a par lui-même une valeur parfaitement déterminée.

6. *Évaluation de la distance de deux points imaginaires.* — Soient deux points imaginaires A et B, et soient respectivement u, w et u', w' leurs coordonnées isotropes. Désignons de plus par aa' le segment représentatif du point A, et par bb' le segment représentatif du point B; autrement dit, posons $A = (a, a')$ et $B = (b, b')$.

La formule (4) du paragraphe précédent pouvant être employée même pour des points imaginaires, l'on a

$$\overline{AB}^2 = (u-u')(w-w').$$

Je remarque maintenant que, pour les deux points A et a, la coordonnée u a la même valeur; il en est de même relativement aux deux points B et b; cela résulte évidemment de la définition même des points a et b. Les points a et b étant réels, on peut leur appliquer la formule (1) du n° 5, et l'on a

$$u'-u = ab \, . \, e^{\lambda i},$$

ab étant pris en valeur absolue, et λ désignant l'angle dont il faut faire tourner la direction ab pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

De même les deux points A et a', ainsi que les deux points B et b' ayant respectivement pour la coordonnée w la même valeur, l'on a sans ambiguïté

$$w'-w = a'b' \, . \, e^{-\theta i},$$

$a'b'$ étant pris en valeur absolue, et θ désignant l'angle dont il

faut faire tourner la direction $a'b'$ pour l'amener à être parallèle à la direction positive de l'axe.

Des relations précédentes, on déduit immédiatement

$$(u'-u)(w'-w) = \overline{\mathrm{AB}}^2 = ab.a'b'.e^{(\lambda-\theta)i},$$

ou en posant $\lambda - \theta = \mu$,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = ab.a'b'.e^{\mu i}.$$

Il est clair que l'angle μ est l'angle dont il faut faire tourner la direction ab, autour du point a et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à $a'b'$.

On a donc la proposition fondamentale suivante :

Proposition. — *Étant donnés deux points imaginaires* $\mathrm{A} = (a, a')$ *et* $\mathrm{B} = (b, b')$, *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire dont le module est la racine carrée du produit des longueurs* ab *et* $a'b'$, *ces longueurs étant prises positivement, et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la direction* ab, *autour du point* a *et dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à* $a'b'$.

Remarque. — La proposition précédente s'applique évidemment au cas où l'un des deux points donnés est réel, les deux extrémités du segment qui le représente se confondant alors avec ce point lui-même.

7. Deux points A et B, réels ou imaginaires, étant donnés dans un plan, on peut, comme on vient de le voir, déterminer facilement et sans ambiguïté le carré de la distance AB.

Quant à la distance AB elle-même, elle n'est déterminée qu'au signe près; ou, si l'on veut, l'argument de la quantité imaginaire qui exprime sa valeur n'est déterminé qu'à un multiple près de π.

Un segment de droite isolé ne peut, en effet, comporter par lui-même aucun signe; mais, quand il se trouve sur une droite déterminée, réelle ou imaginaire, et quand on a préalablement fixé le sens que l'on est convenu de regarder comme positif sur cette droite, le segment a lui-même une valeur bien déterminée.

C'est à la détermination de cette valeur que je consacrerai la leçon suivante.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE [1].

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

I. — *Considérations générales sur la représentation des points imaginaires situés sur une courbe donnée.*

1. L'emploi des imaginaires en Géométrie ne donne lieu à aucune difficulté sérieuse. Les notions essentielles sur lesquelles il repose sont immédiatement fournies par la Géométrie analytique, et trouvent en elle leur entière légitimation. Ces notions puisées dans l'analyse, le rôle de la Géométrie est de les développer et d'en poursuivre les conséquences par les moyens et avec les ressources qui lui sont propres.

Il y a deux points sur lesquels il semble nécessaire de compléter la théorie. D'une part, on ne sait pas toujours *réaliser* et effectuer les constructions où entrent des données imaginaires, en sorte que certains problèmes, dont la considération des quantités imaginaires fournit une solution très simple et presque immédiate, ne sont en quelque sorte résolus que théoriquement, les constructions auxquelles conduirait le mode de démonstration employé n'étant pas immédiatement réalisables.

D'autre part, lorsque, dans une proposition, certaines parties de la figure deviennent imaginaires, la proposition donne lieu à plusieurs théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure. Tout

(1) Je me propose de développer, dans cette série d'articles, quelques points de la théorie des sections coniques que j'ai laissés de côté dans le Cours que j'ai professé à la salle Gerson. Le lecteur pourra consulter sur ces questions diverses Notes que j'ai publiées dans le *Bulletin de la Société philomathique* (1867-1869), et ma Note *Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* insérée dans le journal *L'Institut* (18 mai 1870).



théorème exprime, en effet, une relation entre les données, relation que l'on peut représenter par l'équation

$$R = 0;$$

si quelques-unes des données deviennent imaginaires, l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = 0,$$

ce qui entraîne les deux équations

$$P = 0 \quad \text{et} \quad Q = 0,$$

équations qui, évidemment, sont l'expression de deux théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure.

Pour résoudre complètement les questions que soulève l'emploi des imaginaires en Géométrie, il faut donc pouvoir, d'une proposition où certains éléments sont imaginaires, dégager, par une voie purement géométrique et la considération seule de la figure, les propositions *réelles* qu'elle comprend dans son énoncé.

On pourrait presque, à certains égards, dire que la Géométrie en est actuellement au même point où serait l'Analyse, si l'on se contentait de montrer que toute quantité imaginaire peut être mise sous la forme

$$a + bi,$$

sans indiquer les moyens que l'on doit employer pour la réduire à cette forme.

2. Considérons, dans un plan réel, une droite $O\omega$ que nous prendrons pour l'axe d'un système de coordonnées isotropes; considérons en même temps un système de coordonnées rectangulaires ayant pour axe des x la droite $O\omega$, l'axe des y étant la perpendiculaire élevée en O à la droite $O\omega$.

Soit A un point du plan, réel ou imaginaire, et soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i$$

ses coordonnées isotropes.

Ce point sera représenté dans le plan par un segment représen-

tatif aa', l'origine a de ce segment étant le point réel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par A.

En coordonnées rectangulaires, l'équation de cette droite est

$$y = i(x - \alpha - \beta i);$$

d'où l'on voit immédiatement que les coordonnées rectangulaires du point a sont

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta.$$

L'extrémité a' du segment est le point réel situé sur la droite isotrope du second système passant par A; cette droite a pour équation

$$y = -i(x - \gamma - \delta i);$$

donc le point a' a pour coordonnées

$$x = \gamma \quad \text{et} \quad y = -\delta;$$

d'où cette conclusion :

Étant donné un point A *dont les coordonnées isotropes sont*

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i,$$

l'origine de son segment représentatif a pour coordonnées rectangulaires

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

et les coordonnées de l'extrémité de ces segments sont

$$x = \gamma, \quad y = -\delta.$$

On peut dire, si l'on veut, que, dans le mode de représentation employé par Cauchy, l'origine du segment représente la quantité $u = \alpha + \beta i$, et que l'extrémité représente la quantité $\gamma - \delta i$ *conjuguée* de la coordonnée w.

3. Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de points distribués d'une façon quelconque dans le plan. Supposons maintenant que nous considérions des points situés sur une courbe donnée (C),

dont l'équation en coordonnées isotropes soit

$$(1) \qquad f(u, w) = 0.$$

Un point réel a, pris arbitrairement dans le plan, pourra toujours être considéré comme l'origine d'un segment représentatif d'un point situé sur la courbe.

Soient, en effet, α et β les coordonnées rectangulaires de ce point; faisons, dans l'équation (1), $u = \alpha + \beta i$; cette équation, résolue par rapport à w, nous donnera pour cette variable un certain nombre de valeurs; ce nombre étant, en général, égal au degré de la courbe, mais s'abaissant lorsque la courbe passe par les ombilics.

Soient $\gamma + \delta i$, $\gamma' + \delta' i$, ... les différentes valeurs de w qui correspondent ainsi à la valeur donnée de u; il est clair, d'après ce qui précède, que si l'on construit les points dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement γ et $-\delta$, γ' et $-\delta'$, ..., ces points, que je désignerai par a', a'', ..., pourront être considérés comme les extrémités d'autant de segments représentatifs de points situés sur la courbe, l'origine commune de ces segments étant le point a.

Pour abréger, je dirai que ces points a', a'', ... sont associés au point a; si, d'ailleurs, la courbe est réelle (et ici, comme dans la suite, j'entends simplement par là une courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est réelle), cette courbe ne peut contenir un point sans contenir aussi le point qui lui est imaginairement conjugué : donc, dans ce cas, si a' désigne l'un quelconque des points associés à un point donné a, a est aussi l'un des points associés de a'.

4. Pour étudier complètement une courbe, il importe de rechercher comment sont distribués dans le plan les segments représentatifs des divers points situés sur une courbe, ou, en d'autres termes, comment se déplace l'extrémité du segment représentatif d'un point de la courbe lorsque son origine se déplace elle-même dans le plan.

Divers géomètres allemands se sont occupés de la façon dont on pouvait représenter les points imaginaires d'une courbe, et ont émis à ce sujet des idées qui ont été reproduites par M. Transon

(*Application de l'Algèbre directive à la Géométrie; Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1858).

L'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires étant

$$F(x, y) = 0;$$

et ξ, η étant un des systèmes de solutions communes de cette équation, on représente, d'après la méthode de Cauchy, les quantités ξ et η par deux points a et b. Ces deux points déterminent, en effet, parfaitement le point de la courbe, et le mode de relation qui existe entre eux caractérise très bien cette courbe.

Mais on peut faire à cette solution les reproches suivants :

1° Un point réel de la courbe est toujours (si l'on excepte les points qui se trouvent sur l'axe des x) représenté par un couple de points séparés;

2° Le mode de représentation varie suivant le système d'axes que l'on a choisi.

Ce dernier inconvénient suffirait seul à faire rejeter en Géométrie ce mode de représentation; comme l'a très bien dit M. Transon, l'équation proposée ne représente plus, à vrai dire, une courbe comme dans le système de Descartes, mais un mode *de transformation* dont les propriétés se rattachent à celles de la courbe.

L'emploi du segment représentatif, défini comme je l'ai dit plus haut, remédie à tous ces inconvénients. En employant l'équation en coordonnées isotropes de la courbe et en représentant chaque couple de solutions (u, w) de cette équatiom par les points réels du plan, qui, dans la méthode de Cauchy, représentent la quantité u et la quantité imaginaire conjuguée à w, on voit :

1° Qu'un point réel de la courbe est représenté par ce point lui-même;

2° Qu'un point imaginaire est toujours représenté par le même segment, quels que soient les axes auxquels on ait rapporté la figure.

En réalité, ces axes ne jouent aucun rôle dans la question; l'étude de la distribution dans le plan des segments représentatifs des points d'une courbe est une étude de *pure géométrie;* et si, dans un grand nombre de questions, on peut avoir intérêt à se servir de l'analyse et à faire intervenir des axes coordonnés, les

résultats sont toujours indépendants du choix de ces axes, et leur emploi est par là même facilité.

Pour éclaircir ce qui précède, je mentionnerai ici immédiatement quelques propositions très simples et que l'on peut facilement démontrer par les considérations de la Géométrie les plus élémentaires. J'aurai lieu plus tard d'en développer les conséquences.

1° Étant donné un cercle réel, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur ce cercle, il faut et il suffit que les points a et a' soient réciproques par rapport à ce cercle;

2° Étant donnée une ellipse réelle, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur cette ellipse, il faut et il suffit que les deux points a et a' soient situés sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, et que la droite aa' soit parallèle à l'une des normales que l'on peut mener à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole.

Ces notions peuvent être encore présentées d'une façon plus nette et plus précise; mais comme leur développement m'éloignerait un peu du sujet que je traite ici, je renverrai le lecteur à ma Note *Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace*.

5. Lorsqu'un point est assujetti à demeurer sur une courbe donnée (C), on peut fixer sa position simplement par celle de l'origine de son segment représentatif.

Cette origine correspond, il est vrai, à plusieurs points de la courbe; en la désignant par a et en désignant par a', a'', ... les divers points associés à a, on voit en effet que (a, a'), (a, a''), ... désignent tous des points de la courbe, représentés par des segments ayant pour origine le point a.

Lors donc que l'on se donne le point a, on ne détermine pas complètement le point de la courbe qu'il représente. Cette indétermination peut être, comme on le sait, levée de plusieurs façons.

Considérons, avec Cauchy, un des points associés au point a, et soit a' ce point, en sorte que (a, a') désigne un des points de la courbe; si l'on admet que le point a se déplace en décrivant une courbe continue sans jamais passer par aucun des points auxquels correspondent deux points associés confondus en un même point,

l'extrémité du segment, dont l'origine sera le point mobile, sera elle-même bien déterminée sans ambiguïté, si l'on admet que le point de la courbe s'est déplacé lui-même d'une façon continue.

Ces points critiques qui, dans la théorie de Cauchy, jouent un rôle fondamental, sont, il est facile de le voir, les *points singuliers* et les *foyers* de la courbe.

Si l'on suppose que le point a, représentatif du point variable de la courbe, se meut dans un contour ne comprenant aucun des foyers ni des points singuliers de la courbe, le point de la courbe qu'il représente est parfaitement déterminé. Dans le cas contraire, pour savoir quel point il représente, il faut connaître le chemin qu'il a suivi dans son déplacement depuis sa position initiale.

On peut encore lever l'indétermination en supposant, avec Riemann, que le plan se compose d'une série de feuillets superposés. Ainsi, un point quelconque d'une ellipse peut être représenté par un point qui se meut sur deux feuillets appliqués sur le plan de l'ellipse et soudés entre eux le long de la ligne qui joint les deux foyers de la courbe.

Au *point de vue géométrique,* la conception de Riemann semble préférable à celle de Cauchy; mais, pour le moment, je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet, qui ne présente d'intérêt que dans les applications du calcul intégral à la Géométrie.

6. D'après ce qui précède, on voit qu'un point (réel ou imaginaire) situé sur une courbe donnée peut être représenté par un *seul point réel* de son plan; ce point est le point réel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par le point donné. Quand le point donné est réel, le point qui le représente se confond avec lui.

Nous pourrons nous représenter le déplacement d'un point sur une courbe, que les positions successives de ce point soient réelles ou imaginaires, par la courbe que trace dans le plan son *point représentatif,* déterminé comme je viens de le dire.

En général, on peut se représenter la façon dont varie une quantité z en fixant la valeur de cette quantité d'après la position qu'occupe un point mobile sur une courbe arbitrairement choisie du reste.

Lorsque la variable z prend des valeurs imaginaires, la position

du point mobile, qui détermine sa valeur, peut être, comme je l'ai dit, représentée par un point réel du plan, et la courbe décrite par ce point donne une idée très nette de la façon dont varie z.

Ces considérations se prêtent aisément à l'application du calcul intégral à la Géométrie.

Concevons en effet une courbe algébrique (C) et une intégrale dans laquelle la variable soit représentée par la position d'un point mobile sur cette courbe; supposons, par exemple, que l'élément de l'intégrale soit de la forme

$$P\,ds,$$

ds désignant un élément de la courbe et P une fonction dont la valeur ne dépend que de la position du point sur la courbe et nullement des axes auxquels on peut la rapporter.

On comprendra facilement que, pour étudier cette intégrale, il soit avantageux de considérer la variable comme représentée par la position d'un point mobile sur la courbe, au lieu de la représenter par la position d'un point mobile sur un axe auxiliaire que l'on introduit arbitrairement et sans qu'il joue un rôle quelconque dans la question.

Les intégrales *géométriques* dont je viens de parler ont un sens parfaitement net, indépendamment des axes auxiliaires que l'on peut employer pour la facilité des calculs; il est donc essentiel de pouvoir les traiter d'une façon purement géométrique, ou du moins, si l'on est obligé, dans l'emploi de l'analyse, à se servir d'axes coordonnés, d'employer un système de coordonnées qui laisse en évidence ce caractère géométrique des intégrales. C'est à quoi l'on parviendra par l'emploi des coordonnées isotropes.

Il résulte, du reste, des beaux travaux de Riemann et de M. Clebsch, que ces intégrales géométriques comprennent toutes les intégrales d'origine algébrique.

Les considérations qui précèdent sont, au fond, le développement des idées de Cauchy. L'illustre géomètre fixe la valeur de la variable par la position d'un point sur une ligne droite; lorsque ce point est imaginaire, il le représente comme nous par le point réel situé sur la droite isotrope du premier système que l'on peut mener par le point donné.

A chaque courbe, comme l'a montré M. Clebsch, se rattachent

un certain nombre d'intégrales qui jouent un rôle des plus importants dans la théorie de cette courbe ; il semble donc naturel, pour étudier ces intégrales, de fixer la valeur de la variable par la position d'un point mobile sur cette courbe elle-même.

II. — *Représentation des points situés sur une droite donnée.*

7. Considérons une droite réelle ou imaginaire tracée dans un plan. Supposons-la rapportée à un système de coordonnées isotropes, et soit $O\omega$ l'axe des coordonnées. Soit A un point mobile de la droite dont les coordonnées soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i;$$

comme je l'ai montré ci-dessus, les coordonnées de l'origine a et de l'extrémité a' du segment représentatif de A seront respectivement

$$x = \alpha, \qquad y = \beta,$$

et

$$y = \gamma, \qquad y = -\delta.$$

Soit a'' le point symétrique du point a' par rapport à l'axe $O\omega$, ses coordonnées seront

$$x = \gamma \qquad \text{et} \qquad y = \delta,$$

en sorte que, si nous adoptons pour un instant le langage de l'Algèbre directive, les longueurs Oa et Oa'' représenteront les deux coordonnées u et w.

Ces coordonnées sont liées entre elles par une relation linéaire que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$w = re^{\theta i}.u + m,$$

r et θ étant des quantités réelles et m une quantité imaginaire. Le vecteur Oa'' peut donc se déduire de Oa au moyen des trois opérations suivantes :

1° En multipliant le vecteur Oa par la quantité réelle r; cette opération a pour but de dilater tous les vecteurs dans un rapport constant, en sorte qu'après l'opération la figure formée par les points a'' est homothétique à celle formée par les points a;

2° En multipliant le résultat obtenu par $e^{\theta i}$; l'opération a pour résultat de faire tourner la figure précédemment obtenue autour du point O de l'angle θ;

3° En ajoutant au deuxième résultat obtenu la quantité m; le résultat de l'opération est de transporter la figure parallèlement à elle-même.

D'où cette conclusion :

La figure formée par les points a et la figure formée par les points a'' sont deux figures directement semblables.

Remarquons maintenant que la figure formée par les points a' est symétrique par rapport à l'axe Oω de la figure formée par les points a', a''.

D'où cette conclusion :

Si un nombre quelconque de segments représente des points situés sur une même ligne droite, le polygone formé par les origines de ces segments et le polygone formé par leurs extrémités sont deux polygones semblables et inversement placés.

Deux points suffisant pour déterminer une droite, la réciproque de cette proposition est évidemment vraie.

8. Les considérations qui précèdent mènent facilement à la solution de divers problèmes très simples que l'on peut se proposer sur les droites, mais que je développerai avec quelques détails, parce qu'ils me seront utiles par la suite.

Problème I. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'); étant donné un point réel quelconque du plan, si on le considère comme l'origine du segment représentatif d'un point de la droite, trouver son extrémité.*

Soit c le point donné; on construira le point c' tel que le triangle $a'b'c'$ soit semblable au triangle abc et inversement placé; le point c' sera le point demandé.

Problème II. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'), trouver le point réel situé sur cette droite.*

Soit x le point cherché; ce point étant réel, le segment qui le



représente est xx : les deux triangles xab et $xa'b'$ doivent donc être semblables et inversement placés.

Construisons le cercle lieu des points dont les distances à a et a' soient dans le rapport de ab à $a'b'$; construisons le cercle lieu des points dont les distances à b et b' soient dans le même rapport. Ces deux cercles se coupent en deux points réels x' et x''; on choisira celui de ces deux points qui, joint aux points (a, b) et (a', b'), donne deux triangles semblables *inversement* placés.

Problème III. — *Une droite étant définie par deux points* (a, a') *et* (b, b'), *et une autre droite étant définie par deux autres points* (α, α') *et* (β, β'), *trouver leur point de rencontre.*

Déterminons les extrémités des segments qui représentent des points de la deuxième droite et ont pour origine les points a et b (problème I); soient a'' et b'' ces extrémités; soit (x, x') le point d'intersection cherché.

Les points (a, a'), (b, b'), (x, x') étant en ligne droite, les triangles abx et $a'b'x'$ sont semblables et inversement placés.

Les points (a, a''), (b, b''), (x, x') étant aussi en ligne droite, les triangles abx et $a''b''x'$ sont aussi semblables et inversement placés.

Donc les triangles $a'b'x'$ et $a''b''x'$ sont semblables et semblablement placés. On construira les deux cercles lieux des points dont les distances à a' et a'', et à b' et b'' sont dans le rapport de $a'b'$ à $a''b''$. Ces deux cercles se couperont en deux points réels: on choisira de ces deux points celui qui, joint aux points (a', b') et (a'', b''), donne deux triangles semblables et *semblablement* placés. Ce point sera le point x'; au moyen du problème I, on en déduira le point x.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES

DANS LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Bulletin de la Société philomathique; 1870.

1. On sait, depuis les travaux de Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du plan considéré qui passe par l'un des points I et J; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel et n'en renferme évidemment qu'un; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée [1].

Si, par un point fixe, réel ou imaginaire, on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point fixe. Les droites ainsi obtenues sont situées sur un même

---

[1] Je dis que deux points sont imaginairement conjugués, lorsque leurs coordonnées, prises par rapport à un système d'axes réels quelconque, sont des quantités imaginaires conjuguées. Un point réel est à lui-même son conjugué.

Deux courbes sont imaginairement conjuguées, lorsque les équations de chacune d'elles se déduisent des équations de l'autre en changeant le signe du symbole imaginaire i.

Une courbe réelle est à elle-même sa propre conjuguée.

cône du second degré, que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant pour centre le point fixe et qui jouit de toutes les propriétés de la sphère. Ainsi, par exemple, toute section plane de ce cône est un cercle, et le centre du cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan.

Je désignerai sous le nom de *cône isotrope* le cône ainsi formé par toutes les droites isotropes qui passent par un même point. Tous les cônes isotropes coupent le plan de l'infini suivant une même conique, commune à toutes les sphères tracées dans l'espace et que l'on peut appeler l'*ombilicale*.

Par une droite, on peut généralement mener deux plans tangents à l'ombilicale; j'appellerai ces plans *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes, passant par une droite donnée, est coupé par un plan perpendiculaire à cette droite suivant deux droites isotropes. Par une droite isotrope, on ne peut faire passer qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

2. Ces définitions établies, concevons un point imaginaire de l'espace, a et le point a' qui lui est imaginairement conjugué. Par chacun de ces points passe un cône isotrope; les deux cônes ainsi obtenus se coupent suivant un cercle réel A, dont le plan est perpendiculaire à la droite réelle qui joint les deux points imaginairement conjugués a et a'; le centre de ce cercle est le point réel O, qui est le milieu du segment aa' et la distance Oa étant représentée par Ri, son rayon a pour valeur la grandeur réelle R.

Il est clair que les deux points imaginaires a et a' déterminent complètement le cercle A; réciproquement, étant donné le cercle réel A, par ce cercle on ne peut faire passer que deux cônes isotropes dont les sommets sont les points a et a'. La position de ce cercle dans l'espace détermine donc complètement ces deux points.

Je dirai que le cercle réel A, ainsi déterminé, est le *cercle représentatif* du couple de points imaginaires a et a', couple que je désignerai par la notation (A); réciproquement, le cercle A, déterminé comme précédemment par les deux points a et a', sera désigné par la notation (a, a').

Le cercle A ou (a, a') représente ainsi l'ensemble des deux

points imaginaires conjugués a et a'; dans certaines questions, il est nécessaire de pouvoir distinguer ces deux points l'un de l'autre. A cet effet, l'on peut imaginer que le cercle A soit décrit dans un certain sens par un point mobile; le sens dans lequel il sera supposé décrit déterminera celui des deux points a et a' dont il sera la représentation. Afin de fixer les idées, supposons que dans un système de coordonnées quelconque, mais d'ailleurs réel, les coordonnées d'un point m soient respectivement

$$x = a + \alpha i, \qquad y = b + \beta i, \qquad z = c + \gamma i;$$

le sens dans lequel on supposera décrit le cercle représentatif du point m sera tel qu'un spectateur, ayant l'œil placé à l'origine des coordonnées, voie le point mobile, décrivant le cercle, se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, suivant que la quantité $(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ est positive ou négative.

Il est évident d'ailleurs que si cette quantité a un signe donné pour le point a, elle aura le signe contraire pour le point imaginairement conjugué m' dont les coordonnées sont

$$x = a - \alpha i, \qquad y = b - \beta i, \qquad z = c - \gamma i.$$

3. Dans la plupart des recherches de géométrie, l'on a à considérer, par couples, des points réels ou qui ne sont pas imaginairement conjugués. J'étendrai à ces cas les notions établies précédemment. Ainsi a et b désignant deux points quelconques de l'espace, je désignerai par (a, b) le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets ces deux points; ce cercle sera généralement imaginaire et ne deviendra réel que dans le cas, examiné précédemment, où les points considérés sont imaginairement conjugués. De même, C désignant un cercle quelconque de l'espace, je dénoterai par le symbole (C) les deux points qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

4. Considérons dans l'espace une courbe géométrique quelconque, réelle ou du moins (pour le moment, je me restreindrai à ce cas de beaucoup le plus intéressant) définie par des équations réelles; c'est-à-dire telle que, lorsqu'elle passe par un point



imaginaire, elle passe également par le point imaginairement conjugué.

Étant donné un cercle réel de l'espace, ce cercle représente un couple de points imaginairement conjugués; et, pour que ces points appartiennent à la courbe donnée, il est nécessaire que le cercle satisfasse à certaines conditions déterminées par la nature de la courbe et dont l'étude forme, pour ainsi dire, un prolongement géométrique de la théorie de cette courbe elle-même. Pour éclaircir ces considérations générales et montrer les diverses questions auxquelles elles se rattachent, j'en ferai tout d'abord, et avec quelques détails, l'application aux courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, en m'appuyant sur les propriétés connues des surfaces *anallagmatiques*.

5. M. Moutard a appelé *surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* des surfaces qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de sphères mobiles qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leurs centres décrivent une surface du second degré; dans tout ce qui suit, je les désignerai simplement sous le nom de *surfaces anallagmatiques;* leur degré, qui est, en général, le quatrième, peut d'ailleurs s'abaisser au troisième, lorsque la surface lieu des centres des sphères mobiles est un paraboloïde, et même au second, puisque les surfaces du second degré sont comprises dans la famille des surfaces anallagmatiques.

La définition donnée ci-dessus peut être légèrement modifiée de la façon suivante. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P coupant cette sphère suivant un cercle C, on peut, par ce cercle, faire passer deux cônes isotropes. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points, qui, d'après ce que j'ai dit ci-dessus, pourraient être représentés par la notation (C), sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P et réciproquement que le plan P est le plan associé aux points p et p' [1].

Cela posé, on peut définir une surface anallagmatique donnée R,

---

[1] Voir *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868), ma Note sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.

comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S, des différents plans que l'on peut mener tangentiellement à une surface du second degré A. L'intersection des surfaces S et A est une biquadratique F qui est l'une des cinq focales de la surface; les quatre autres focales correspondant aux quatre autres modes de génération dont la surface est susceptible ([1]). En chaque point m de la surface anallagmatique, la normale passe par le point où le plan associé au point m touche la surface A.

Soit G une génératrice rectiligne de cette dernière surface, et soient a, a' les points où cette génératrice s'appuie sur la focale F. L'on voit facilement que, tandis que le plan mobile qui sert à décrire la surface se déplace le long de la droite G en tournant autour de cette droite, les points associés au plan tangent dans ses diverses positions décrivent un cercle; et ce cercle est précisément l'intersection des deux cônes isotropes ayant pour sommets les points a et a', cercle que nous pouvons désigner par la notation (a, a'). A chaque génératrice rectiligne de A correspond donc une génératrice circulaire de R; et, comme chacun des plans tangents à la surface A passe par une génératrice rectiligne de même système que G, l'on voit que la surface anallagmatique peut être considérée comme engendrée par les différents cercles correspondant aux génératrices du même système que G. Aux génératrices rectilignes de A, du système différent de celui de G, correspond un autre système de sections circulaires de R; les deux systèmes ainsi obtenus forment un groupe de cercles que, pour plus de clarté, je dirai appartenir au mode de génération défini par la focale F, ou simplement à la focale F. A chacun des quatre autres modes de génération de la surface correspond un autre groupe de cercles situés sur la surface et appartenant à la focale définissant le mode de génération considéré. L'on peut donc définir, de la façon suivante, les surfaces anallagmatiques au moyen de leurs sections circulaires.

Étant donnée une biquadratique sphérique F, si l'on fait passer par cette courbe une surface du second degré quelconque et si, pour chaque génératrice rectiligne d'un système donné de cette

([1]) *Voir* dans le *Bulletin de la Société philomathique* (janvier 1868) ma Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.



surface, on construit le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets les points où cette génératrice s'appuie sur la courbe, le lieu des cercles ainsi obtenus est une surface anallagmatique ayant F pour focale; et le système formé par ces cercles appartient à cette focale.

6. Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature de la surface A, non plus que sur sa position relative par rapport à la sphère S. Les génératrices rectilignes de A peuvent être imaginaires, ou bien, étant réelles, elles peuvent traverser la sphère et la couper en deux points réels. Dans ces deux cas les sections circulaires correspondantes de l'anallagmatique sont imaginaires. Pour qu'un cercle C, correspondant à une génératrice rectiligne, soit réel, il faut et il suffit évidemment que cette génératrice soit réelle et extérieure à la sphère; elle coupe alors cette sphère en deux points imaginairement conjugués de la focale F, et le cercle C est ce que j'ai appelé le *cercle représentatif* de ces deux points.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système de sections circulaires d'une surface anallagmatique, appartenant à une focale F *de cette surface, est réel, les points imaginaires représentés par ces cercles sont situés sur la courbe* F.

Si l'on imagine toutes les surfaces anallagmatiques qui ont pour focale une biquadratique sphérique donnée F et toutes les sections circulaires réelles de ces surfaces qui appartiennent à F, on obtiendra ainsi les cercles représentatifs de tous les points imaginaires de la courbe F. En effet, si un cercle C représente un point imaginaire de F, la droite réelle qui joint les points imaginaires (C), détermine avec la courbe F un hyperboloïde à une nappe, et cet hyperboloïde détermine une surface anallagmatique ayant F pour focale et passant par le cercle C. D'où la conclusion suivante :

« Pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires situés sur une biquadratique sphérique donnée F, il faut et il suffit que ce cercle soit situé sur une surface anallagmatique ayant F pour focale et qu'il appartienne au mode de description caractérisé par cette focale. »

7. La façon dont j'ai défini, § 5, les surfaces anallagmatiques, au moyen de leurs sections circulaires, s'étend d'elle-même au cas où ces surfaces ont un plan de symétrie; dans ce cas, l'une des sphères principales se réduit à un plan, ainsi que la surface du second degré correspondante, et les définitions que j'ai données précédemment, la définition comme enveloppes de sphères et la définition par points, deviennent illusoires. Mais, avant d'aborder ce sujet, il est nécessaire d'exposer quelques considérations très simples sur la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

Étant donnés un point quelconque a, réel ou imaginaire, et le cône isotrope ayant ce point pour sommet, il est clair que, par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques, ce cône isotrope se transforme en un autre cône isotrope ayant pour sommet le point qui correspond au point a. Si donc l'on a deux points quelconques a et b, au cercle (a, b) correspondra, après la transformation, le cercle (α, β), α et β désignant les points qui correspondent aux points a et b.

Imaginons une surface anallagmatique comme le lieu des différents cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... déterminés par les points où les génératrices d'une surface du second ordre aa', bb', cc', ... s'appuient sur un biquadratique sphérique F et effectuons sur cette figure une transformation par rayons vecteurs réciproques. La courbe F se transformera en une autre biquadratique sphérique Φ; sur cette courbe Φ, aux points a, a', b, b', ... correspondront des points (α, α'), (β, β'), ..., et la surface transformée de la surface donnée sera le lieu des cercles (a, a'), (b, b'), ... D'où l'on peut, en passant, tirer cette conséquence, que les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, ... sont, comme les droites aa', bb', cc', ..., les génératrices d'une même surface du second ordre.

Considérons maintenant une biquadratique sphérique F et une surface du second degré quelconque A, passant par cette courbe. Toutes les génératrices d'un même système de A, telles que aa', peuvent être obtenues en choisissant arbitrairement une génératrice ss' de l'autre système et en menant des plans par cette dernière génératrice. Ces divers plans couperont la sphère suivant des cercles passant par les deux points fixes s et s' et chacun de ces cercles coupera la courbe F en deux points variables a et a'

situés sur une même génératrice de A; le lieu des cercles (a, a') est l'anallagmatique définie par la surface A et la focale F; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, par deux points fixes s et s', d'une biquadratique sphérique F, *on mène un cercle variable rencontrant la courbe* F *aux deux points a et a', le lieu des cercles* (a, a') *est une surface anallagmatique ayant* F *pour focale.*

Transformons maintenant la figure précédente en prenant le pôle de transformation sur la sphère qui contient la courbe F; la surface anallagmatique donnée se transforme en une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan qui correspond à la sphère. La focale F se transforme en une anallagmatique plane Φ sur laquelle se trouvent les deux points σ et σ' correspondant aux points s et s'; et l'on obtient la proposition suivante :

Si, par deux points fixes σ *et* σ' *d'une anallagmatique plane* Φ, *on même un cercle variable coupant la courbe* Φ *aux points* α *et* α', *le lieu des cercles* (α, α') *est une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan de la focale* Φ.

Le second système de sections circulaires appartenant à la focale Φ s'obtiendrait facilement; en effet, étant mené par σ et par σ' un cercle quelconque coupant la focale en deux points α et α'; si, par ces deux derniers points, on mène un cercle variable rencontrant Φ aux points ρ et ρ', les différents cercles tels que (ρ, ρ') constitueront ce second système de sections circulaires.

Les plans des différents cercles tels que (α, α') ont pour trace, sur le plan de la focale Φ, les perpendiculaires élevées sur les segments $\alpha\alpha'$ en leur point milieu. Toutes ces perpendiculaires, il est facile de le voir, enveloppent une conique ayant pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique Φ [1]. D'où l'on peut conclure que quand une série de surfaces anallagmatiques a pour focale commune une anallagmatique plane, les traces des cylindres enveloppés par les plans des cercles de ces surfaces apparte-

---

[1] *Voir* dans les *Comptes rendus* (janvier 1863) ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes, etc.*

nant à cette focale, sur le plan de symétrie, sont des coniques homofocales ayant pour foyers communs les foyers singuliers de la focale.

8. La proposition précédente n'est, du reste, qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux anallagmatiques en général et que l'on peut établir très simplement.

Considérons une surface anallagmatique quelconque R, ayant pour focale une biquadratique sphérique F. Les plans des divers cercles de la surface, appartenant à cette focale, enveloppent un cône ayant pour sommet le centre de la sphère S, sur laquelle est située la focale; et ces plans sont perpendiculaires aux diverses génératrices de la surface du second degré A passant par la focale qui détermine la surface R. Pour trouver les droites focales de ce cône, je rappellerai que ces droites sont les intersections des divers plans isotropes qu'on peut lui mener tangentiellement. Or, les perpendiculaires à un plan isotrope, touchant l'*ombilicale* en un point donné ω, sont les diverses droites isotropes passant par ce point; aux plans isotropes tangents au cône correspondent donc des génératrices isotropes de A, et réciproquement. Une génératrice isotrope de A doit percer le plan de l'infini en un point de l'ombilicale, et aussi en un point de la trace de la surface A sur le même plan. Soit Ω l'ombilicale et a, b, c, d les quatre points où cette courbe rencontre la focale F; la surface A, passant par cette focale, sa courbe d'intersection avec le plan de l'infini est une conique passant par les points a, b, c, d, et il est clair que les génératrices isotropes de A sont les huit génératrices passant par ces quatre points. Les traces, sur le plan de l'infini, des quatre plans qui leur sont perpendiculaires et qui passent par le centre de la sphère sont les quatre droites menées tangentiellement à l'ombilicale par les quatre points a, b, c, d; les focales du cône sont donc les six droites conjuguées deux à deux qui joignent le centre de la sphère aux divers points d'intersection p, q, r, s, t, u des quatre tangentes. On voit que ces focales sont complètement déterminées par la focale F et ne dépendent en aucune façon de la surface particulière A. On peut donc énoncer cette proposition :

Si l'on considère une série de surfaces anallagmatiques homofocales, et si, pour chacune de ces surfaces, l'on con-

struit le cône enveloppé des cercles appartenant à l'une de ses focales, tous les cônes ainsi obtenus sont homofocaux.

J'ajouterai que les focales de ces cônes sont les focales singulières des cônes ayant pour base la focale de la surface anallagmatique considérée, et, pour sommet, le centre de la sphère sur laquelle cette courbe est située. Mais, pour abréger, je laisse de côté la démonstration de ce point de détail [1].

9. Je reviens maintenant au mode de description des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie, donné, § 7, pour montrer comment il s'applique aux surfaces du second ordre. Ces dernières s'obtiennent lorsque la focale, qui, en général, est une courbe anallagmatique plane, se réduit à une conique. Soit donc une conique quelconque C réelle (ou du moins ayant une équation réelle) et a, a' deux points fixes pris sur cette conique. Par ces deux points, menons un cercle quelconque coupant la conique en α et en α'; d'après ce qui a été dit ci-dessus, le lieu des cercles tels que (α, α') est une surface du second ordre ayant pour focale C. D'après un théorème élémentaire bien connu, toutes les droites telles que $\alpha\alpha'$ ont une direction fixe. On peut donc énoncer la proposition suivante qu'il serait très simple, d'ailleurs, d'établir directement :

Si l'on mène, dans le plan d'une conique, une série de droites parallèles à une direction fixe D, *en désignant par a et a' les deux points d'intersection de la conique avec une quelconque de ces droites, le lieu des cercles, tels que (a, a'), est une surface du second ordre ayant pour focale la conique donnée.*

Supposons que C soit une ellipse; imaginons toutes les droites réelles parallèles à une droite fixe D et extérieures à l'ellipse; chacune de ces droites rencontre l'ellipse en deux points imaginairement conjugués, représentés par un cercle réel; tous les

---

[1] *Voir*, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, ma Communication du 23 mars 1867 : *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré*, § 4.

cercles réels ainsi obtenus, quand la droite se déplace, constituent l'un des systèmes de sections circulaires d'un hyperboloïde à deux nappes ayant pour focale l'ellipse donnée. Si le système des droites considéré était parallèle à une droite D′ faisant avec le grand axe de l'ellipse un angle supplémentaire de l'angle que fait D avec ce même axe, les cercles représentatifs des points d'intersection de l'ellipse avec ces diverses droites constitueraient le second système de sections circulaires de l'hyperboloïde mentionné ci-dessus.

Si nous imaginons l'infinité d'hyperboloïdes à deux nappes, qui ont pour focale l'ellipse C, leurs diverses sections circulaires représenteront tous les points imaginaires situés sur cette ellipse. D'où l'on peut conclure le théorème suivant :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une ellipse donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.

De même :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une hyperbole donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un ellipsoïde ayant cette hyperbole pour focale.

10. Il existe, relativement au système de deux cercles situés sur une même sphère, une propriété très simple, qui a de fréquentes applications dans la géométrie de la sphère et dans la théorie des surfaces anallagmatiques. Je vais l'exposer brièvement, en supprimant la démonstration, d'ailleurs très facile à suppléer.

Soient deux cercles C et D situés sur une même sphère, et par conséquent se coupant en deux points. Le cercle C représente deux points de l'espace c et c', qui sont réciproques par rapport à la sphère et que l'on pourrait désigner par la notation (C); le cercle D représente de même deux points réciproques d et d'. Les quatre points c, c', d et d' sont d'ailleurs dans un même plan passant par le centre de la sphère. Cela posé, par les deux cercles donnés, on



peut faire passer deux cônes, et les sommets de ces cônes sont les deux points de rencontre respectifs des droites cd et $c'd'$ et des droites cd' et $c'd$.

Supposons les cercles C et D réels; supposons-les, en outre, décrits dans un sens déterminé, en sorte que chacun d'eux représente un point imaginaire et un seul; le point c, par exemple, étant représenté par le cercle C et le point d par le cercle D. La droite imaginaire cd est imaginairement conjuguée à la droite $c'd'$; ces deux droites étant dans le même plan se coupent en un point réel, que l'on peut définir comme étant le point réel situé sur cd; et, d'après ce que j'ai dit plus haut, ce point est le sommet d'un cône passant par C et D. Mais ici, l'on peut ajouter qu'un spectateur, dont l'œil serait placé au sommet du cône, verrait les cercles C et D décrits en sens inverse; en sorte que si le mobile, qui est censé décrire l'un d'eux, lui paraît se mouvoir dans le sens des aiguilles d'une montre, le mobile qui est supposé décrire l'autre lui paraîtra se mouvoir dans l'autre sens.

Cette dernière remarque est souvent utile pour fixer le sens que l'on doit effectuer à un cercle représentant un point imaginaire.

Considérons maintenant une surface anallagmatique R, définie par la surface du second degré A et la focale F située sur cette surface, et les deux systèmes de génératrices circulaires de l'anallagmatique appartenant à cette focale. Soit C un cercle fixe de l'un de ces systèmes, représentant deux points c et c' de la focale; soit D un cercle quelconque de l'autre système, représentant deux points d et d' de la focale. Les cercles C et D sont situés sur une même sphère, et l'on sait d'ailleurs que les droites cc' et dd' sont deux génératrices, de systèmes différents, de la surface A. D'après ce qui a été dit plus haut, les sommets des cônes qui passent par les cercles C et D sont les deux points r et s, où se coupent respectivement les droites cd' et $c'd$ d'une part, les droites cd et $c'd'$ d'autre part. Le lieu décrit par les sommets de ces cônes, lorsque, le cercle C étant fixe, le cercle D se déplace sur la surface R, est donc l'intersection des deux cônes ayant pour base la focale F et pour sommets les points c et c'. Ces cônes sont du troisième degré; leur intersection, qui est du neuvième degré, se compose d'abord de la génératrice cc', de la focale et du lieu cherché; ce dernier est donc du quatrième ordre.

D'où l'on peut conclure la proposition suivante :

Étant pris, sur une surface anallagmatique, un cercle quelconque appartenant à une focale F *de cette surface; par ce cercle et par un cercle quelconque* D, *du second système circulaire appartenant à cette focale, on peut faire passer deux cônes; le lieu décrit par le sommet de ces cônes, lorsque, le cercle* C *étant fixe, le cercle* D *se déplace sur la surface, est une courbe du quatrième ordre faisant partie de l'intersection des deux cônes, ayant pour base commune la focale* F *et pour sommets les deux points de cette focale que représente le cercle* C.

11. Dans ce qui précède, j'ai montré comment l'on peut déterminer les conditions géométriques auxquelles un cercle doit satisfaire, pour représenter un couple de points situés sur une biquadratique sphérique donnée, en groupant deux à deux les divers points de cette courbe, de façon qu'à l'ensemble de tous les couples de points, corresponde l'ensemble des génératrices circulaires d'une surface anallagmatique. Chaque mode de groupement est défini par une surface du second ordre, de telle sorte que deux points quelconques de la courbe, qui se correspondent, se trouvent sur une même génératrice de la surface.

Soit, en général, une courbe gauche géométrique quelconque G; imaginons une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices s'appuie en deux points sur cette courbe. Soient aa', bb', cc', ... les génératrices consécutives de cette surface; les cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... engendreront une autre surface, que je dirai *dérivée* de la courbe G. D'une même courbe donnée, l'on peut ainsi déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, et chacune de ces surfaces dérivées correspond à un certain mode de groupement des points de la courbe, défini par la surface réglée V.

Lorsque la courbe G est plane, les droites, telles que aa', bb', ..., qui joignent les points conjugués de cette courbe, ne forment plus une surface gauche, mais enveloppent une courbe plane, qui peut ainsi servir à définir le groupement des points. Dans ce cas, et lorsque la courbe G est d'un degré supérieur à deux, chacune des tangentes à l'enveloppe plane, rencontrant G

en plus de deux points, il est nécessaire de fixer ceux des points de rencontre que l'on doit grouper ensemble. Pour éviter cette difficulté, il est alors généralement préférable de définir chaque couple de points par d'autres considérations ne donnant lieu à aucune ambiguïté, comme je l'ai fait, § 7, en traitant des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie.

On peut toujours, d'ailleurs, sauf dans le cas très particulier où la courbe plane G est un cercle, effectuer une transformation par rayons vecteurs réciproques, de façon que cette courbe devienne une courbe gauche sphérique.

12. D'une courbe gauche donnée, on peut, comme je l'ai montré, déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, dérivées de cette courbe.

Réciproquement, étant donnée une surface quelconque à génératrices circulaires, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une certaine courbe gauche G. En désignant par C, C′, C″, ... les diverses génératrices circulaires de la surface, cette courbe est le lieu des points (C), (C′), (C″), ...; et la surface réglée V, qui détermine le mode de groupement des points de la courbe, est le lieu des axes des différents cercles.

13. Parmi l'infinité de surfaces dérivées d'une courbe gauche G, se trouve en particulier la *développable isotrope,* circonscrite à cette courbe; j'entends par là, la surface développable circonscrite à la fois à l'ombilicale et à la courbe donnée. Tous les points qui lui sont tangents sont, par conséquent, des plans isotropes, et ses génératrices, comme nous allons le voir, sont des droites isotropes.

Soit m un point quelconque de G; pour construire les génératrices de la surface développable isotrope qui passent en ce point, menons la tangente à la courbe en m, et soit t le point où cette tangente perce le plan de l'infini. Menons par t les deux tangentes à l'ombilicale Ω et soient a et b leurs points de contact. Les plans tma et tmb sont deux plans isotropes tangents à la courbe G et les génératrices correspondantes de la développable sont les droites isotropes ma et mb. Remarquons maintenant que, la droite ab étant la polaire du point t par rapport à l'ombilicale, le

plan mba est perpendiculaire à la tangente mt; les génératrices de la développable, qui passent au point m, sont donc les deux droites isotropes passant par ce point dans le plan normal à la courbe.

J'imagine maintenant une droite passant par le point m et par le point m', pris sur la courbe G, à une distance infiniment petite de m. Les cônes isotropes ayant ces deux points pour sommets se coupent suivant un cercle, dont le plan, perpendiculaire à mm', passe par le milieu de ce segment, et dont le rayon, égal à mm', est par conséquent infiniment petit. Le point m' venant à se confondre avec le point m, le plan du cercle d'intersection devient normal à la courbe au point m, le rayon de ce cercle devient nul et ce cercle se réduit à deux droites isotropes. Donc, quand une droite est tangente à une courbe gauche, le cercle, correspondant aux deux points de la courbe, qui sont réunis au point de contact, se compose des deux droites isotropes qui passent par ce point dans le plan normal à la courbe.

D'où cette conclusion : la développable isotrope, circonscrite à une courbe gauche, est la surface dérivée de cette courbe, lorsque la surface réglée, qui fixe le groupement de ses points, est la développable formée par les tangentes à la courbe.

Appliquons ces résultats à la recherche de la focale d'une courbe sphérique quelconque H; l'on sait, d'ailleurs, que cette focale est la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H.

En désignant par S la sphère qui contient cette courbe, pour qu'un point donné m soit situé sur une surface Σ dérivée de H, il est nécessaire et suffisant que le plan, associé au point m par rapport à la sphère S [1], coupe la courbe H en deux points situés sur une génératrice de la surface réglée γ, qui détermine le groupement de points correspondant à la surface Σ. Si l'on considère en particulier la développable isotrope, qui correspond à la développable ayant H pour arête de rebroussement, pour qu'un point m soit situé sur cette développable isotrope, il faut et il suffit que le plan associé au point m soit tangent à la courbe H.

---

[1] Sur l'expression *plan associé à un point,* voir § 5.

SUR

LA RÈGLE DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

1. Lorsque, dans une figure, l'on a à considérer des segments comptés sur une même droite, ou des angles ayant même sommet, tous les géomètres ont reconnu l'utilité et la nécessité d'affecter un signe à ces segments et à ces angles; le *Cours de Géométrie supérieure* de M. Chasles offre un exemple des nombreux avantages que l'emploi de la règle des signes a ainsi introduits dans la Science.

Mais, lorsque l'on considère des segments comptés sur des droites différentes ou des angles n'ayant pas le même sommet, il semble généralement admis que la règle des signes n'est plus applicable. M. Chasles, dans la Préface de son Cours, exprime formellement cette idée :

« Si l'on ne démontre ordinairement, dit-il (Préface de la *Géométrie supérieure,* p. IX), une formule ou une relation que par une certaine figure, et non dans l'état d'abstraction et de généralité qui permettrait, au moyen des signes + et — affectés aux segments et aux angles, pour marquer leur direction, de l'adapter à tous les états de la figure, il est facile d'en reconnaître la raison. C'est que les propositions qui forment le plus ordinairement les éléments de démonstration, dans la Géométrie ancienne, ne comportent pas l'application du principe des signes. Telles sont la proportionnalité des côtés homologues dans les triangles semblables, *celle encore de la proportionnalité, dans tout triangle, des côtés aux sinus des angles opposés. La règle des signes ne s'applique point à ces propositions, puisque les segments que*

l'on y considère sont formés sur des lignes différentes, et les angles autour de sommets différents. »

Je me propose de faire voir, dans cette Note, que, contrairement à l'idée émise par l'illustre géomètre, la règle des signes s'applique à tous les théorèmes de Géométrie sans exception.

Je me bornerai à examiner, sous ce point de vue, la dernière des propositions mentionnées dans la citation que j'ai reproduite ci-dessus. Les considérations très simples qui, dans ce cas, résolvent la question, s'étendent d'elles-mêmes à toutes les autres propositions; ce théorème, d'ailleurs, est l'un de ceux dont l'usage est le plus fréquent pour établir les relations qui existent entre des segments comptés sur des droites différentes, en sorte qu'il suffit presque d'établir, relativement à ce théorème, la règle des signes pour légitimer d'une façon générale l'emploi de cette règle.

2. Étant donnés un certain nombre de points situés sur une même droite, on peut assigner à cette droite un certain sens positif, en admettant qu'un point mobile, qui se mouvrait dans ce sens sur la droite, parcourt des longueurs positives. Cette assignation pourra, dans la plupart des cas, être faite arbitrairement; dans d'autres cas, au contraire, elle devra être faite d'une manière déterminée, en sorte que cette détermination elle-même sera une partie essentielle de la proposition de Géométrie que l'on aura à considérer.

Quoi qu'il en soit, cette assignation une fois faite, pour éviter toute confusion, je désignerai une droite sur laquelle on aura fixé le sens positif sous le nom de *direction*. Deux points A et B, se trouvant sur une direction donnée d, le segment AB a un signe parfaitement déterminé, et il est clair que ce signe change quand on change la direction de d.

Étant données deux directions a et b, l'angle (a, b) que fait la direction a avec la direction b est l'angle dont il faut faire tourner a autour de l'intersection des deux droites jusqu'à ce que les deux directions s'appliquent l'une sur l'autre et soient dirigées dans le même sens. Cet angle, on le voit, est déterminé, à un multiple près d'une circonférence entière; son sinus et son cosinus sont donc aussi parfaitement déterminés.

Étant donné l'angle (a, b) de deux directions, si l'une de ces

directions change de sens, l'angle est augmenté d'une demi-circonférence; par conséquent, le sinus et le cosinus de cet angle changent de signe.

3. Cela posé, nous pourrons énoncer de la façon suivante la proposition relative à la proportionnalité des côtés d'un triangle aux sinus des angles opposés.

Proposition. — *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on assigne arbitrairement un sens positif aux trois droites qui forment les côtés de ce triangle, et si l'on désigne par* a, b, c *les trois directions ainsi obtenues,* a *étant la direction qui renferme les côtés* B *et* C, *etc., on a les relations suivantes, qui comportent la règle des signes,*

$$\frac{AB}{\sin(a, b)} = \frac{BC}{\sin(b, c)} = \frac{CA}{\sin(c, a)}.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'assigner aux côtés du triangle une direction déterminée : on vérifie facilement l'exactitude des formules ci-dessus. On peut remarquer maintenant que l'on peut, sans qu'elles cessent d'être exactes, prendre un côté quelconque dans un sens inverse à celui que l'on considérait tout d'abord.

Supposons, par exemple, que l'on change le sens de la direction a; BC changera alors de signe, ainsi que $\sin(a, b)$ et $\sin(c, a)$; les autres quantités ne subissant aucun changement, l'on voit que, dans la série d'égalités précédentes, chaque terme aura changé de signe : l'égalité ne sera donc pas troublée.

4. La proposition précédente étant établie en toute rigueur, je m'en servirai pour démontrer la relation qui existe entre le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites et le rapport anharmonique des quatre points où ce faisceau est coupé par une transversale quelconque.

M. Chasles (*Géométrie supérieure,* § XIII), pour établir cette relation, emploie aussi la proposition précédente; mais comme, pour lui, elle ne comporte pas l'emploi de la règle des signes, il démontre d'abord par son moyen que les deux rapports anharmo-

niques ont la même valeur absolue ; il prouve ensuite, par une considération directe, qu'ils ont le même signe.

Il est facile de voir que le théorème de la proportionnalité des côtés aux sinus suffit pour la démonstration de l'égalité des deux rapports.

Soit un faisceau de quatre droites passant par un même point O ; assignons à chacune de ces droites un sens positif arbitraire, et soient a, b, c, d les quatre directions ainsi obtenues. Soient, de plus, A, B, C, D les points où une transversale quelconque coupe les droites de ce faisceau ; donnons à cette transversale un sens positif pris arbitrairement, et appelons ω la direction de cette transversale. Cela posé, en appliquant au triangle OAB la proposition énoncée ci-dessus, il viendra

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\sin(b, a)}{\sin(\omega, b)};$$

de même le triangle OAB donnera

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OA}} = \frac{\sin(d, a)}{\sin(\omega, d)},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\sin(b, a)}{\sin(\omega, b)} \cdot \frac{\sin(\omega, d)}{\sin(d, a)};$$

on aurait de même

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\sin(b, c)}{\sin(\omega, b)} \cdot \frac{\sin(\omega, d)}{\sin(d, c)},$$

d'où enfin

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} : \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\sin(a, b)}{\sin(a, d)} : \frac{\sin(c, b)}{\sin(c, d)},$$

égalité qui, ainsi que la proposition dont j'étais parti, comporte la règle des signes.

Il est à remarquer que la valeur du rapport anharmonique du faisceau de quatre droites donnée dans le second membre est indépendante du sens positif que l'on a assigné à ces droites ; car, si l'on prend en sens contraire l'une de ces directions, la direction a par exemple, $\sin(a, b)$ et $\sin(a, d)$ changeant à la fois de signe, leur rapport reste invariable.

5. Sans multiplier davantage les exemples, j'énoncerai la conclusion suivante :

« Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à des angles

situés d'une façon quelconque dans un plan est *convenablement et complètement énoncé,* il doit toujours comporter la règle des signes. »

Les divers théorèmes se distribuent en deux classes bien distinctes. Pour les uns, on peut choisir d'une façon arbitraire le sens dans lequel est prise la direction positive d'un certain nombre de droites, et alors le sens dans lequel on doit prendre les autres droites de la figure est déterminé par les théorèmes eux-mêmes, et cette détermination en est un élément essentiel : la façon dont elle est faite doit faire partie de l'énoncé lui-même de ces théorèmes.

Pour les autres, et ce sont les plus nombreux, le sens positif que l'on doit attribuer aux diverses droites de la figure est complètement arbitraire; et, si les théorèmes sont convenablement énoncés, ils doivent être vérifiés quelle que soit la façon dont on fasse cette attribution.

Les considérations qui précèdent ne sont pas sans doute de nature à trouver place dans l'enseignement élémentaire; leur introduction compliquerait souvent et inutilement les questions; néanmoins, comme elles tiennent à un point de doctrine souvent controversé, j'ai cru qu'il n'était pas inutile de les présenter.

SUR UNE PROPRIÉTÉ

RELATIVE AUX

COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE.

Bulletin de la Société philomathique; 1870.

Considérons une courbe tracée sur une surface quelconque et la normale dont elle est la directrice; en chacun des points de cette courbe concevons que l'on porte sur la normale, à partir de ce point, une longueur N, fonction de la position du point sur la directrice. Cela posé, si l'on considère un point quelconque M de cette courbe et un point infiniment voisin M', en désignant par V et V' les angles que font avec MM' les segments N et N' portés sur les normales en M et M', on trouve facilement que l'expression

$$\text{(1)} \qquad MM'(N\cos V + N'\cos V')$$

développée suivant la puissance croissante de ds, a pour valeur

$$\left[K\,ds^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{dK}{ds}\right)ds^4 + \text{des termes du degré supérieur au quatrième}\right].$$

D'où cette conclusion, que l'expression donnée ci-dessus est généralement du troisième ordre, mais que quand elle est d'un ordre supérieur au troisième, elle est au moins du cinquième.

Pour que K soit égal à zéro, il faut et il suffit que N satisfasse à l'équation différentielle

$$\text{(2)} \qquad \frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\tan g\,\omega} - \frac{d\sin\omega}{\sin\omega} + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho}.$$

Formule où $d\eta$ désigne l'angle de torsion au point donné, ρ le rayon de courbure et ω l'angle que fait avec la surface la normale principale en ce point.



On déduit de là

$$\mathrm{N} = \mathrm{C}\,\frac{\sqrt[3]{\rho}}{\sin\omega}\,e^{\frac{2}{3}\int\frac{\eta}{\tan\!\mathrm{g}\,\omega}}.$$

La valeur du segment N étant déterminée par la relation précédente, on aura alors cette proposition, que l'expression (1), en chacun des points de la courbe, sera une quantité infiniment petite du cinquième ordre.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = \frac{2}{3}\,\frac{d\eta - d\omega}{\operatorname{tang}\omega} + \frac{1}{3}\,\frac{d\rho}{\rho};$$

ρ désignant le rayon de courbure de la section normale tangente à la directrice.

Si la courbe considérée est une ligne de courbure ou une ligne géodésique, on a dans les deux cas

$$\frac{d\eta - d\omega}{\operatorname{tang}\omega} = 0.$$

La valeur de N est donc, dans les deux cas, proportionnelle à la racine cubique de ρ.

De là une propriété géométrique commune, on le voit, aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure pouvant servir à les définir et qui correspond à l'équation différentielle commune à toutes deux découverte par Joachimsthal.

Les quantités N définies par l'équation (2) jouissent de la propriété suivante :

Si, sur une surface, on considère les diverses courbes qui se touchent en un point M, pour toutes ces courbes l'expression

$$3\,\frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}\,ds} = 2\,\frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\omega} - \frac{3\,d\eta}{ds}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\omega} + \frac{d\rho}{\rho\,ds}$$

a une valeur constante au point considéré.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONES ALGÉBRIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1870.

1. Les propriétés des cônes algébriques, que je veux développer ici, résultent de l'extension à l'espace de quelques propriétés des courbes planes que j'ai publiées dans ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques,* et insérée dans les *Comptes rendus* (janvier 1865).

La propriété sur laquelle je m'appuierai peut s'énoncer ainsi :

« Si d'un point M situé dans le plan d'une courbe de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on joint le point M aux n foyers réels de cette courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation. »

D'où la conséquence suivante :

« Les choses étant posées comme dans la proposition précédente, le centre harmonique des points de contact des tangentes, relativement au point M, est le même que le centre harmonique des foyers réels relativement à ce même point. »

Je ferai observer que ces propositions subsistent encore évidemment quand, au système des n foyers réels, on substitue un système quelconque de foyers indépendants.

Les théorèmes précédents peuvent, dans le plan même, être généralisés de diverses manières. Je ne citerai ici qu'une des généralisations dont ils sont susceptibles.

Soient deux courbes A et B qui soient respectivement de classe m et de classe n, imaginons les mn tangentes communes que l'on peut mener à ces courbes et les mn droites qui joignent

chacun des foyers réels de A aux foyers réels de B; cela posé, l'on peut énoncer le théorème suivant :

Le faisceau formé par les mn droites dont je viens de parler et le faisceau formé par les mn tangentes communes ont même orientation.

D'où la conséquence suivante :

« Désignons par ab, $a'b'$, ... les tangentes communes, a et b désignant respectivement les points où la tangente ab touche A et B; désignons en outre par α, α', α'' ... les foyers de A et par β, β', β'', ... les foyers de B; cela posé, la moyenne harmonique entre les longueurs

$$ab, \quad a'b', \quad a''b''$$

est la même que la moyenne harmonique entre les longueurs

$$\alpha\beta, \quad \alpha'\beta', \quad \alpha\beta', \quad \ldots \text{ »}.$$

Pour l'expression de moyenne harmonique, je renverrai à ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure* (*Bulletin de la Société philomathique,* janvier 1867).

2. Soit un cône algébrique K de classe n ayant pour sommet le point S. Considérons les plans isotropes tangents à ce cône, je veux dire par là les plans tangents à ce cône qui sont en même temps tangents au cône isotrope ayant pour sommet le point S.

Le cône K étant supposé réel, ces plans passent deux par deux par n droites réelles qui suffisent complètement pour déterminer les plans isotropes tangents au cône.

Ces n droites sont les focales réelles du cône; il y a lieu, dans certains cas, de distinguer les focales ordinaires et les focales singulières; mais ici, cette distinction est inutile.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Si par une droite passant par le sommet d'un cône de classe n, on mène les n plans tangents à ce cône, et si l'on mène des plans par cette droite et les n focales réelles, le faisceau des plans tangents a même orientation que le faisceau des plans qui passent par les focales.

Deux cônes, ayant même sommet et circonscrits à deux surfaces homofocales, sont eux-mêmes homofocaux.

D'où cette conséquence :

« Étant données deux surfaces homofocales, les faisceaux de plans, qui passent par une même droite et sont respectivement tangents à chacune des surfaces, ont même orientation. »

3. Soit un cône réel K de degré m; le cône isotrope ayant même sommet le coupe suivant $2m$ génératrices; ces génératrices sont situées deux à deux dans m plans réels.

Je désignerai ces plans sous le nom de *plans cycliques* du cône.

Leur propriété principale est contenue dans la proposition suivante :

Si l'on coupe un cône par un plan quelconque passant par son sommet, le faisceau de droites communes au plan et au cône et le faisceau de droites suivant lequel le plan coupe les plans cycliques de ce cône ont même orientation.

4. La même proposition peut s'énoncer d'une façon un peu différente.

Soit une courbe plane C de degré m et un point S situé d'une façon quelconque dans l'espace. Le cône isotrope ayant pour sommet S coupe le plan de la courbe suivant un cercle qui a $2m$ points communs avec la courbe.

Si l'on suppose la courbe réelle, ces $2m$ points sont situés sur m droites réelles que je désignerai sous le nom de *droites conjointes de la courbe relativement au point* S, en employant une expression dont s'est déjà servi M. Chasles à peu près dans le même sens.

Cela posé, on a le théorème suivant :

Menons dans le plan de la courbe C *une droite quelconque; soient* a, a', a'', ... *les points où elle coupe la courbe, soient* b, b', b'', ... *les points où elle coupe les droites conjointes relatives au point* S; *le faisceau de droites ayant pour sommet le point* S *et passant par* a, a', a'', ... *et le faisceau de droites ayant même sommet et passant par* b, b', b'', ... *ont même orientation.*

Ces diverses propositions peuvent être considérées comme une extension de ce théorème bien connu de géométrie plane :

Si l'on mène une droite dans le plan d'une courbe algébrique, le centre des moyennes distances des points où elle coupe la courbe est le même que le centre des moyennes distances des points où elle coupe les asymptotes de la courbe.

5. Étant donnés un cône de degré m et les m plans cycliques, supposons que ces plans se coupent suivant une même droite D.

Cette droite jouit évidemment de la propriété suivante :

« Si l'on coupe le cône par un point quelconque passant par D, la somme des angles que font avec cette droite les génératrices d'intersection est nulle, quel que soit le plan sécant. »

Je dirai, dans ce cas, que la droite D est un axe de moyenne orientation du cône.

Un cône, en général, n'a pas d'axe qui jouisse de cette propriété ; les cônes du second degré, comme on le sait, en ont trois ; mais déjà ceux du troisième degré n'en ont que dans certains cas particuliers.

6. Étant donnée une courbe plane C du troisième degré, on peut faire passer par cette courbe une infinité de cônes du troisième degré qui aient un axe de moyenne orientation.

Il suffit, en effet, de construire des cercles coupant C en six points distribués deux à deux sur trois droites concourant en un même point, ou, en d'autres termes, de telle façon que les six points d'intersection soient en involution.

Étant donné l'un quelconque de ces cercles, construisons les sommets du cône isotrope qui passe par ce cercle ; chacun de ces points est évidemment le sommet d'un cône passant par C et ayant un axe de moyenne orientation.

Assujettir un cercle à couper une courbe de troisième ordre en six points en involution, c'est l'assujettir à une seule condition. Donc :

Étant donnée une courbe du troisième ordre, on peut, par cette courbe, faire passer une infinité de cônes ayant un axe

de moyenne orientation; les sommets de ces cônes sont situés sur une surface.

Je me propose, dans une Communication prochaine, d'étudier cette surface; je ferai seulement remarquer ici qu'elle contient nécessairement la focale de C, je veux dire la ligne double de la développable isotrope circonscrite à C.

7. Considérons une courbe de quatrième degré. Assujettir un cercle à la couper en huit points situés deux à deux sur quatre droites concourantes, c'est l'assujettir à deux conditions.

Donc :

Étant donnée une courbe du quatrième ordre, on peut, par cette courbe, faire passer une infinité de cônes ayant un axe de moyenne orientation; les sommets de ces cônes sont situés sur une courbe.

8. On verrait de même que, par une courbe du cinquième degré, on ne peut faire passer qu'un nombre limité de cônes ayant un axe de moyenne orientation.

Dans ce qui précède je n'ai, pour plus de clarté, parlé que des plans cycliques réels; mais il est clair que tout ce que j'ai dit s'applique à un système quelconque de plans cycliques indépendants.



SUR UN ARTICLE DE M. CAYLEY.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

M. Cayley attribue à M. Casey l'élégant théorème qui permet de construire la courbe de pénombre comme l'enveloppe d'une série de cercles; j'ignore dans quel Mémoire et à quelle époque M. Casey a énoncé cette propriété; je crois devoir toutefois rappeler que M. Moutard l'avait fait connaître dès 1862.

A cette époque, il avait énoncé la proposition suivante :

Toute anallagmatique du quatrième ordre (quartique bicirculaire de M. Cayley) *peut être considérée de quatre façons différentes comme l'enveloppe de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe, tandis que leurs centres décrivent des coniques; les quatre coniques au moyen desquelles on peut engendrer ainsi la courbe sont homofocales* (1).

J'ai démontré très simplement, dans une Note insérée au *Bulletin de la Société philomathique* sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré (mars 1867), que la projection stéréographique d'une courbe de cette espèce pouvait être, comme l'indique la proposition de M. Moutard, regardée comme l'enveloppe de cercles.

Je reproduis ici cette démonstration.

Considérons une courbe K résultant de l'intersection d'une sphère S, par une surface du second degré. On peut, par cette

(1) *Voir* la Note : *Sur les arcs des courbes planes et sphériques considérées comme enveloppes de cercles*; par M. Mannheim (*Journal de Liouville,* 1862) et ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes planes* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1865).

courbe, faire passer quatre cônes. Soient (C) l'un de ces cônes, c son sommet.

Le cône (C) étant l'enveloppe des divers plans qui lui sont tangents, la courbe K est l'enveloppe des cercles suivant lesquels ces plans tangents coupent la sphère. Les plans de ces cercles passant par le point c, ces cercles eux-mêmes coupent à angles droits le cercle Γ suivant lequel la sphère est coupée par le plan polaire de c. Les pôles des plans de ces cercles décrivent une conique G, qui est la polaire du cône (C).

La courbe K peut donc être considérée comme l'enveloppe de cercles qui coupent orthogonalement le cercle Γ, les pôles des plans de ces cercles décrivant une conique G.

Faisons maintenant une projection stéréographique de la figure.

La courbe K se projette suivant une courbe k, qui est l'enveloppe des cercles h suivant lesquels se projettent les cercles de la sphère dont l'enveloppe est K.

Ces cercles h coupent orthogonalement le cercle γ, projection de Γ; de plus, leurs centres décrivent la conique projection de G, en vertu du théorème bien connu de M. Chasles :

Si l'on projette un cercle stéréographiquement, le centre du cercle suivant lequel il se projette est la projection du pôle, par rapport à la sphère, du plan du cercle projeté.

La courbe K étant située sur quatre cônes du second degré, la proposition de M. Moutard se déduit immédiatement de ce qui précède.

Pour les développements auxquels peut donner lieu cette question, je renverrai le lecteur à la Note que j'ai citée plus haut.



EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. BOURGET.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1870.

Permettez-moi d'ajouter aux beaux théorèmes de Steiner et de M. Cremona, démontrés par M. Painvin, quelques propositions nouvelles, et fondamentales dans la théorie de l'hypocycloïde; elles se déduisent très facilement des théorèmes généraux que j'ai donnés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (*Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques,* janvier 1865), et dans le *Bulletin de la Société philomathique* (*Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes,* février 1867); j'en ai déduit, du reste, les principales conséquences relatives à l'hypocycloïde, dans le cours que j'ai professé cet hiver à la salle Gerson.

Les deux propositions fondamentales auxquelles donne lieu cette courbe sont les suivantes :

Théorème I. — *Les trois tangentes que, par un même point, on peut mener à l'hypocycloïde font, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, des angles dont la somme est un multiple de* π.

Théorème II. — *Si, par un point* P, *on mène trois tangentes à l'hypocycloïde, et si l'on désigne par* A, B, C *les trois points de contact; si, sur le prolongement d'une quelconque de ces trois tangentes* PA, *on prend un point* A′ *tel que* PA′ *soit le double de* PA, *les quatre points* P, A′, B, C *sont sur une même circonférence et partagent harmoniquement cette circonférence.*

Voici quelques conséquences de ces propositions :

Soit une droite touchant la courbe au point M, et la coupant

en P et R. Si l'on désigne par δ l'inclinaison de cette droite sur une quelconque des tangentes de rebroussement, et par ϖ l'inclinaison, sur cette tangente, de la tangente en P, on aura, en vertu du théorème I,

$$\delta + 2\varpi = \text{multiple de } \pi;$$

en désignant de même par ρ l'inclinaison sur cette tangente de la tangente au point R, on aura

$$\delta + 2\rho = \text{multiple de } \pi;$$

on déduit de là

$$2(\varpi - \rho) = \text{multiple de } \pi.$$

D'où l'on voit que

$$\varpi - \rho = 0, \quad \text{ou bien} \quad = \frac{\pi}{2}.$$

Deux tangentes à l'hypocycloïde ne pouvant être parallèles, on a

$$\varpi - \rho = \frac{\pi}{2}.$$

Donc les tangentes aux points P et R sont perpendiculaires entre elles.

Considérons maintenant les trois tangentes PA, PB et PC issues d'un même point P, et supposons que deux d'entre elles, PB et PC, soient rectangulaires; si nous prolongeons AP d'une longueur double d'elle-même au delà du point P, l'extrémité A' du segment ainsi obtenu sera sur la circonférence passant par les points P, B, C, et sur cette circonférence sera le conjugué harmonique du point P; mais, d'après les propriétés bien connues de la division harmonique sur un cercle, l'angle $\widehat{BPC}$ étant droit, la ligne BC est perpendiculaire sur PA', c'est-à-dire sur PA.

Donc, si deux des tangentes issues d'un point P sont rectangulaires, la corde des contacts de ces deux tangentes est perpendiculaire à la troisième tangente issue du même point.

Vos lecteurs trouveront peut-être quelque intérêt à rapprocher ces démonstrations géométriques des démonstrations analytiques données par M. Painvin.



On peut ajouter ici la proposition suivante, remarquable par sa simplicité et son élégance :

Si d'un point A *de l'hypocycloïde, on mène à la courbe la tangente dont le point de contact ne coïncide pas avec* A ; *en désignant par* T *le point de contact de cette tangente, si l'on prolonge* TA *d'une longueur égale à elle-même, le point* T', *extrémité de ce prolongement, est le foyer de la parabole qui suroscule en* A *l'hypocycloïde.*

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

RELATIF AUX

COURBES GAUCHES DU QUATRIÈME ORDRE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1870.

Étant données dans l'espace une surface du second ordre et deux droites fixes, M. Chasles a démontré que, si une droite mobile était assujettie à rencontrer les deux droites fixes en s'appuyant sur la surface, la courbe de contact des droites mobiles était une courbe gauche du quatrième ordre, de l'espèce de celles par lesquelles on peut mener une infinité de surfaces du second ordre.

Inversement, étant donnée une courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre, on peut se demander si elle peut toujours être engendrée par le procédé qui résulte de la proposition de M. Chasles, et, si elle peut l'être, comment l'on pourra déterminer une surface du second ordre et deux droites de façon à obtenir la génération de la courbe.

La Note qui suit a pour objet de résoudre cette question. Je montre que par la courbe donnée on peut toujours faire passer six surfaces qui permettent la génération indiquée par M. Chasles, et que, l'une des surfaces étant choisie, on peut encore choisir d'une infinité de façons les deux droites fixes.

La proposition suivante montrera comment on peut résoudre le problème que je m'étais proposé.

Par la courbe donnée passent quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre. Prenons arbitrairement deux arêtes opposées de ce tétraèdre et menons une droite quelconque qui, s'appuyant sur ces arêtes, rencontre la courbe en un point A : on sait alors qu'elle la rencontre en un autre point B.

Par la droite AB on peut mener quatre plans qui touchent la courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre; deux arêtes opposées de ce tétraèdre rencontrent les deux arêtes opposées du tétraèdre dont j'ai parlé plus haut et dont les sommets sont les sommets des quatre cônes. Soient CC′ et DD′ ces deux arêtes; C, C′, D et D′ étant les quatre points de contact avec la courbe.

Choisissons arbitrairement l'une de ces arêtes, CC′ par exemple; les quatre droites AC, AC′, BC et BC′ sont situées sur une même surface du second ordre S passant par la courbe donnée. Cela posé:

Si une droite mobile rencontre à chaque instant les droites AB et DD′ en s'appuyant sur la surface S, elle la touchera précisément le long de la courbe donnée.

Les propositions sur lesquelles je me suis appuyé pour la solution de ce problème se rattachent étroitement, comme je m'en suis aperçu en rédigeant cette Note, aux théorèmes donnés par M. Hesse dans son beau Mémoire *Sur les courbes du troisième ordre* (*Crelle,* t. 48); théorèmes qui, du reste, si l'on veut remonter plus haut, se trouvent, quant au fond, dans une Note très courte *Sur les focales* publiée par M. Van Reiss dans le Tome V du *Journal de Quetelet*.

Les surfaces réglées du quatrième ordre qui se présentent dans cette Note sont en elles-mêmes très intéressantes, et je les avais déjà rencontrées en étudiant certains théorèmes de M. W. Roberts relatifs aux surfaces du second ordre que j'ai pu, par leur moyen, étendre aux surfaces du quatrième ordre ayant une conique double.

Du reste, M. de la Gournerie s'était déjà auparavant occupé, d'une façon toute spéciale, de ces surfaces réglées; je n'en parlerai donc ici qu'accidentellement, en me contentant de mentionner la définition très simple que l'on en peut donner en s'appuyant sur la théorie des fonctions elliptiques, et je renverrai le lecteur curieux de poursuivre cette recherche, à l'Ouvrage très complet que M. de la Gournerie a publié à ce sujet.

1. Dans tout ce qui suit, je désignerai sous le nom de *biquadratique gauche,* ou simplement sous le nom de *biquadratique,* l'intersection de deux surfaces du second ordre.

Bien que toutes les propositions sur lesquelles je m'appuierai puissent s'établir facilement par des considérations de pure Géométrie (elles se déduisent immédiatement des relations très simples que M. Chasles a données dans sa *Géométrie supérieure,* p. 157, entre trois couples de points en involution et leurs points milieux), j'ai cru, pour abréger, pouvoir me servir de la belle théorie fondée par M. Clebsch.

En ce qui concerne les biquadratiques gauches, la théorie de M. Clebsch peut s'établir d'une façon très simple et très facile; mais, quoique la démonstration de ses formules, dans ce cas spécial, puisse donner lieu à quelques remarques dignes d'intérêt, je me contenterai de renvoyer le lecteur aux divers Mémoires qu'il a publiés sur ce sujet ([1]), en exposant brièvement ceux des résultats qu'il a obtenus, sur lesquels je m'appuierai.

2. Soit tracée, sur une surface du second ordre S, une biquadratique quelconque K. A cette courbe se rattache une intégrale elliptique ([2]); on peut concevoir que la valeur de la variable qui entre dans cette intégrale soit à chaque instant fixée par la position d'un point mobile sur la biquadratique, ou que le déplacement du point mobile de la courbe détermine la variation de la variable.

Étant pris, sur la courbe, un point arbitraire ω, qui corresponde à la valeur de la variable prise pour limite inférieure de l'intégrale; si le point mobile, qui fixe à chaque instant la valeur de cette variable, se meut sur la courbe jusqu'à un point donné A, on obtiendra pour l'intégrale considérée une valeur parfaitement déterminée. Cette valeur, cependant, ne sera pas entièrement déterminée par la seule connaissance du point A; elle dépend, comme on le sait, du chemin que l'on a suivi pour se mouvoir,

---

([1]) *Voir* notamment le Mémoire *Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie* (*Crelle,* t. 63).

([2]) Quand la courbe est tracée sur une sphère, cette intégrale prend une forme géométrique très simple; en désignant par M un point quelconque de cette courbe, par F, G, H, K ses quatre foyers réels, elle s'exprime de la façon suivante

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\text{MF}.\text{MG}.\text{MH}.\text{MK}}}.$$

sur la courbe, du point ω au point A ; et, d'après le chemin qu'on a suivi, la valeur de l'intégrale peut demeurer la même, ou être augmentée d'un multiple quelconque de l'une des deux périodes qui appartiennent à l'intégrale elliptique considérée. Dans tout ce qui suit, je désignerai constamment ces deux périodes par $2p$ et $2q$, en posant, pour abréger, $p + q = r$, $2r$ étant une autre période de l'intégrale dépendant des deux premières.

Lorsqu'on se donne la valeur de l'intégrale, prise à partir du point origine ω, le point A qui correspond à la valeur extrême de la variable est complètement déterminé ; mais, lorsqu'on se donne au contraire ce point A, la valeur de l'intégrale n'est déterminée qu'à un multiple près de $2p$ et de $2q$.

Cela posé, la proposition fondamentale donné par M. Clebsch, sur laquelle je m'appuierai dans tout ce qui suit, peut s'énoncer ainsi :

Si l'on coupe la biquadratique K *par un plan qui la rencontre aux points* A, B, C *et* D, *la somme des quatre intégrales dont les limites supérieures sont caractérisées par les points* A, B, C *et* D *est une quantité constante, quelle que soit la position du plan, ou, du moins, cette quantité ne peut varier que de multiples des deux périodes* $2p$ *et* $2q$.

Pour exprimer ce genre de relation, on peut employer avec avantage le signe de la congruence de Gauss, et écrire simplement

$$A + B + C + D \equiv \alpha \qquad (\mathrm{mod}\, 2p,\ 2q),$$

α désignant une quantité constante.

Comme jusqu'ici l'origine ω a été prise arbitrairement, rien n'empêche de la choisir de telle sorte que la constante α soit nulle ; en sorte que l'on aura simplement

$$A + B + C + D \equiv 0. \tag{1}$$

Dans cette congruence, A ne représente pas le point A, mais l'intégrale qui s'étend depuis l'origine fixe jusqu'à ce point. Il n'y a d'ailleurs lieu de redouter aucune confusion dans ce double emploi d'une même lettre pour représenter un point et une intégrale, la présence du signe de la congruence suffisant pour fixer le sens que l'on doit y attacher.



3. La congruence (1) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D de la biquadratique soient dans un même plan.

Soient A et B deux points donnés de cette courbe, il existe une surface du second ordre S, bien déterminée, qui passe par la courbe et qui a la droite AB pour génératrice. Si, par AB, on mène un plan quelconque rencontrant la courbe aux points X et Y, la droite XY est, comme on le sait, l'une quelconque des génératrices du second système de cette surface.

Or, d'après la relation (1), on a

$$X + Y + A + B \equiv 0 \qquad \text{d'où} \qquad X + Y \equiv -(A + B).$$

Si l'on pose, pour abréger, $A + B \equiv k$, l'on voit que, pour toutes les génératrices du système contraire à AB, l'on a

$$X + Y \equiv -k. \tag{2}$$

De même, si X et Y désignent les deux points où une génératrice de la surface S de même système que AB s'appuie sur k, on voit que l'on a la relation

$$X + Y \equiv k. \tag{3}$$

D'où cette conclusion : Si l'on prend, sur la biquadratique, une série de points X, Y satisfaisant à la relation (3), toutes les droites telles que XY sont les génératrices d'un système d'une même surface du second ordre passant par la biquadratique; et les droites XY, qui joignent les couples de points satisfaisant à la relation (2) sont les génératrices du second système de cette même surface.

On voit que chacune des surfaces du second ordre que l'on peut mener par K est caractérisée par une constante $\pm k$; je désignerai souvent l'une de ces surfaces par la valeur de la constante qui lui est propre, et l'on comprendra aisément ce que je veux dire par surface $(\pm k)$.

4. Parmi les surfaces du second ordre qui passent par K se trouvent en particulier quatre cônes. Soient X et Y les points où l'une des génératrices d'un de ces cônes s'appuie sur la courbe, cette génératrice et la génératrice infiniment voisine étant dans un



même plan, on doit avoir

$$2(X + Y) \equiv 0;$$

si l'on résout cette congruence, en observant qu'elle exprime que le second membre est non pas nul, mais un multiple quelconque de $2p$ et de $2q$, on en déduit les quatre solutions suivantes :

$$X + Y \equiv 0,$$
$$X + Y \equiv p,$$
$$X + Y \equiv q,$$
$$X + Y \equiv r;$$

dans la dernière congruence, j'ai posé, pour abréger, $p + q = r$.

Telles sont les relations qui caractérisent les quatre cônes du second ordre qui passent par K; j'appellerai O, P, Q, R les sommets de ces quatre cônes, en sorte que toute droite passant par le sommet O et s'appuyant en deux points de la courbe donnera lieu à la relation

$$X + Y \equiv 0.$$

De même, toute génératrice du cône ayant pour sommet Q donnera lieu à la relation

$$X + Y \equiv q.$$

5. Les points O, P, Q, R sont les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui passent par K. On peut grouper de trois façons différentes les arêtes de ce tétraèdre de façon que chaque groupe contienne deux arêtes opposées. Soient OP et QR les arêtes opposées correspondant à un mode de groupement, et X un point quelconque de la courbe K.

Menons la droite OX, elle rencontre la courbe en un deuxième point X′, et l'on a

$$X + X' \equiv 0;$$

joignons X′ au point P et appelons Y le point où la droite PX′ rencontre de nouveau la courbe. On a

$$X' + Y \equiv p.$$

Les deux points ainsi obtenus X et Y satisfont à la relation

$$X - Y \equiv p \quad \text{ou bien} \quad Y - X \equiv p.$$

Je dirai que ces deux points sont deux points conjugués de la biquadratique, relativement au mode de groupement défini par les arêtes OP et QR, ou bien par la demi-période p.

La droite XY qui joint deux points conjugués rencontre évidemment l'arête OP; on peut voir aussi facilement qu'elle rencontre l'arête opposée RQ. Joignons en effet X au sommet R, et soit X″ le point où cette droite coupe K; menons la droite X″Q, et soit Y″ le point de rencontre de cette droite avec K. L'on a évidemment

$$X + X'' \equiv r, \qquad X'' + Y'' \equiv q \qquad \text{d'où} \qquad Y'' - X \equiv q - r \equiv p.$$

Le point Y″, ainsi déterminé, se confond avec le point Y; ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi, la droite joignant deux points conjugués quelconques s'appuie sur les deux arêtes opposées du tétraèdre qui définissent le mode de groupement; réciproquement, toute droite s'appuyant sur ces deux arêtes, et rencontrant la courbe, la rencontre en deux points conjugués.

Si nous considérons une surface quelconque du second ordre S passant par K, les deux arêtes OP et QR sont des droites polaires réciproques, relativement à cette surface; l'une de ces droites la coupe donc en deux points réels ϖ et ϖ'. Deux points conjugués quelconques et les points ϖ et ϖ' sont dans un même plan qui coupe la surface suivant une conique divisée harmoniquement par les quatre points considérés.

6. Si l'on détermine tous les couples de points conjugués qui correspondent au mode de groupement caractérisé par les deux arêtes OP et QR, ou par la demi-période p, les droites joignant ces différents points forment une surface réglée ayant pour droites doubles les arêtes OP et QR; cette surface est évidemment du quatrième ordre; je la désignerai par la notation T_p.

Si l'on appelle Y et X les points où une génératrice quelconque de cette surface s'appuie sur la courbe, l'on a

$$Y - X \equiv p,$$

Il y a lieu de considérer deux autres surfaces de même espèce



caractérisées par les demi-périodes q et r; je les désignerai par T_q et T_r.

7. *A et B étant deux points quelconques de K, par la corde AB on peut mener quatre plans tangents à la courbe; les quatre points de contact sont les sommets d'un tétraèdre. Deux arêtes opposées quelconques de ce tétraèdre rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre* OPQR.

Appelons X l'un quelconque des points de contact des plans tangents cherchés, on a la relation

$$A + B + 2X \equiv 0;$$

d'où l'on déduit pour X les quatre valeurs suivantes :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} X' \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right), & X''' \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + q, \\ X'' \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + p, & X^{\text{IV}} \equiv -\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + r. \end{cases}$$

Considérons deux quelconques des arêtes opposées du tétraèdre XX'X''X''', par exemple les arêtes X'X'' et X'''X^IV; l'on a

$$X'' - X' \equiv p \qquad \text{et} \qquad X^{\text{IV}} - X''' \equiv p,$$

puisque $r \equiv p + q$.

La proposition est donc démontrée; les deux arêtes X'X'' et X'''X^IV sont deux génératrices de la surface T_p.

8. Supposons maintenant que la corde AB soit elle-même une génératrice de T_p, en sorte que l'on ait

$$(\beta) \qquad A - B \equiv p;$$

désignons toujours par X', X'', X''' et X^IV les quatre points de contact des plans que l'on peut mener par cette corde tangentiellement à la courbe. Des quatre arêtes du tétraèdre X'X''X'''X^IV, deux sont aussi des génératrices de T_p; ce sont les droites X'X'' et X'''X^IV.

Choisissons arbitrairement une de ces droites, X'X'' par exemple; il est facile de voir que les quatre droites AX', AX'', BX', BX'' sont des génératrices d'une même surface du second

ordre passant par K. Les congruences (α), qui déterminent X′, X″, X‴ et X^{IV}, donnent, en effet, si l'on tient compte de la relation (β),

$$A + X' \equiv B + X'' \equiv \frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad A + X'' \equiv B + X' \equiv -\frac{p}{2}.$$

Cette surface du second ordre est caractérisée par la constante $\pm \frac{p}{2}$; on voit qu'elle est la même, quelle que soit la génératrice AB de la surface T_p que l'on ait choisie. Je la désignerai dans ce qui suit par la lettre S_p.

Relativement à cette surface S_p, je dirai que les droites AB et X′X″ sont deux génératrices associées de la surface T_p.

Puisque les droites AX′, AX″, BX′ et BX″ sont des génératrices de S_p, l'on voit que deux génératrices associées sont des droites polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à S_p.

Si nous avions fait correspondre la droite $X'''X^{\text{IV}}$ à la corde AB, nous aurions démontré de même que les droites AX‴, AX^{IV}, BX‴ et BX^{IV} étaient les génératrices d'une même surface du second ordre passant par la courbe K et caractérisées par la constante

$$\pm\left(\frac{p}{2} + q\right).$$

Je désignerai cette deuxième surface par la notation $S_{p'}$.

Les droites telles que AB et $X'''X^{\text{IV}}$ seront dites des génératrices associées de T_p relativement à la surface $S_{p'}$.

La considération des surfaces T_q et T_r conduirait de même à la considération de quatre autres surfaces du second ordre S_q, $S_{q'}$; S_r et $S_{r'}$.

La propriété que j'ai signalée des six surfaces S_p, $S_{p'}$; S_q, $S_{q'}$; S_r, $S_{r'}$, à savoir : qu'à chacune d'elles correspond une surface réglée du quatrième ordre dont chaque génératrice s'appuie en deux points de K et qui est à elle-même sa transformée par polaires réciproques, lorsque l'on prend pour base la surface considérée, est caractéristique de ces surfaces.

Étant donnée une droite s'appuyant en deux points sur K et telle que sa polaire, par rapport à une surface de second degré passant par cette courbe, s'appuie aussi en deux points sur cette courbe, on démontrera facilement que cette droite est une géné-

ratrice de l'une des trois surfaces T_p, T_q et T_r, et que la surface du second degré est une des six surfaces que j'ai mentionnées et qui correspondent deux à deux à T_p, T_q et T_r.

9. LEMME. — *Étant données deux génératrices quelconques* G *et* G' *de la surface* T_p, *associées par rapport à la surface* S_p, *et deux génératrices quelconques* H *et* H' *de* T_p, *associées par rapport à* $S_{p'}$, *ces quatre droites et les arêtes* OP, OQ *sont toujours situées sur un même hyperboloïde.*

En effet, les droites H, H' et G, qui s'appuient toutes les trois sur OP et sur OQ, déterminent un hyperboloïde, dont l'intersection avec la surface T_p est une courbe du huitième ordre.

Les droites H, H', G, OP et OQ faisant partie de l'intersection et ces deux dernières devant, chacune, compter pour deux, puisqu'elles sont des droites doubles de T_p, la courbe d'intersection ne peut être complétée que par une sixième droite. Il s'agit de prouver que cette droite est précisément G'.

A cet effet, désignons respectivement par h, h_1; h', h'_1; g, g_1; x, x_1 les points où s'appuient sur la courbe K les droites H, H', G et la droite cherchée.

Les droites H et H' étant associées par rapport à la surface $S_{p'}$, l'on a

$$h - h_1 \equiv p, \qquad h' - h'_1 \equiv p, \qquad h' + h \equiv \frac{p}{2} + q;$$

a droite G et la droite cherchée étant des génératrices de T_p, l'on a aussi

$$g - g_1 \equiv p \qquad \text{et} \qquad x - x_1 \equiv p.$$

Maintenant, remarquons que les huit points h, h_1; h', h'_1; g, g_1; x, x_1 étant les points d'intersection de K avec une surface de second degré, on a, d'après les principes posés par M. Clebsch,

$$h + h_1 + h' + h'_1 + g + g_1 + x + x_1 \equiv 0.$$

On déduit facilement des relations précédentes

$$2x + g + g_1 \equiv 0.$$

D'où l'on voit que la droite cherchée xx_1 ne peut être que l'as-

sociée de G relativement à la surface S_p ou son associée relativement à la surface $S_{p'}$.

La dernière hypothèse ne peut être admise.

Considérons en effet les quatre droites H, H'; G et xx_1, qui sont quatre génératrices d'un même système de l'hyperboloïde.

Les droites de ce groupe ne font que s'échanger entre elles, lorsqu'on prend leurs polaires relativement à $S_{p'}$; l'hyperboloïde qui les contient devrait donc se transformer en lui-même en employant une transformation par polaires réciproques ayant pour base $S_{p'}$.

Ce qui est impossible, puisque l'hyperboloïde ne se confond pas avec $S_{p'}$.

L'hypothèse précédente étant donc écartée, il s'ensuit que la droite cherchée est la génératrice associée à G relativement à la surface S_p.

Ce qui démontre le lemme énoncé ci-dessus.

Corollaire. — *Prenons la trace de* T_p *sur un plan quelconque; soient* Π *et* Π' *les points où ce plan rencontre les arêtes* OP *et* QR, *ces points sont les deux points doubles de la courbe du quatrième ordre qui forme cette trace.*

Soient α et β les points où deux génératrices quelconques, associées par rapport à $S_{p'}$, coupent le plan sécant.

Désignons en général par x et y les deux points de la courbe où le plan sécant coupe deux génératrices mobiles de T_p associées par rapport à S_p; il résulte du lemme précédent que, quel que soit le couple de points x et y que l'on considère, ces deux points variables et les quatre points fixes α, β, Π et Π' sont sur une même conique.

10. Lemme. — *Étant donnés une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles* Π *et* Π', *et deux points fixes* α *et* β *pris sur cette courbe, si l'on mène par ces quatre points une conique quelconque, la droite qui joint les deux autres points* x, y, *où la conique variable rencontre de nouveau la courbe, enveloppe une conique.*

Joignons les points Π et Π' à un point E pris arbitrairement

dans l'espace et, par les droites EΠ et EΠ′, faisons passer une surface du second degré quelconque A. Le cône, ayant pour sommet E et pour base la courbe du quatrième degré, coupera cette surface suivant une biquadratique B. Soient a et b les projections coniques des points α et β sur la courbe B, X et Y les projections coniques des points variables x et y; les points α, β, x, y et Π, Π′ étant sur une même conique, il en résulte que les points a, b, X et Y sont dans un même plan. Comme, d'ailleurs, ils sont situés sur la biquadratique, l'on voit que la droite XY engendre dans l'espace une surface du second degré; les droites telles que xy, qui, dans le plan sécant, sont les projections des génératrices de cette surface, enveloppent donc une conique.

Corollaire. — De ce lemme et du corollaire précédent, il résulte immédiatement la proposition suivante :

Si l'on coupe la surface T_p *par un plan quelconque et si l'on désigne, pour un instant, sous le nom de* points associés de la courbe d'intersection, *les points de cette courbe qui appartiennent à deux génératrices de* T_p *associées relativement à* S_p, *les droites qui joignent deux points associés quelconques enveloppent une conique.*

11. *Si d'un point de l'espace* A, *on mène les différentes droites qui rencontrent deux génératrices de* T_p *associées entre elles par rapport à la surface* S_p, *ces droites forment un cône du second degré.*

En effet, pour trouver le degré du cône formé par ces droites, menons par A un plan quelconque M et cherchons combien ce cône contient de droites satisfaisant à la condition donnée.

Ces droites doivent évidemment passer par un couple de points associés de la courbe d'intersection de T_p avec le plan M; or les droites qui joignent ces points associés enveloppent une conique à laquelle on ne peut mener que deux tangentes par le point A. Le plan M ne contient donc que deux droites satisfaisant à la condition donnée; le lieu cherché est donc un cône du second degré.

12. Les surfaces réglées T_p et $S_{p'}$ ont quatre génératrices communes. En effet, les génératrices rectilignes de $S_{p'}$ se partagent,

comme on sait, en deux systèmes. En désignant par X et Y les points où l'une quelconque de ces droites s'appuie sur K, l'on a, pour les génératrices de l'un des systèmes, la relation

$$X + Y \equiv \frac{p}{2} + q;$$

je dirai que les génératrices qui donnent lieu à cette relation sont du premier système. Les génératrices du second système donnent lieu à la relation

$$X + Y \equiv -\frac{p}{2} - q.$$

Cherchons combien de génératrices de $S_{p'}$ du premier système peuvent appartenir à la surface T_p. Soit XY l'une quelconque d'entre elles; on devra avoir à la fois les deux relations

$$X + Y \equiv \frac{p}{2} + q \qquad \text{et} \qquad X - Y \equiv p;$$

d'où l'on déduit

$$2X \equiv \frac{3p}{2} + q,$$

relation qui fournit, pour X, les quatre valeurs suivantes :

$$X' \equiv \frac{3p}{4} + \frac{q}{2}, \qquad X'' \equiv \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2},$$
$$X''' \equiv \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2}, \qquad X^{\text{IV}} \equiv \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2};$$

les valeurs correspondantes de Y sont les quatre suivantes :

$$Y' \equiv \frac{3p}{4} - p + \frac{q}{2}, \qquad Y'' \equiv \frac{3p}{4} + \frac{p}{2},$$
$$Y''' \equiv \frac{3p}{4} + r + \frac{q}{2}, \qquad Y^{\text{IV}} \equiv \frac{3p}{4} + q + \frac{q}{2},$$

valeurs qui sont, deux à deux, égales à celles de X, comme on devait le prévoir.

Il résulte de là que T_p et $S_{p'}$ ont en commun deux génératrices du premier système, savoir :

$$X'Y' \quad \text{et} \quad X'''Y'''.$$

On a

$$X' + X''' \equiv \frac{p}{2};$$

donc les deux génératrices $X'Y'$ et $X'''Y'''$ sont associées relativement à la surface S_p.

Ce que j'ai dit des génératrices du premier système s'applique également aux génératrices du second système.

D'où la conclusion suivante :

Les surfaces T_p *et* $S_{p'}$ *ont quatre génératrices communes; deux d'entre elles sont d'un même système et sont associées relativement à la surface* S_p; *les deux autres appartiennent à l'autre système de génératrices et sont également associées relativement à la même surface.*

Il est clair que tout ce qui précède s'applique également à la surface S_p. Les quatre génératrices qu'elle a en commun avec la surface T_p sont deux à deux associées par rapport à $S_{p'}$.

13. Considérons maintenant un point quelconque M de la surface $S_{p'}$; les droites qui, passant par ce point, rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, forment, comme je l'ai montré, un cône du second degré.

Ce cône passe par les génératrices (M') et (M'') de la surface $S_{p'}$ qui se croisent au point M. En effet, il y a sur cette surface deux génératrices de même système que (M'), qui sont en même temps deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont rencontrées par (M'), qui se trouve ainsi sur le cône dont je viens de parler. On démontrerait de même que (M'') est située sur ce cône.

Remarquons, maintenant, que ce cône, ayant en commun avec $S_{p'}$ deux génératrices, le coupe, indépendamment de ces deux droites, suivant une section plane. D'où la conclusion suivante :

Si, par un point quelconque de la surface $S_{p'}$, on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p, ces droites forment un cône qui coupe $S_{p'}$ suivant une conique.

14. Cette proposition peut encore être énoncée de la façon suivante :

Étant donnée la surface $S_{p'}$, *passant par la biquadra-*

tique K, *appelons, pour un instant,* points conjugués *de cette courbe les deux points où une génératrice quelconque de* T_p *rencontre la surface; cela posé, si l'on prend un point* M *quelconque de* $S_{p'}$ *et si, par ce point et chacun des couples de points conjugués de* K, *on fait passer une conique située sur* $S_{p'}$, *le lieu du point de la conique conjuguée harmoniquement de* M, *par rapport au couple de points conjugués qu'elle contient, est une conique* (¹).

15. Supposons que le point M soit situé sur la courbe K, la conique dont je viens de parler passera également par ce point.

En effet, désignons par M′ un point infiniment voisin de M et situé sur la courbe K, par M″ le point conjugué de M′. Si, par les trois points M, M′, M″, on fait passer une conique située sur la surface $S_{p'}$, le point de cette conique harmoniquement conjugué de M, relativement au couple de points M′, M″, est infiniment voisin du point M.

La conique passe donc par ce point, et l'on pourrait même déduire de la démonstration précédente que son plan touche la courbe K; mais il est facile de déterminer d'une façon plus précise la position de ce plan.

Examinons de plus près quel est le lieu des droites passant par M et rencontrant à la fois deux génératrices de T_p associées par rapport à S_p.

Par le point M passe une génératrice de T_p; soient g cette génératrice et g' son associée. Toute droite passant par M et s'appuyant sur g' rencontre les deux génératrices associées g et g'; le plan qui contient le point M et g' fait donc partie du lieu cherché. On peut remarquer d'ailleurs que, les génératrices g et g' étant polaires réciproques relativement à la surface S_p, ce plan est précisément le plan tangent à cette dernière surface.

Ce plan faisant partie du lieu qui est en général un cône du

(¹) Cette propriété est caractéristique de la surface $S_{p'}$. Lorsque cette surface est une sphère, la courbe K jouit alors de propriétés particulières qui présentent quelque intérêt.

Voir dans le *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868) ma Note sur les Cassiniennes planes et sphériques.

second degré, le lieu doit se composer en outre, dans ce cas, d'un second plan.

Il est facile de voir que ce second plan est le plan tangent mené par M tangentiellement à la surface $S_{p'}$. Considérons en effet une des génératrices de cette surface qui passe par M, par exemple celle du premier système (M_1); comme je l'ai montré plus haut, la surface $S_{p'}$ contient deux génératrices du second système qui sont en même temps des génératrices de T_p associées par rapport à S_p; ces deux droites sont rencontrées par (M_1); le même raisonnement s'applique évidemment à la deuxième génératrice de $S_{p'}$ qui passe par le point M. Cela posé, le plan cherché ne peut être que le plan de ces deux génératrices, ou, en d'autres termes, le plan tangent en M à la surface $S_{p'}$.

D'où la conclusion suivante :

Si, par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *associées par rapport à la surface* S_p, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* $S_{p'}$.

De même :

Si, par un point quelconque M *de la courbe* K, *on mène les différentes droites qui rencontrent à la fois deux génératrices de* T_p *associées par rapport à la surface* $S_{p'}$, *ces droites sont situées dans le plan mené par le point* M *tangentiellement à la surface* S_p.

Propriété que l'on peut encore énoncer comme il suit :

Étant mené, par un point quelconque M *de la courbe* K, *le plan tangent à la surface* S_p, *toute droite de ce plan qui, passant par ce point, rencontre une génératrice de* T_p, *rencontre aussi la génératrice de cette surface qui lui est associée relativement à* $S_{p'}$.

16. Considérons maintenant la surface S_p et deux génératrices quelconques, h et h', de T_p associées par rapport à la surface $S_{p'}$, en sorte que h et h' soient des droites polaires réciproques relativement à cette dernière surface.

Je dis que si une droite mobile D est assujettie à rencontrer constamment les deux droites h et h' et à toucher la surface S_p, le lieu de son point de contact est la courbe K.

En effet, étant pris un point quelconque η sur la droite h, il résulte, de la définition même du mouvement de D, que par ce point passent deux droites satisfaisant aux conditions données; à ces deux droites correspondent d'ailleurs deux points de contact η' et η''.

Imaginons le cône circonscrit à S_p et ayant pour sommet le point η; la courbe de contact de ce cône, dont le sommet est sur la droite h, passe d'abord par deux points fixes qui sont les points où S_p est coupée par la polaire de h relativement à cette surface. Ces deux points fixes sont sur la courbe K; car cette polaire est la génératrice de T_p associée de h par rapport à S_p, et l'on sait que cette génératrice s'appuie sur deux points de K.

Abstraction faite de ces deux points fixes, la conique de contact rencontre K en deux points variables; en l'un de ces points α menons le plan tangent; ce plan coupe la droite h au point η; d'ailleurs la droite $\alpha\eta$, étant située dans le plan mené par α tangentiellement à la surface S_p et rencontrant h, doit rencontrer h'; le point α se confond donc avec l'un des deux points η' et η''.

Le lieu de ces derniers points est donc la courbe K.

D'où la proposition suivante :

Étant données la surface S_p *et deux génératrices quelconques de* T_p *associées relativement à la surface* $S_{p'}$, *si une droite mobile est assujettie à rencontrer constamment les deux génératrices et à toucher* S_p, *le lieu des points de contact est la courbe* K.

17. Il résulte de ce qui précède, qu'étant donnée une biquadratique quelconque K, on peut l'engendrer de la façon indiquée par le théorème de M. Chasles, au moyen d'une quelconque des six surfaces

$$S_p,\ S_{p'};\quad S_q,\ S_{q'};\quad S_r,\ S_{r'}$$

que j'ai précédemment définies.

Ayant pris une de ces surfaces, l'on peut encore choisir d'une

infinité de façons le couple de droites fixes qui, avec la surface, déterminent le mode de génération de la courbe.

18. Les surfaces réglées du quatrième ordre, que j'ai rencontrées dans cette recherche, T_p, T_q et T_r, ne sont autre chose, comme il est facile de le voir, que les surfaces étudiées précédemment par M. de la Gournerie, sous le nom de *quadricuspidales limites* (1).

Une telle surface contient deux droites doubles; T_p, par exemple, a pour droites doubles les deux arêtes OP et QR du tétraèdre conjugué formé par les sommets des quatre cônes qui passent par la courbe K.

Par chacun des points de l'une de ces arêtes passent deux génératrices de la surface; si l'on désigne respectivement par x et y les points où une quelconque de ces deux génératrices s'appuie sur OP et sur QR, on voit qu'à chaque position du point x correspondent deux positions du point y, et réciproquement. Les points x et y tracent donc, sur les droites doubles OP et OQ, ce qu'on peut appeler des *divisions homographiques du second ordre;* mais ici ces divisions sont d'une espèce particulière et jouissent d'une propriété remarquable entièrement caractéristique.

L'on a en effet cette proposition :

Étant donné un point x' situé sur la droite OP, *si y' et y'' désignent les deux points qui lui correspondent sur la droite* OQ, *les points y' et y'' ont pour correspondants le point x' et un autre et même point x''; de telle sorte que le point x'' a aussi pour correspondants les points y' et y''.*

M. Chasles, qui, le premier, a signalé ce mode de correspondance remarquable, a montré que, si elle avait lieu pour une position particulière du point x', elle avait lieu nécessairement pour toute autre position de ce point.

Appelons α et β les points où la droite OP coupe une quelconque des surfaces du second ordre V que l'on peut mener par K, et γ et δ les points où QR rencontre cette même surface. Les droites OP et QR étant polaires réciproques par rapport à cette

(1) Voir *Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques;* 1867, p. 85.

surface, γ et δ sont précisément les points de contact des plans menés par OP tangentiellement à V.

Les droites $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ et $\beta\delta$ sont des génératrices de cette surface, et chacune d'elles, rencontrant par suite en deux points la courbe K, en même temps qu'elle s'appuie sur les deux droites OP et QR, est une génératrice de la surface réglée T_p; il est clair maintenant qu'à chacun des points α et β de la droite OP correspondent les deux points γ et δ de la droite OQ.

La correspondance qui existe entre les points de division sur ces deux droites est donc de l'espèce particulière dont j'ai parlé plus haut.

La réciproque est évidente, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Si, sur deux droites fixes, on a deux divisions qui se correspondent de telle façon qu'à un point quelconque d'une des droites correspondent deux points de la seconde; si, en outre, le mode de correspondance est tel qu'un même couple de points de l'une des droites corresponde à deux mêmes points de l'autre, les droites joignant les couples de points correspondants forment une surface réglée du quatrième ordre de l'espèce de celles que M. de la Gournerie a désignées sous le nom de quadricuspidales limites.

19. Ces dernières surfaces sont une variété de surfaces réglées du huitième ordre, que le même géomètre a étudiées sous le nom de *quadricuspidales*.

Elles peuvent se définir très simplement de la manière suivante :

Considérons une biquadratique K et une surface réglée quelconque dont chacune des génératrices s'appuie en deux points sur la courbe. Soient X et Y les points où l'une de ces génératrices rencontre K, et X', Y' les points analogues pour la génératrice infiniment voisine : on peut se demander comment la surface doit être particularisée, afin que les droites XY' et X'Y soient des génératrices infiniment voisines d'une même surface du second ordre passant par K.

Faisons pour un instant

$$X' \equiv X + dX,$$
$$Y' \equiv Y + dY;$$



pour que XY' et $X'Y$ soient les génératrices d'une même surface du second ordre, on doit avoir

$$X + Y' \equiv Y + X',$$

ou bien

$$X + Y + dY \equiv Y + X + dX,$$

ou enfin

$$dY \equiv dX$$

et, en intégrant,

$$Y - X \equiv a,$$

a désignant une quantité constante.

La surface engendrée par une droite XY, s'appuyant sur la courbe K en deux points X et Y satisfaisant à la relation précédente, est la quadricuspidale; je dirai, pour abréger, que K est la base de la quadricuspidale.

Une propriété très simple et entièrement caractéristique de cette surface résulte immédiatement de la relation précédente.

Soient XY et $X'Y'$ deux génératrices quelconques d'une quadricuspidale, on a

$$Y - X \equiv a \qquad \text{et} \qquad Y' - X' \equiv a,$$

relations d'où l'on déduit

$$Y + X' \equiv Y' + X;$$

d'où la proposition suivante :

Étant données deux génératrices quelconques XY *et* $X'Y'$ *d'une quadricuspidale ayant pour base une biquadratique* K, *les deux droites* XY' *et* YX' *sont deux génératrices d'un même système d'une surface du second ordre.*

20. Soient deux génératrices infiniment voisines XY et $X'Y'$ d'une quadricuspidale G ayant pour base K; d'après ce qui précède, XY' et $Y'X$ sont les génératrices d'une même surface de second ordre passant par K.

Par XY menons un plan quelconque L et cherchons le point où ce plan est tangent à la surface G. A cet effet, projetons les deux génératrices sur un plan perpendiculaire au plan L; soient respec-

tivement ξ, η, ξ' et η' les projections sur ce plan des points X, Y, X' et Y'; τ le point d'intersection des deux droites $\xi\eta$ et $\xi'\eta'$, ω celui où se coupent les droites $\xi\eta'$ et $\eta\xi'$. Les points τ et ω ont évidemment pour limites les points de contact du point L avec la surface quadricuspidale et avec la surface du second ordre passant par K et par la droite XY; d'ailleurs on voit immédiatement, en considérant la figure formée sur la projection, que ces points limites divisent harmoniquement le segment $\xi\eta$.

On en conclut la proposition suivante d'un fréquent usage dans les applications :

Étant données une quadricuspidale ayant pour base une courbe K *et une génératrice* XY *de cette surface, si l'on considère en même temps la surface du second ordre qui passe par* K *et par* XY, *tout plan mené par cette dernière droite touche la quadricuspidale et la surface du second ordre en deux points qui partagent harmoniquement le segment* XY.

Soient L le plan mené par XY et Y, Z les deux points où ce plan coupe la courbe K; YZ est la deuxième génératrice de la surface du second ordre située dans le plan; le plan de rencontre T des droites YZ et XY est le point où se touchent ce plan et cette surface; son conjugué harmonique, relativement au segment XY, est donc, d'après ce qui précède, le point où le plan L touche la quadricuspidale.

21. Une quadricuspidale a quatre lignes doubles. En effet, soit XY une génératrice de cette surface; prenons un quelconque des sommets des cônes qui passent par la base K, le point O par exemple. Joignons X et Y au point O, et soient X', Y' les points où les droites ainsi obtenues rencontrent K; on a les trois congruences suivantes :

$$Y - X \equiv a, \qquad X + X' \equiv 0, \qquad Y + Y' \equiv 0,$$

d'où l'on déduit

$$Y' - X' \equiv a.$$

La droite Y'X' est donc une deuxième génératrice de la surface; appelons Ω le point d'intersection des droites YX et Y'X'. On voit que Ω est un point double de la surface; ce point, d'après la façon



même dont on l'a construit, est d'ailleurs évidemment dans le plan des trois sommets PQR. Lors donc que la génératrice XY se déplacera, il engendrera une ligne double de la surface située dans ce plan.

En considérant de même les autres sommets du tétraèdre OPQR, on verrait que la surface possède en tout quatre lignes doubles situées dans chacune des faces de ce tétraèdre.

La surface ne peut d'ailleurs avoir d'autre ligne double (sauf la base K); car, comme il est facile de le voir par un calcul très simple, $X'Y'$ et les trois droites analogues correspondant aux sommets P, Q et R sont les seules génératrices de la surface qui rencontrent une génératrice donnée XY, en outre de celles qui passent par les points X et Y eux-mêmes.

Revenons maintenant à la nature de ces lignes doubles.

Soit (Ω) la courbe décrite par le point Ω dans le plan PQR. Appelons ω le point de rencontre des droites XY' et YX'; joignons $O\omega$, et désignons par γ et γ' les points où cette droite rencontre XY et $X'Y'$.

D'après ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent, le plan OXY touche la quadricuspidale aux points γ et γ'; ce point est donc doublement tangent à la surface, l'arête de contact étant la droite $O\omega$. Le cône, enveloppé par ces plans tangents doubles, qui passent tous par O, est un cône du second degré; on le démontre facilement en faisant voir que, par toute droite telle que OX, on ne peut mener que deux plans tangents à ce cône.

Le point ω est la trace sur le plan PQR de l'arête $O\omega$ de ce cône; ce point se déplace donc sur une conique (ω).

Remarquons maintenant que la droite $\omega\Omega$ est la tangente à cette conique; en considérant la figure [1], on voit immédiatement que le segment $\omega\Omega$ est partagé harmoniquement par le cône qui a pour sommet O et pour base K.

D'où l'on conclut la proposition suivante :

Soient (ω) *la trace sur le plan* PQR *du cône doublement circonscrit à la surface ayant pour sommet le point* O, *et* (O) *la trace sur le même plan du cône qui, ayant le même sommet,*

---

[1] Le lecteur est prié de suppléer à la figure.

passe par la courbe K : *la ligne double de la quadricuspidale, située dans le plan* PQR, *peut s'obtenir en prenant, sur chacune des tangentes menées à la courbe* (ω), *le point conjugué harmonique du point de contact par rapport au segment intercepté sur la tangente par la courbe* (O).

22. Les surfaces quadricuspidales se présentent dans un grand nombre de questions relatives aux biquadratiques gauches ou aux courbes du troisième ordre.

Elles fournissent, par exemple, une solution très simple de ce problème que l'on rencontre dans l'application des fonctions elliptiques aux courbes du troisième ordre :

Étant donnée une courbe du troisième ordre C, *trouver des courbes telles que la tangente menée en un quelconque de leurs points soit partagée harmoniquement par le point de contact et par les trois points où elle coupe* C.

Ces courbes sont algébriques; on peut facilement les décrire dans le plan lui-même, mais la construction suivante se prête peut-être mieux à l'étude de leurs propriétés.

Prenons deux points quelconques de C et joignons-les à un point O de l'espace; par les deux droites ainsi obtenues, faisons passer une surface du second ordre A.

Le cône, ayant pour sommet O et passant par C, coupe A suivant une biquadratique K.

Imaginons une quelconque des surfaces quadricuspidales qui ont pour base K, le cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet O coupera le plan de C suivant une courbe jouissant de la propriété indiquée.

En considérant les diverses quadricuspidales qui ont pour base K, on obtiendrait la solution complète du problème.

23. Toutes les autres propriétés de la quadricuspidale se déduiraient également avec facilité de la définition très simple que j'en ai donnée plus haut.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet, me contentant de renvoyer le lecteur à l'Ouvrage déjà mentionné de M. de la Gournerie.



SUR UNE

PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques; 1871.

1. M. Bertrand a démontré depuis longtemps que les normales principales d'une ligne à double courbure donnée ne peuvent être les normales principales d'une autre ligne à double courbure, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la courbe donnée.

Les courbes gauches, qui jouissent de cette remarquable propriété, se présentent d'elles-mêmes quand on étudie la déformation des surfaces gauches.

Considérons une surface gauche; il est commode dans un grand nombre de questions de déterminer chaque point de la surface par sa position sur la génératrice rectiligne qui le contient, cette génératrice étant elle-même déterminée par le point où elle rencontre la ligne de striction et les angles qu'elle fait avec cette ligne.

Les formules propres à ce système de coordonnées s'établissent immédiatement. Je transcrirai seulement les suivantes.

Appelons :

σ la longueur de l'arc de la ligne de striction compris entre une origine arbitraire fixe et le point m, où la génératrice coupe cette ligne;

ρ le rayon de courbure de la ligne de striction au point m;

τ son rayon de torsion en ce point;

ω l'angle que fait la génératrice considérée avec la tangente à la ligne de striction;

θ l'angle que fait la normale principale au point m à la ligne de

striction avec la droite menée perpendiculairement à la génératrice dans le plan tangent à la surface en ce point;

dE l'angle infiniment petit de deux génératrices consécutives.

Posons, en outre, pour abréger,

$$\frac{dE}{d\sigma} = \frac{\sin\omega}{k}.$$

On a, entre ces diverses quantités, les deux relations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\sin\theta}{\rho} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\cos\theta}{\tang\omega}\frac{1}{\rho}.$$

2. Supposons maintenant que l'on déforme la surface de façon que les génératrices rectilignes demeurent des droites; la surface donnée se transforme en une autre surface gauche dont la ligne de striction est la transformée de la ligne de striction de la surface primitive.

Les quantités σ, ω et k conservent la même valeur pendant la déformation; les quantités variables θ, τ et ρ sont liées entre elles par les équations (1) et (2).

On peut se donner, par exemple, arbitrairement la valeur de θ en fonction de σ; on déduira alors des relations précédentes les valeurs de ρ et τ; la recherche de la nouvelle ligne de striction se ramènera à l'intégration d'équations aux différences ordinaires.

Si l'on élimine θ entre les équations (1) et (2), on obtient une équation différentielle entre ρ, τ et σ à laquelle doit satisfaire la ligne de striction, quelle que soit la déformation de la surface.

3. Supposons, en particulier, que la surface donnée soit un hyperboloïde de révolution; dans ce cas ω et k sont des quantités constantes dont la valeur détermine complètement la surface.

L'équation (1) donne alors

$$\frac{\sin\theta}{\rho} = 0.$$

Écartons le cas où l'on aurait $\rho = \infty$, et où, par conséquent, la

ligne de striction serait une ligne droite; on déduit de là

$$\sin\theta = 0;$$

l'équation (1) devient alors

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tang\omega}\,\frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

Les deux courbures de la ligne de striction sont ainsi liées par une relation linéaire, et l'on en déduit la proposition suivante :

De quelque façon que l'on déforme un hyperboloïde de révolution en conservant la rectitude des génératrices, la courbe en laquelle se transforme le cercle de gorge de l'hyperboloïde jouit de la propriété qu'en chacun de ses points il y existe une relation linéaire entre ses deux courbures.

4. Réciproquement, étant donnée une courbe jouissant de cette propriété, on peut mettre la relation qui existe entre les deux courbures sous la forme (3); les constantes ω et k déterminent un hyperboloïde; et l'on peut toujours déformer cet hyperboloïde de façon que son cercle de gorge se transforme en la courbe donnée.

La recherche des surfaces réglées développables sur un hyperboloïde de révolution est donc ramenée à la solution du problème suivant :

Trouver toutes les courbes gauches qui jouissent de la propriété signalée par M. Bertrand.

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LA CYCLIDE.

Bulletin de la Société philomathique, 1871.

I.

1. La cyclide a été étudiée d'abord par M. Dupin, qui en a découvert les principales propriétés; depuis elle a été le sujet des travaux d'un grand nombre de géomètres [1]. La cyclide est un cas particulier des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, et elle jouit de toutes leurs propriétés. Elle peut être définie ainsi qu'il suit: Étant donnée une conique K et un cercle C doublement tangent à cette conique, la cyclide est l'enveloppe des sphères dont les centres sont situés snr la conique K et qui coupent orthogonalement une sphère quelconque passant par C.

J'appellerai axe de la cyclide la droite Γ menée par le centre de C, perpendiculairement au plan de C et de K.

On sait que la cyclide peut encore être engendrée d'une façon analogue, au moyen d'une autre conique K′, ayant les mêmes foyers que la première et située dans un plan perpendiculaire à son plan, et d'un cercle C′ doublement tangent à K′; la corde des contacts est d'ailleurs l'axe Γ dont j'ai parlé ci-dessus. La droite Γ′ menée par le centre du cercle C′, perpendiculairement à son plan, se confond avec la corde de contact de C et de K; c'est le second axe de la surface.

2. Soit une sphère S arbitrairement tracée dans l'espace et M son centre; il est facile d'avoir son intersection avec la cyclide.

---

[1] Voir notamment dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1860), un Mémoire de M. Mannheim sur l'application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la cyclide.

En effet, par C faisons passer une sphère coupant orthogonalement S; son centre O sera par conséquent sur l'axe Γ. Considérons le cône ayant pour sommet le point M et pour base K, et menons par le point O le cône supplémentaire de celui-ci (c'est-à-dire le cône dont les génératrices sont perpendiculaires aux plans tangents menés au premier cône). Ce cône coupera la sphère S suivant l'intersection cherchée; remarquons maintenant que, si le centre de la sphère reste fixe, pendant que son rayon varie d'une façon arbitraire, ce cône supplémentaire reste identique avec lui-même et ne fait que se déplacer dans l'espace; qu'en outre, les considérations que j'ai développées au sujet de la conique K s'appliquent à la conique K'; on déduira de là facilement les conséquences suivantes :

« Étant données une cyclide et une sphère, ces deux surfaces se coupent suivant une courbe du quatrième ordre, suivant laquelle on peut mener quatre cônes, deux des sommets de ces cônes sont respectivement situés sur l'axe Γ et sur l'axe Γ'.

» Si, laissant le centre de la sphère fixe, on fait varier son rayon, les deux cônes, dont les sommets sont situés sur les axes, se déplacent parallèlement à eux-mêmes, en conservant la même forme, leurs sommets décrivant les deux axes de la surface.

» Si l'on coupe la surface par une sphère ayant pour centre un point d'une des coniques K et K', on peut par la courbe d'intersection faire passer un cône de révolution dont le sommet est sur l'autre conique.

» En particulier, si l'on considère une des sections circulaires de la surface, toute sphère qui la contient coupe la surface suivant un autre cercle; les cônes, qui passent par ces deux cercles ont leurs sommets sur les deux axes de la surface, à moins que les plans des cercles ne passent par l'une de ces droites (ce qui a lieu pour les cercles de courbure).

» Si l'on coupe la cyclide par un plan, la section est une anallagmatique qui a quatre pôles principaux de transformation; ces pôles sont les centres des cercles qui contiennent les seize foyers de la courbe; de ces pôles, l'un est situé sur l'axe Γ et l'autre sur l'axe Γ'. Les foyers singuliers de cette courbe sont les foyers de la projection sur le plan sécant de la conique K ou de la conique K'. »

3. La cyclide peut être considérée comme une anallagmatique, pour laquelle une des focales se réduit à un système de quatre droites isotropes (nécessairement situées sur une même sphère).

Soient, sur une sphère réelle (ou du moins dont l'équation est réelle), deux points M et M' imaginairement conjugués; par le point M passent deux génératrices G et H de la surface (ce sont des droites isotropes), par le point M' passent deux génératrices G' et H', imaginairement conjuguées des premières.

Toutes les surfaces anallagmatiques, ayant pour focale l'ensemble des quatre droites G, H, G' et H', sont des cyclides homofocales.

A cette focale se rattache un groupe de sections circulaires ([1]) qui se subdivise lui-même en un groupe (G) représentant les divers points des droites G et G' et en un groupe (H) représentant les points des droites H et H'.

D'un théorème général donné dans ma Note *sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace*, on peut déduire la proposition suivante qui s'accorde avec ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent :

Étant pris un cercle quelconque du groupe (G) *et un cercle quelconque du groupe* (H), *les deux cônes, qui passent par ces deux cercles, ont respectivement leurs sommets sur les axes* Γ *et* Γ'.

Les cercles des groupes (G) et (H) sont ceux suivant lesquels la surface est coupée par ses plans bitangents.

On peut remarquer que les axes de la surface sont la droite MM' et la polaire de cette droite relativement à la sphère qui contient les droites isotropes qui constituent la focale.

II

4. Ce qui précède conduit à un nouveau mode d'étudier la cyclide. Mais avant d'aborder ce sujet, je crois devoir rappeler quelques-uns des résultats obtenus dans la Note déjà citée sur

---

([1]) Voir dans *l'Institut*, et dans le *Bulletin de la Société philomathique*, avril 1870, ma Note : *Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace.*

l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace, et développer quelques points de détail qui s'y rapportent.

Un cercle réel, dans l'espace, détermine deux points imaginaires; ce sont les sommets des deux cônes isotropes qui passent par ce cercle; en fixant le sens dans lequel on suppose ce cercle décrit, il représentera d'une façon précise un de ces deux points.

Un point imaginaire, dans le plan, est déterminé par un couple de points réels; l'ordre dans lequel ces points doivent être pris est également déterminé.

Soit C un cercle quelconque de l'espace, que nous supposons décrit dans un certain sens, et qui représente un point imaginaire, a; projetons ce point sur un plan réel et soit α sa projection. Le point α sera représenté par un couple de points que l'on peut obtenir de la façon suivante :

« Supposons un spectateur placé au-dessus du plan de projection et à une distance très grande de ce plan, conservons seulement du cercle C la moitié dont le spectateur voit la partie convexe. Ce demi-cercle se projette sur le plan suivant une demi-ellipse; le sens dans lequel est décrite cette demi-ellipse est d'ailleurs déterminé par le sens dans lequel est décrit le demi-cercle dont elle est la projection.

» Cela posé, si l'on désigne par A et A′ les foyers de cette ellipse, A étant le foyer le plus rapproché de l'origine de la demi-ellipse que l'on a conservée et A′ le foyer le plus rapproché de son extrémité, le point α est représenté par le segment (A, A′). »

5. On peut se proposer d'étudier la façon dont sont distribués dans l'espace les points d'une droite imaginaire donnée, ou plutôt comment sont distribués les cercles représentatifs de ces points. Trois cercles pris arbitrairement dans l'espace (le sens dans lequel ils sont décrits est évidemment supposé donné) ne peuvent évidemment pas être pris arbitrairement.

Leurs projections sur un plan arbitraire devant être en ligne droite, de ce que j'ai dit dans le paragraphe précédent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

« Soient trois cercles (de sens bien déterminé) représentant trois points en ligne droite; si l'on projette ces cercles sur un plan quelconque, et si l'on désigne respectivement par a et a', b

et b', c et c' les foyers des coniques suivant lesquelles se projettent les cercles (ces foyers étant pris dans un ordre convenable), les deux triangles abc et $a'b'c'$ sont semblables et inversement placés.

» Réciproquement, si trois cercles jouissent de la propriété précédente par rapport à deux plans de projection, ils représentent trois points en ligne droite, et ils en jouissent par rapport à tout autre plan de projection. »

6. Pour étudier la distribution dans l'espace des points d'une droite imaginaire, appelons g cette droite, et g' la droite imaginairement conjuguée. Ces deux droites ne se rencontreront pas en général.

La droite sur laquelle se mesure leur plus courte distance est réelle.

Pour classer les points de la droite g, menons dans l'espace une droite arbitraire D; cette droite et les droites g et g' sont les génératrices du premier système d'un hyperboloïde réel R.

Considérons l'ensemble des génératrices du second système de cet hyperboloïde; chacune d'elles rencontre g en un point imaginaire représenté par un cercle réel et l'ensemble de ces cercles forme une surface S.

En donnant à la droite D toutes les positions possibles, on obtiendra une infinité de surfaces S, l'ensemble des génératrices circulaires de ces surfaces représentera les points de la droite g.

7. Je n'étudierai ici que le cas particulier où la droite g est une droite isotrope (il en est de même par conséquent de g').

Dans ce cas, la surface S est une cyclide : on peut, en effet, par g et g' faire passer une sphère qui a, en outre, en commun avec R, un autre couple de droites isotropes conjuguées h et h'.

Les cercles représentatifs des points de g donnent un système (G) de sections circulaires de la cyclide; les cercles représentatifs des points de h donnent un autre système (H) de sections circulaires de cette surface.

J'appellerai *droites focales* de la cyclide les droites réelles sur lesquelles se mesurent les plus courtes distances des droites g et g', h et h'.

8. Toutes les cyclides qui correspondent à la droite g ont

une droite focale commune ; leurs focales ont aussi en commun les deux droites g et g' ; je dirai que de telles surfaces sont des cyclides semi-homofocales.

Deux cyclides semi-homofocales se coupent (indépendamment de l'ombilicale et des droites g et g') suivant deux cercles ; car, soient D et Δ les deux droites qui les déterminent, les hyperboloïdes correspondants ont en commun deux génératrices du second système, qui déterminent deux cercles communs aux surfaces.

III

9. Considérons, en général, une courbe sphérique K réelle (ou plutôt résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface algébrique dont les équations sont réelles), et une surface réglée réelle R, telle que chacune de ses génératrices rencontre K en deux points différents.

A chaque génératrice rectiligne de R correspondent deux points α et α' de R, que l'on peut représenter par le cercle (α, α') qui résulte de l'intersection des deux cônes isotropes ayant respectivement pour sommets α et α' [1]. Le lieu des cercles correspondant ainsi aux différentes génératrices de R est une surface S que l'on peut dire dérivée de la courbe K.

Soient S et S' deux surfaces dérivées de K, au moyen des surfaces réglées R et R' ; l'intersection de S et de S' se composera d'abord d'un certain nombre de cercles ; car la surface R et R' ayant généralement un certain nombre de génératrices communes, chacune des génératrices communes fournit un cercle commun à S et S'. Outre ces cercles, la courbe d'intersection complète comprendra encore généralement une autre courbe V.

Il est facile de voir que, suivant chacun des cercles dont je viens de parler, les deux surfaces se coupent suivant un angle constant.

En effet, soit T une génératrice commune à R et R' et M un point quelconque du cercle correspondant, qui est commun à S et à S'. Le cône isotrope ayant pour sommet le point M coupe la

---

[1] Voir dans *l'Institut* et dans le *Bulletin de la Société philomathique*, avril 1870, ma Note *Sur l'emploi des imaginaires en géométrie*.

sphère, sur laquelle est située K, suivant un plan passant par T; soient β et β′ les points où ce plan touche respectivement les surfaces R et R′; d'après une propriété très simple que j'ai communiquée déjà depuis longtemps à la Société, Mβ et Mβ′ sont les normales menées par le point M à S et à S′.

Quand deux surfaces réglées ont une génératrice commune, tout plan passant par cette droite touche les deux surfaces en deux points qui, lorsque le plan se déplace, déterminent sur la droite une division homographique. Dans le cas actuel, on voit immédiatement que les deux points doubles de cette division sont les points α et α′ où T s'appuie sur K; d'après une proposition élémentaire bien connue, on en conclut que le rapport anharmonique des quatre points α, α′; β et β′ est constant.

Menons maintenant les droites Mα et Mα′, Mβ et Mβ′; le rapport anharmonique du faisceau est aussi constant, et, comme les droites Mα et Mα′ sont isotropes, il en résulte que l'angle β Mβ′ est constant.

10. De la proposition précédente, relative aux surfaces dérivées d'une même courbe sphérique, découlent quelques conséquences dignes d'intérêt.

Supposons que K soit une biquadratique sphérique, que R soit une surface de second degré et R′ une quadricuspidale ayant pour base K.

La surface dérivée S est alors une anallagmatique ayant K pour focale; S′ la coupe suivant quatre cercles correspondant aux quatre génératrices communes à R et R′. On voit immédiatement que le long de chacun de ces cercles les deux surfaces se coupent orthogonalement.

En effet, dans ma Note *Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre* insérée dans le *Journal de Liouville* (1870), j'ai démontré le théorème suivant:

Étant donnée une quadricuspidale ayant pour base la courbe K *et une génératrice αα′ de cette surface* (*α et α′ désignant les points où la génératrice s'appuie sur* K), *si l'on considère en même temps la surface du second ordre qui passe par* K *et par αα′, tout plan mené par cette dernière droite*

touche la quadricuspidale et la surface du second ordre en deux points qui partagent harmoniquement le segment $\alpha\alpha'$.

On en déduit immédiatement que l'angle $\alpha\alpha'$ est droit. L'intersection de S et de S' est complétée par une des lignes de courbure de S.

On a donc la proposition suivante :

Étant donnée une anallagmatique ayant pour focale la biquadratique sphérique K, *toute surface dérivée de* K, *au moyen d'une quadricuspidale ayant pour base* K, *coupe l'anallagmatique suivant une des lignes de courbure de cette surface et suivant quatre cercles; le long de ces quatre cercles, les deux surfaces se coupent orthogonalement.*

M. William Roberts avait déjà donné ce théorème pour les surfaces du second ordre; la surface dérivée de la quadricuspidale est, dans ce cas particulier, le lieu des génératrices circulaires d'un système de surfaces homofocales dont les plans passent par leur centre commun.

11. Considérons dans l'espace une droite isotrope g et la droite isotrope g', qui lui est imaginairement conjuguée. Ces deux droites sont situées sur une même sphère Σ qu'elles déterminent complètement.

Soient S et S' deux surfaces quelconques dérivées de g', elles jouiront des propriétés établies précédemment; il est facile de voir en outre que leur intersection complète se compose des cercles dont j'ai parlé. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Soient deux surfaces quelconques dérivées d'une droite isotrope, ces surfaces se coupent suivant un certain nombre de cercles et le long de chacun de ces cercles elles se coupent suivant un angle constant.

12. Soit D la droite réelle sur laquelle se mesure la plus courte distance des droites g et g'; si l'on donne à la figure un mouvement de rotation quelconque autour de D, g et g' restent immobiles.

On en conclut que, si S désigne une surface dérivée de g, et

si on la fait tourner autour de D de façon à lui faire occuper la position S_0, S_0 est une surface dérivée de g.

D'où la proposition suivante :

Étant donnée une surface quelconque S *dérivée des droites isotropes conjuguées* g *et* g', *si on la fait tourner, d'un angle quelconque, autour de la droite réelle* D *sur laquelle se mesure la plus courte distance de* g *et* g', *dans la nouvelle position la surface coupera la surface primitive suivant un certain nombre de cercles et le long de chacun de ces cercles les surfaces se couperont suivant un angle constant.*

Il est à remarquer que la droite D passe par le centre de la sphère Σ dont l'équation est réelle, mais qui n'est jamais réelle.

13. Ce qui précède donne une solution (renfermant une fonction arbitraire) du problème suivant :

Trouver une surface telle que, si on la fait tourner autour d'une droite fixe, la surface dans sa nouvelle position coupe la surface primitive sous un angle constant, quelle que soit la grandeur de la rotation effectuée.

Il est bien clair que la grandeur de l'angle varie avec la grandeur de la rotation et que la courbe d'intersection peut se composer de plusieurs courbes séparées, l'angle d'intersection variant d'une courbe à l'autre, mais demeurant le même le long de chacune d'elles.

Pour éviter les circonlocutions, lorsqu'une droite jouira par rapport à une surface de la propriété que je viens d'énoncer, je dirai, dans les paragraphes qui suivent, que la droite est un axe de rotation de la surface.

Nous avons obtenu une classe de surfaces ayant un axe de rotation ; il est facile d'en trouver une seconde.

En effet, soient tracés dans un plan un cercle C et une courbe arbitraire A. Chaque tangente à A rencontre C en deux points α et α' dont l'ensemble est représenté par le cercle (α, α') ; les divers cercles qui correspondent à toutes les tangentes que l'on peut mener à A, forment une surface B. Les cercles dont je viens de parler constituent un des systèmes de lignes de courbure de B.

Il est facile d'obtenir l'autre; menons, en effet, par C une sphère arbitraire, la développable circonscrite à cette sphère et à A touchera la sphère suivant une ligne de courbure de B; et en faisant varier le rayon de la sphère, on obtiendra toutes les lignes de courbure du second système.

Une surface telle que B pourrait être désignée sous le nom de *sphéro-cyclide,* vu que l'un de ses systèmes de lignes de courbure se compose de cercles et l'autre de courbes sphériques.

J'appellerai cercle directeur de la surface le cercle C, et axe de cette surface la droite menée par le centre de ce cercle perpendiculairement à son plan.

La sphéro-cyclide jouit d'une des propriétés de la cyclide que j'ai mentionnées plus haut : si on la coupe par une sphère, on peut toujours faire passer un cône par la courbe d'intersection; le sommet de ce cône est sur l'axe; si, le centre de la sphère restant fixe, son rayon varie, le cône qui passe par la courbe d'intersection ne varie pas de forme et se déplace parallèlement à lui-même, son sommet glissant sur l'axe.

14. On voit immédiatement que deux sphéro-cyclides ayant même cercle directeur se coupent suivant un certain nombre de cercles; le long de chacun de ces cercles, elles se coupent suivant le même angle; ce que l'on peut voir par une démonstration directe, ou en remarquant que chacun des cercles est une ligne de courbure pour les deux surfaces.

En particulier, si l'on fait tourner une sphéro-cyclide autour de son axe, la surface obtenue après la rotation sera une sphéro-cyclide ayant même cercle directeur que la première; on peut donc dire que :

L'axe d'une sphéro-cyclide est un axe de rotation de cette surface.

On a ainsi une nouvelle famille de surfaces, dont l'équation renferme une fonction arbitraire, et qui possède un axe de rotation.

15. La cyclide, en particulier, appartient à la fois aux deux familles de surfaces dont je viens de parler.

De ce que j'ai dit plus haut, on déduit immédiatement les conséquences suivantes :

« 1° Deux cyclides semi-homofocales se coupent suivant deux cercles et, le long de chacun de ces cercles, elles se coupent sous un angle constant.

» 2° Une cyclide a quatre axes de rotation ; ce sont ses deux axes et ses deux droites focales. »



SUR QUELQUES

PROPRIÉTÉS DES COURBES ALGÉBRIQUES

ET SUR LA DÉTERMINATION

DES RAYONS DE COURBURE DES SECTIONS PLANES

DES

SURFACES ANALLAGMATIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1871.

1. Considérons une courbe plane K; soient m le nombre des branches de cette courbe qui se croisent en chacun des ombilics du plan, et n le nombre des points distincts des ombilics où la courbe est rencontrée par la droite de l'infini.

Cette courbe a m foyers singuliers F_1, F_2, etc. Si un angle droit se meut de telle façon qu'un de ses côtés passe par un point fixe P du plan, tandis que son sommet décrit la courbe K, le second côté de l'angle enveloppe une courbe H, dont la classe est égale à $2(m+n)$.

Cette courbe (¹) a :

1° n foyers situés à l'infini et sur des directions perpendiculaires aux asymptotes de la courbe K qui ne sont pas isotropes;

2° Un foyer multiple au point fixe P, qui compte pour $(m+n)$ foyers;

3° m autres foyers G_1, G_1, etc. que l'on obtient en joignant le point P aux foyers singuliers de K, et en prolongeant d'une longueur égale à elle-même chacune des droites ainsi obtenues.

(¹) Voir dans le *Journal de l'Institut* et dans le *Bulletin de la Société philomathique* (nov. 1868), ma Note *sur quelques propriétés des courbes algébriques*, etc.

2. Soit M un point quelconque du plan; sur MP comme diamètre décrivons une circonférence. Cette circonférence rencontre K en $2(m+n)$ points d, et les $2(m+n)$ droites Md sont les tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe H.

En un de ces points d, menons le cercle qui, passant par P, touche K; le point T où ce cercle rencontre Md est le point de contact de cette droite avec H.

Je rappellerai ici le théorème que j'ai donné (*Journal de l'Institut* et *Bulletin de la Société philomathique,* février 1867 : *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*):

Si, par un point M *pris dans le plan d'une courbe plane de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, le centre harmonique du point* M *relativement aux n foyers réels est le même que relativement aux n points de contact.*

Si l'on applique le théorème précédent à la courbe H, en remarquant que l'on ne doit tenir aucun compte des foyers situés à l'infini, on trouve l'équatiou suivante :

$$\sum \frac{1}{\text{MT}} = m + n \frac{1}{\text{MP}} + \sum \frac{1}{\text{MG}},$$

équation symbolique, où

$$\frac{1}{\text{MT}}$$

désigne une grandeur géométrique égale en valeur absolue à l'inverse de MT et ayant pour direction la direction de cette droite.

3. Je me bornerai aux applications les plus simples de la formule précédente. Il serait facile de voir comment les résultats suivants peuvent s'appliquer à une courbe quelconque.

Supposons, en particulier, que la courbe K ne rencontre la droite de l'infini qu'aux ombilics, en sorte que l'on ait

$$n = 0.$$

Je désignerai, pour abréger, une telle courbe sous le nom de courbe cyclique.

Par une transformation facile on déduira de la formule précédente le théorème suivant :

Si l'on coupe une courbe cyclique par un cercle C *et si, en chacun des points d'intersection, on mène un cercle touchant la courbe et passant par un point fixe* P *pris sur* C, *le centre harmonique du centre de* C *relativement aux centres de ces cercles est le même que le centre harmonique du même point relativement aux foyers singuliers de la courbe et au point* P, *ce dernier étant compté* m *fois,* $2m$ *désignant le degré de la courbe.*

4. En particulier, le cercle sécant peut se réduire à une droite, et l'on a la proposition suivante :

Étant donnée une courbe cyclique de degré $2m$, *une droite quelconque la coupe en* $2m$ *points; si, en chacun de ces points, on mène un cercle qui touche la courbe et qui passe par un point fixe* P *situé sur la droite, le centre des moyennes distances des centres de ces* $2m$ *cercles est le point milieu de la droite qui joint le point* P *au centre de la courbe.*

Remarque. — J'appelle ici *centre* de la courbe les centres des moyennes distances de ces m foyers singuliers.

5. Pour abréger, dans ce qui suit, je représenterai par la notation

$$(a, b, c, \ldots)$$

le centre des moyennes distances des points a, b, c, ...

Cela posé, appliquons ce qui précède à une anallagmatique (courbe cyclique du quatrième ordre).

Étant données une anallagmatique et une droite qui la coupe aux points a, b, c et d, prenons sur cette droite un point quelconque m. Soient α, β, γ et δ les centres des cercles qui, passant par le point m, touchent l'anallagmatique aux points donnés.

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, l'on a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (m, \mathrm{C}) = (2m, 2\mathrm{C}),$$

C désignant le centre de l'anallagmatique, c'est-à-dire le point milieu de la droite qui joint ses deux foyers singuliers.

Supposons que le point m se confonde avec le point a, α se confond aussi avec ce dernier point, et l'on a

$$(m, \beta, \gamma, \delta) = (2m, 2C),$$

d'où

$$(\beta, \gamma, \delta) = (m, 2C).$$

Si maintenant la droite donnée touche l'anallagmatique au point m, il est clair que le point β devient le centre μ du cercle osculateur de la courbe au point m; on a donc, γ et δ désignant les centres des cercles qui passent par m, et touchent l'anallagmatique aux deux points où elle est coupée par la tangente en m,

$$(\mu, \gamma, \delta) = (m, 2C);$$

soit i le point milieu du segment $\gamma\delta$, on aura

$$(\mu, 2i) = (m, 2C).$$

D'où cette conclusion :

« Soit C le centre d'une anallagmatique, la tangente en un point m de cette courbe la rencontre de nouveau en deux points c et d; soient γ et δ les centres des cercles qui, passant par le point m, touchent la courbe en c et d et i le point milieu du segment $\gamma\delta$; cela posé, si, par le point m, on mène une droite parallèle à iC, dirigée dans le même sens et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de l'anallagmatique au point m ».

6. Appliquons ce qui précède aux surfaces anallagmatiques (du quatrième ordre); je m'appuierai principalement sur la propriété suivante :

En appelant *centre d'une surface anallagmatique* le centre commun aux trois coniques qui constituent ses focales singulières, toute section plane de la surface est une anallagmatique plane ayant pour centre la projection sur le plan sécant du centre de la surface.

Cela posé, soient M un point de cette surface et une tangente MT passant par ce point; soient P et Q les points où cette droite rencontre de nouveau la surface, p et q les centres des sphères qui, passant par le point M, touchent la surface en P et Q.

Si par la droite MT nous menons un plan sécant quelconque, il coupe la surface suivant une courbe à laquelle on peut appliquer les théorèmes précédents; remarquons maintenant que le centre de cette courbe est la projection sur le plan sécant du centre de la surface, que les centres des cercles qui, passant par le point M, touchent la courbe en P et Q, sont les projections des centres des sphères, qui passent par le point M et touchent la surface en P et Q.

D'où les propositions suivantes :

Théorème I. — *Étant donnée une surface anallagmatique et une droite qui la rencontre aux points a, b, c, d; soit pris sur cette droite un point quelconque* M; *soient, de plus,* α, β, γ *et* δ *les centres des sphères qui, passant par* M, *touchent la surface en* a, b, c *et* d.

Le centre des moyennes distances des points α, β, γ *et* δ *est le point milieu de la droite qui joint les deux points* M *et* C, C *désignant le centre de la surface.*

Théorème II. — *Soient* M *un point quelconque d'une surface anallagmatique et une droite quelconque* MT *qui touche la surface en ce point; la droite* MT *rencontre la surface en deux points distincts du point* M; *soient* α *et* β *les centres des sphères qui, passant par le point* M, *touchent en ces deux points la surface, et* I *le milieu du segment* $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, *on mène une droite parallèle à* IC, *dirigée en sens inverse et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans la surface par le plan normal passant par* MT.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Bulletin de la Société philomathique; 1872.

I. — *Considérations préliminaires.*

1. Je me propose, dans cette Note, d'étendre au cas de l'espace et de développer les considérations que j'ai exposées d'une façon succincte dans mon *Mémoire de géométrie analytique* inséré dans le *Journal de Liouville* (janvier 1872).

Considérons, dans l'espace, une figure rapportée à un système quelconque de coordonnées rectangulaires, x, y et z étant les coordonnées par rapport à ce système d'axes d'un point M de la figure. S désignant une surface algébrique quelconque de classe n, si l'on imagine le cône circonscrit à cette surface et qui a pour sommet le point M, on voit que ce cône est un cône algébrique de $n^{\text{ième}}$ classe. Un plan tangent à ce cône sera tangent à la surface, et si l'on appelle ξ, η, ζ les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à ce plan, ces quantités satisferont à une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, homogène par rapport aux trois variables,

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{1}$$

Les coefficients de cette équation sont des fonctions données des variables x, y et z; et il est facile de voir que ces fonctions ne peuvent être choisies arbitrairement.

De ce qui précède il résulte, en effet, que X, Y, Z désignant les coordonnées courantes,

$$(X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = 0$$

est l'équation d'un plan tangent à S; le point où ce plan coupe

l'axe des z est déterminé par l'équation

$$Z = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\zeta};$$

ce point étant donné, les rapports $\frac{\xi}{\zeta}$ et $\frac{\eta}{\zeta}$ sont reliés entre eux par une équation du degré n.

La forme générale de l'équation (1) est donc

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, x\xi + y\eta + z\zeta) = 0,$$

la caractéristique φ désignant un polynome entier quelconque du degré n. En mettant seulement en évidence les ξ, η, ζ, je l'écrirai ordinairement sous la forme (1), et je l'appellerai l'*équation mixte de la surface* S.

On peut interpréter cette équation d'une façon un peu différente; si l'on suppose un système d'axes rectangulaires parallèles aux premiers axes et dont l'origine mobile soit transportée au point M; en appelant ξ, η, ζ les coordonnées relatives à ce nouveau système d'axes, l'équation (1) représente le cône *supplémentaire* du cône ayant pour sommet le point M et circonscrit à S.

2. Il est facile de passer de l'équation tangentielle d'une surface à son équation mixte. De cette dernière équation on déduit immédiatement son équation en coordonnées cartésiennes; en effet, pour un point de la surface le cône supplémentaire au cône circonscrit à la surface et dont l'équation est

$$F = 0 \tag{1}$$

a une arête double; ou, si l'on veut, la courbe K que représente l'équation en coordonnées triangulaires a un point double. On obtiendra donc l'équation de la surface en coordonnées cartésiennes en égalant à zéro le discriminant de la forme ternaire F.

Ceci se rapporte au cas général; mais, si la surface S avait une ligne de contact multiple avec une développable, la courbe K aurait constamment un certain nombre de points doubles; et l'équation cartésienne de la surface s'obtiendrait en écrivant la condition nécessaire et suffisante pour que K ait un point double de plus, c'est-à-dire en égalant à zéro la fonction des coefficients que M. Cayley appelle le *discriminant spécial de la courbe*.

3. Je représenterai les surfaces que j'aurai à considérer par leurs équations mixtes. Ces équations mixtes s'obtiennent en égalant à zéro des formes ternaires en ξ, η et ζ; les coefficients de ces formes sont des fonctions de x, y, z, assujetties à satisfaire à certaines conditions, dont il faudra dans beaucoup de cas tenir compte.

On peut toutefois les laisser souvent de côté en s'appuyant sur la proposition suivante :

Étant donné un nombre quelconque de surfaces dont les équations mixtes soient

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,$$

si l'on désigne par I *un invariant quelconque de ce système de formes, l'équation*

$$I = 0$$

représente une surface dont le degré est indiqué par le poids de l'invariant.

Les contrevariants (simples ou multiples) des formes représentatives des surfaces s'introduiront d'eux-mêmes quand on considérera un certain nombre de points en même temps que ces surfaces.

Soit en effet un point M dont les coordonnées soient α, β et γ; si nous posons, pour abréger,

$$X = x - \alpha, \qquad Y = y - \beta, \qquad Z = z - \gamma,$$

l'équation mixte du point M est

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0;$$

et les invariants simultanés de cette forme et du système de formes donnés sont des contrevariants de ce système.

4. Au point de vue où je me place dans cette Note, l'étude d'un système de surfaces consiste dans l'étude des formes ternaires qui, égalées à zéro, fournissent leurs équations mixtes et dans l'étude des surfaces que représentent leurs divers invariants.

Les contrevariants (simples ou multiples) de ces formes interviennent quand on adjoint à ces surfaces un certain nombre de points.

Quant aux covariants, ils jouent un rôle distinct et moins important.

5. Si l'on considère deux surfaces, leurs équations mixtes (en considérant les ξ, η, ζ comme variables) représenteront deux courbes planes.

En exprimant que ces deux courbes sont tangentes, on obtiendra l'équation de la développable circonscrite à ces deux surfaces; en exprimant que ces deux courbes ont un double contact, on aura les équations de la ligne nodale de cette développable. Son arête de rebroussement s'obtiendra en exprimant que les deux courbes sont osculatoires.

Étant données trois surfaces, le résultant de leurs équations mixtes égalé à zéro donnera les équations de leurs plans tangents communs; de même le résultant des réciprocants de ces équations donnera l'équation de la surface réglée qui leur est circonscrite.

6. Pour prendre l'exemple le plus simple, l'équation d'une surface du second ordre S étant

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

où F désigne un polynome homogène et du second degré par rapport aux ξ, η, ζ; si l'on appelle G la forme adjointe à F, on voit que le cône, circonscrit à la surface et qui a pour sommet un point donné M, a pour équation

$$G(X, Y, Z) = 0,$$

si, α, β, γ étant les coordonnées du point M, on pose pour abréger

$$X = x - \alpha, \qquad Y = y - \beta, \qquad Z = z - \gamma.$$

Soit un second point M' dont les coordonnées soient α', β' et γ'; en posant

$$X' = x - \alpha', \qquad Y' = y - \beta', \qquad Z' = z - \gamma',$$

l'équation

$$X'\frac{dG}{dX} + Y'\frac{dG}{dY} + Z'\frac{dG}{dZ} = 0,$$

où l'on voit figurer l'émanant (contrevariant double) de G, repré-

sentera la surface du second ordre passant par les points M et M′, et par les courbes de contact des cônes ayant ces points pour sommets et circonscrits à S.

7. Je me propose, dans une autre Note, d'appliquer les considérations qui précèdent à l'étude des systèmes composés de surfaces de deuxième et de troisième classe.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1872.

SECTION I.

ÉQUATION MIXTE D'UNE COURBE.

1. Je supposerai, dans tout ce qui va suivre, les différentes figures que j'aurai à considérer rapportées à un système de coordonnées rectilignes quelconque.

Soient une courbe arbitraire C tracée dans un plan, et M un point quelconque de ce plan; j'appelle x et y ses coordonnées.

Menons du point M une tangente à la courbe, et soit k le coefficient angulaire de cette tangente; la quantité k (qui généralement est susceptible de plusieurs valeurs) est une fonction des coordonnées variables x et y.

Cette fonction, il est facile de le voir, ne peut être prise arbitrairement et doit satisfaire à une équation aux différences partielles linéaire et du premier ordre, qu'on peut établir de la façon suivante.

Appelons, pour un instant, X et Y les coordonnées courantes de la tangente menée du point M à la courbe; son équation sera

$$Y - y = k(X - x). \tag{1}$$

Pour que les différentes droites représentées par cette équation, lorsqu'on y fait varier x et y, enveloppent une courbe, il faut et il suffit que la droite obtenue, en remplaçant le point M par un point infiniment voisin, coupe la première en un point fixe, quelle que soit la direction du déplacement; il est clair, d'ailleurs, que ce point fixe est le point de contact de la tangente avec la courbe.

Différentions successivement l'équation (1), par rapport à x

et y, en supposant X et Y constantes; il vient

$$-0 = \frac{dk}{dx}(X - x) - k \qquad \text{et} \qquad -1 = \frac{dk}{dy}(X - x).$$

D'où, en éliminant $X - x$ entre ces deux relations,

$$\frac{dk}{dx} + k\frac{dk}{dy} = 0.$$

Telle est l'équation aux différences partielles à laquelle doit satisfaire la fonction k, pour qu'elle représente le coefficient angulaire d'une tangente menée du point (x, y) à une courbe quelconque tracée dans le plan.

Cette équation a pour intégrale générale

$$y - kx = f(k),$$

la caractéristique f désignant une fonction arbitraire de la variable; et telle est, en termes finis, la relation à laquelle doit satisfaire k.

Il est facile de trouver directement cette relation. En effet,

$$Y - y = k(X - x)$$

étant l'équation de la tangente menée du point M à la courbe, $y - kx$ est l'ordonnée du point où cette tangente coupe l'axe des y; la valeur de cette ordonnée ne dépend évidemment que de la valeur de k. On a donc

$$y - kx = f(k).$$

2. Lorsque la courbe donnée est algébrique, $f(k)$ est généralement une irrationnelle susceptible de m valeurs et racine d'une équation algébrique de degré m. Cette équation est d'ailleurs irréductible si la courbe ne se décompose pas en courbes de degré inférieur.

k satisfait donc à une équation de la forme

$$(2) \qquad A_0(y - kx)^m + A_1(y - kx)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(y - kx) + A_m = 0,$$

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ désignant des polynomes entiers en k d'un degré quelconque.

Le nombre m indique combien on peut mener de droites tangentes à la courbe et parallèles à une direction donnée. Quant à



la classe de la courbe, elle est indiquée par le degré en k de l'équation précédente, degré qui est généralement égal à m, mais qui peut lui être supérieur lorsque la courbe est tangente à la droite de l'infini.

Ce cas particulier mis de côté, on voit que, dans l'équation (2), A_0 est un nombre que l'on peut supposer égal à l'unité, et A_1, A_2, ..., A_m des polynomes entiers en k et respectivement des degrés 1, 2, ..., m.

Si, pour rendre l'équation homogène, nous posons

$$k = \frac{\mu}{\lambda},$$

on voit que la relation précédente peut être mise, pour une courbe de classe n, sous la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= (\lambda y - \mu x)^n + n(A\lambda + B\mu)(\lambda y - \mu x)^{n-1} \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2)(\lambda y - \mu x)^{n-2} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou encore, en réunissant dans un même terme les coefficients de la même puissance de λ,

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1.2}c\lambda^{n-2}\mu^2 - \ldots + nh\lambda\mu^{n-1} + k\mu^n = 0.$$

3. La relation précédente, qui, pour chaque point du plan, donne les coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener de ce point à une courbe donnée, définit complètement cette courbe.

Je la désignerai, dans tout ce qui suit, sous le nom d'*équation mixte* de la courbe.

Une telle équation s'écrira de la façon suivante :

$$F(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

F désignant une fonction homogène et entière, mais du reste entièrement arbitraire, des trois variables que comporte son expression; ou encore, en mettant seulement en évidence les variables λ et μ,

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

f désignant une fonction homogène de ces variables.

Le plus souvent, pour mettre en évidence les coefficients du polynome $f(\lambda, \mu)$, j'emploierai la notation commode de M. Cayley, en désignant par

$$(a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

le polynome

$$a\lambda^n + nb\lambda^{n-1}\mu + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} c\lambda^{n-2}\mu^2 + \ldots ;$$

en sorte que l'équation mixte générale des courbes de la classe n sera

$$(a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n = 0.$$

4. Il est facile de passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation mixte.

En effet,

$$y\xi - x\eta = \zeta$$

étant l'équation d'une droite quelconque tracée dans le plan, l'équation tangentielle d'une courbe est la relation, homogène par rapport aux trois variables,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire ξ, η et ζ pour que la droite soit tangente à la courbe. Si l'on déduit de l'équation de la tangente la valeur de son coefficient angulaire et la valeur de l'ordonnée au point où elle coupe l'axe des y, on obtient les deux relations suivantes

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad y - \frac{\mu}{\lambda}x = \frac{\zeta}{\xi},$$

d'où

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\lambda y - \mu x}{\zeta};$$

en substituant ces valeurs de ξ, η et ζ de l'équation précédente, il vient

$$\Phi(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

équation de la courbe donnée.

Dans le plus grand nombre de cas, il sera plus commode de calculer directement l'équation mixte d'une courbe, que de la tirer de son équation tangentielle. Mais je veux déduire, de ce qui précède, une conséquence très simple qui nous sera utile par la suite.

5. Considérons plusieurs courbes dont les équations tangentielles soient

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots,$$

et une autre courbe dont l'équation s'obtienne en égalant à zéro une fonction entière des polynomes qui forment les premiers membres des équations précédentes, et soit par exemple

$$f(A, B, C, \ldots) = 0.$$

Cela posé, il résulte immédiatement de la proposition précédente que

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0$$

étant les équations mixtes des premières courbes, l'équation mixte de la dernière est

$$f(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots) = 0.$$

Ainsi, l'équation mixte générale des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe inscrites dans un polygone de n^2 côtés est

$$P + \rho Q = 0,$$

ρ désignant un coefficient arbitraire et

$$P = 0, \quad Q = 0$$

représentant deux quelconques de ces courbes.

6. De l'équation mixte d'une courbe il est facile de déduire son équation en coordonnées cartésiennes.

En effet, soit $f(\lambda, \mu) = 0$ cette équation ; la courbe est évidemment le lieu des points d'où l'on peut lui mener deux tangentes coïncidentes. Donc, si l'on désigne par Δ le discriminant de la forme $f(\lambda, \mu)$,

$$\Delta = 0$$

est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes.

On retrouve ainsi la méthode donnée par M. Cayley pour passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation en coordonnées cartésiennes.

Ce qui précède suppose que la courbe n'a pas de singularités. En effet, si elle a une tangente double ou une tangente d'inflexion, on voit que chaque point de l'une quelconque de ces droites jouit

de la propriété que deux des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe se confondent; chacun de ces points satisfait donc à l'équation précédente.

Pour s'en tenir aux singularités ordinaires, on voit que si l'on désigne par $U = 0$ l'équation (cartésienne) de la courbe, par $T = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes doubles et par $I = 0$ l'équation de l'ensemble des tangentes d'inflexion, on a

$$\Delta = UT^2 I^3.$$

7. Soit

$$f(\lambda, \mu) = (a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

l'équation mixte d'une courbe de classe n.

Il est clair, d'après ce qui précède, que a, b, c, ... sont des fonctions de x et de y qui ne peuvent être choisies arbitrairement; et, en effet, $f(\lambda, \mu)$ étant une fonction de $(\lambda y - \mu x)$, l'on doit avoir identiquement

$$\lambda \frac{df}{dx} - \mu \frac{df}{dy} = 0.$$

On doit, dans la plupart des questions qui se présentent, avoir égard aux relations entre les coefficients qui résultent de l'équation précédente, et l'étude de ces relations conduit elle-même à des résultats dignes d'intérêt; mais, dans un grand nombre de cas, — et ce sont ces cas particuliers que j'étudie spécialement dans ce Mémoire, — on peut, pour ainsi dire, les laisser de côté, ou du moins ne les faire intervenir que d'une façon indirecte.

8. La proposition fondamentale, sur laquelle je m'appuierai constamment dans ce qui suit, peut s'énoncer ainsi :

Proposition. — *Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes*

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \quad f_1(\lambda, \mu) = 0, \quad f_2(\lambda, \mu) = 0, \quad \ldots.$$

Si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* f_0, f_1, f_2, ..., *l'équation*

$$I = 0$$

représente une courbe dont le degré est précisément égal au poids de l'invariant.

Démonstration. — Je rappellerai brièvement ce qu'on nomme *poids d'un invariant*. Si, dans les formes données, on remplace l'une des variables, λ par exemple, par λt, l'invariant relatif aux nouvelles formes que l'on obtient ainsi est égal à l'invariant primitif I, multiplié par une certaine puissance de λ; l'exposant de cette puissance est le poids de l'invariant.

Ceci posé, mettant en évidence toutes les variables dans les équations mixtes des courbes, écrivons-les sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} F_0(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0, \\ F_1(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0, \\ F_2(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Si, dans les polynomes qui forment les premiers membres de ces équations, nous remplaçons respectivement x et y par tx et ty, nous obtenons les polynomes suivants :

$$\begin{array}{l} F_0(\lambda, \mu, \lambda ty - \mu tx), \\ F_1(\lambda, \mu, \lambda ty - \mu tx), \\ F_2(\lambda, \mu, \lambda ty - \mu tx), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le nouvel invariant I' déduit de ces formes, comme I l'était des premières, contient t à une puissance dont le degré est celui de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0.$$

Posons maintenant

$$\lambda y - \mu x = \lambda', \qquad \lambda y + \mu x = \mu',$$

en effectuant une substitution linéaire dont le déterminant

$$\omega = 2xy$$

est indépendant de t.

On déduit de là

$$\lambda = \frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \qquad \mu = \frac{\mu' - \lambda'}{2x},$$

et les formes précédentes deviennent

$$F_0\left(\frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \frac{\mu' - \lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \quad F_1\left(\frac{\lambda' + \mu'}{2y}, \frac{\mu' - \lambda'}{2x}, \lambda' t\right), \quad \ldots.$$

L'invariant I'', relatif à ce système de formes et analogue à I', lui est égal, à un facteur près, qui, étant une puissance de déterminant ω de la substitution, est indépendant de t.

Dans I'', t entre évidemment à un degré égal au poids de l'invariant; la proposition est donc démontrée.

Remarque I. — La démonstration précédente suppose que les coefficients des polynomes $f_0(\lambda, \mu)$, $f_1(\lambda, \mu)$, ... ont la forme la plus générale (compatible avec les relations nécessaires qui existent entre eux). Dans des cas particuliers, le degré de la courbe représentée par l'équation

$$I = 0$$

peut *s'abaisser;* mais alors la droite de l'infini fait partie de la courbe.

Remarque II. — Ce que je viens de dire s'applique aux covariants que l'on peut déduire des formes

$$f_0(\lambda, \mu), \quad f_1(\lambda, \mu), \quad \ldots.$$

Les équations que l'on obtient en égalant à zéro les différents coefficients d'un covariant représentent des courbes d'un degré égal au poids de ce covariant.

9. J'ai cru devoir, pour plus de clarté, employer dans ce Mémoire les coordonnées rectilignes.

Si l'on voulait employer les coordonnées triangulaires symétriques, il suffirait, dans les formules précédentes, de rétablir l'homogénéité en introduisant une troisième variable z.

Rien n'est à changer, si ce n'est la signification géométrique qu'on doit attribuer à l'équation mixte de la courbe. Mais il est, je crois, inutile d'insister sur ce sujet.

SECTION II.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE TROISIÈME CLASSE.

10. Considérons une courbe de troisième classe K^3, et soit

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

son équation mixte.

La forme U n'a qu'un invariant; c'est le discriminant

$$D = a^2 d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

L'équation

$$D = 0$$

est, comme nous l'avons vu, l'équation en coordonnées cartésiennes de la courbe K^3; elle est du degré 6, ce nombre étant le poids du discriminant.

Pour obtenir les points de rebroussement de K^2, il faut chercher les points du plan pour lesquels l'équation

$$U = 0 \tag{1}$$

a trois racines égales.

Considérons le covariant

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ad - bc)\lambda\mu + (bd - c^2)\mu^2;$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour l'égalité des trois racines de l'équation (1) sont les suivantes :

$$ac - b^2 = 0, \qquad ad - bc = 0, \qquad bd - c^2 = 0,$$

équations de trois courbes du quatrième ordre (n° 8, *Rem. II*).

Les 9 points de rebroussement de K^3 sont donc les points communs à ces trois courbes.

Il est clair qu'on peut trouver une infinité de courbes du quatrième ordre passant par ces 9 points. Pour avoir leur expression générale, considérons, en même temps que la courbe K^3, une courbe de seconde classe arbitraire K^2 et dont l'équation mixte soit

$$V = (A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0.$$

Posons

$$I = A(bd - c^2) - B(ad - bc) + C(ac - b^2) \text{ (}^1\text{)}.$$

I est un invariant des formes U et V, de poids égal à 4. L'équation

$$I = 0$$

représente donc une courbe du quatrième ordre $\mathfrak{J}^4$; elle est évi-

---

(1) Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 170.

demment satisfaite quand on pose

$$bd - c^2 = 0, \qquad ad - bc = 0, \qquad ac - b^2 = 0;$$

elle passe donc par les 9 points de rebroussement de K^3.

11. Cherchons directement les points où elle coupe cette courbe. Pour tout point de K^3, l'équation (1) a deux racines égales, et, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, on peut supposer que la valeur commune de ces racines soit zéro, ou bien poser

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

I devient alors égale à

$$-Ac^2;$$

pour que cette quantité s'annule, il faut que l'on ait

$$c^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le point pris sur K^3 soit un point de rebroussement, ou bien que

$$A = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente menée en ce point à K^3 touche aussi K^2.

La courbe $\mathfrak{d}^4$ rencontre donc K^3 aux 9 points de rebroussement (chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *a priori*) et aux 6 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^2.

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de troisième classe* K^3 *et une courbe de seconde classe* K^2, *les* 6 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^3 *et les* 9 *points de rebroussement de* K^3 *sont sur une même courbe de quatrième ordre* $\mathfrak{d}^4$.

12. Si l'on prend au hasard, sur K^3, 5 points α, ces 5 points et les 9 points de rebroussement de la courbe déterminent une courbe du quatrième ordre qui rencontre K^3 en un sixième point β. D'un autre côté, les 5 tangentes menées à K^3 par les points α déterminent une courbe de seconde classe K^2; K^2 et K^3 ont une sixième tangente commune. Son point de contact avec K^3, étant

sur une courbe du quatrième ordre passant par les 5 points α et les 9 points de rebroussement, se confond avec β.

D'où le théorème suivant, réciproque de la proposition précédente :

THÉORÈME. — *Si par les* 9 *points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* K^3, *on mène une courbe quelconque du quatrième ordre, cette courbe rencontre* K^3 *en* 6 *points* (1) *distincts des points de rebroussement; les tangentes menées à* K^3 *par ces* 6 *points touchent une même conique.*

13. La conique K^2 peut se composer d'un couple de points P et Q. La courbe $\mathfrak{J}^4$ passe alors par les 6 points de rebroussement de K^3 et les 6 points de contact des tangentes qu'on peut lui mener des points P et Q. Je dis, de plus, qu'elle passe par ces points eux-mêmes.

En effet, pour l'un quelconque de ces points, la tangente menée de ce point à K^2 est indéterminée ; l'équation

$$V = 0$$

est satisfaite identiquement, et l'on a

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Mais, dans ces hypothèses, I s'annule évidemment; la proposition est donc démontrée.

En se reportant au paragraphe précédent, on déduit de là le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant pris sur une courbe de troisième classe* K^3 3 *points* a, a' *et* a'', *tels que les tangentes en ces points concourent en un même point* A, *toute courbe du quatrième ordre qui passe par les* 9 *points de rebroussement de* K^3 *et les* 3 *points* a, a' *et* a'' *passe par le point* A; *elle rencontre* K^3 *en* 3 *autres points, et les tangentes en ces points se coupent en un même*

(1) Ces points sont, en général, distincts des points de rebroussement; mais, dans des cas particuliers, un certain nombre d'entre eux peuvent venir se confondre avec quelques-uns de ces derniers.

point B, *qui est également situé sur la courbe du quatrième ordre.*

14. Menons, dans le plan de K^3, une droite quelconque A, les tangentes menées à la courbe aux 6 points α, où elle est coupée par A, touchent une même conique K^2 qui est la polaire de A.

Dans ce cas, la courbe du quatrième ordre $\mathfrak{J}^4$ passant par les 6 points de contact α qui sont en ligne droite, il est clair que cette courbe se décompose en la droite A et une courbe du troisième ordre $\mathfrak{K}^3$ passant par les 9 points de rebroussement. Cette courbe, d'ailleurs, est complètement déterminée, puisque par les points de rebroussement d'une courbe de troisième classe on ne peut faire passer qu'une courbe de troisième ordre, et elle demeure toujours la même, de quelque façon que l'on choisisse la droite A.

Son équation est facile à obtenir; considérons, par exemple, la conique polaire de la droite de l'infini, et soit

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

son équation mixte; d'après ce que je viens de dire, on voit que l'équation

$$\mathfrak{F}(bd - c^2) - \mathfrak{G}(ad - bc) + \mathfrak{H}(ac - b^2) = 0$$

s'abaisse au troisième degré; c'est précisément l'équation de la courbe $\mathfrak{K}^3$.

15. Si la droite A est tangente à la hessienne de K^3, sa conique polaire se compose de 2 points; ces 2 points, d'après ce que j'ai dit ci-dessus (n° **13**), se trouvent sur $\mathfrak{J}^4$, qui, dans ce cas, se compose de la tangente à la hessienne et de la courbe $\mathfrak{K}^3$. Comme ils sont en dehors de la droite, ils se trouvent nécessairement sur $\mathfrak{K}^3$; on retrouve ainsi cette proposition bien connue de M. Cayley :

Le lieu des couples de points qui constituent les coniques polaires des tangentes à la hessienne d'une courbe de troisième classe est la courbe du troisième ordre qui passe par ses 9 points de rebroussement.

16. On peut encore supposer que la conique K^2 se réduise à un point double.

Soient ξ et η les coordonnées de ce point; son équation mixte sera

$$-(y-\eta)\mu+\lambda(x-\xi)=0,$$

ou, en posant, pour abréger, $y-\eta=\mathrm{Y}$ et $x-\xi=\mathrm{X}$,

$$(-\mathrm{Y}, \mathrm{X})(\lambda, \mu)^1=0.$$

D'où, pour l'équation de la conique K^2 (considérée comme point double),

$$(\mathrm{Y}^2, -\mathrm{XY}, \mathrm{X}^2)(\lambda, \mu)^2=0.$$

On a alors

$$\mathrm{I}=(ac-b^2)\mathrm{X}^2+(ad-bc)\mathrm{XY}+(bd-c^2)\mathrm{Y}^2,$$

expression dans laquelle, si l'on considère X et Y comme les variables, on reconnaît immédiatement le covariant quadratique de U.

L'équation

$$\mathrm{I}=0$$

représente une courbe du quatrième ordre $\mathfrak{Z}^4$ qui passe par les 9 points de rebroussement de K^3 et qui touche cette courbe aux points de contact des tangentes issues du point donné; on voit, de plus, à l'inspection de l'équation précédente, qu'elle a ce point pour point double, et que les coefficients angulaires des tangentes au point double sont les racines de l'équation

$$(ac-b^2)\lambda^2+(ad-bc)\lambda\mu+(ad-c^2)\mu^2=0,$$

obtenue en égalant à zéro le covariant quadratique de U.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si, par un point donné* M, *on mène les tangentes à une courbe de troisième classe* K^3, *on peut tracer une courbe du quatrième degré* $\mathfrak{Z}^4$ *qui passe par les* 9 *points de rebroussement de* K^3, *touche cette courbe aux* 3 *points de contact des tangentes et a le point* M *pour point double.*

17. On sait que l'on peut, de différentes façons, partager les 9 points de rebroussement de K^3 en 3 groupes de 3 points, a_1, a_2, et a_3, b_1, b_2 et b_3, c_1, c_2 et c_3, de telle sorte que, dans chacun de ces groupes, les tangentes à la courbe concourent en un même

point. Soient A, B, C les points de rencontre correspondant aux groupes précédents.

Supposons que la conique K^2 se compose du point A pris 2 fois; 2 des points de rencontre de $\mathfrak{Z}^4$ avec K^3 viennent se confondre alors au point a_1, et, comme 2 de ces points s'y trouvaient déjà confondus, on trouve en tout 4 points d'intersection réunis au point a_1. D'où l'on conclut que $\mathfrak{Z}^4$ a ce point pour point double; comme le même raisonnement peut être fait relativement aux points a_2 et a_3, et comme d'ailleurs (*voir* n° 16) $\mathfrak{Z}^4$ présente un point double en A, l'on voit que cette courbe du quatrième ordre a 4 points doubles; elle se résout donc en un couple de coniques.

On déduit de là les propositions suivantes [1] :

Soient a_1, a_2 *et* a_3 3 *points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* K^3, *tels que les tangentes en ces points concourent en un même point* A; *si, par les points* a_1, a_2, a_3, A *et par un cinquième point de rebroussement* b_1 *on mène une conique, cette conique* $\mathfrak{B}$ *rencontre* K^3 *en* 2 *autres points de rebroussement de la courbe* b_2 *et* b_3, *et les tangentes aux points* b_1, b_2 *et* b_3 *concourent en un même point* B *qui se trouve également sur la conique* $\mathfrak{B}$.

Les 3 *autres points de rebroussement* c_1, c_2, c_3 *de la courbe sont également sur une conique* $\mathfrak{C}$, *qui passe par les points* a_1, a_2, a_3, A *et par le point* C, *où se coupent les tangentes de rebroussement aux points* c, c_1 *et* c_2.

En désignant par m, n, p, q 4 points situés sur une conique, appelons pour un instant *rapport anharmonique* de ces points le rapport anharmonique du faisceau suivant lequel ces points sont vus d'un point quelconque de la conique, et désignons-le par la notation

$$R(m, n; p, q).$$

Cela posé, en désignant par ρ et ρ^2 les deux racines imaginaires de l'unité, on a, en considérant les points a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3,

---

[1] Comme le développement de ces questions se rattache plutôt à la Géométrie pure qu'à la Géométrie analytique, j'ai, pour abréger, supprimé quelques démonstrations que le lecteur rétablira facilement.



A, B, situés sur la conique $\mathfrak{B}$, les relations suivantes :

$$R(A, a_3;\, a_1, a_2) = -\rho,$$
$$R(A, B;\, a_1, a_2) = \rho^2,$$

et les relations analogues que l'on obtient en permutant entre eux les points a_1, a_2 et a_3.

Pour les points situés sur la conique $\mathfrak{C}$, on a de même les relations

$$R(A, a_3;\, a_1, a_2) = -\rho^2,$$
$$R(A, C;\, a_1, a_2) = \rho.$$

J'ajouterai encore la remarque suivante :

Si, par les points A, B, C et deux points de rebroussement d'un même groupe, tels que a_1 et a_2, on fait passer une conique, le pôle de la droite $a_1 a_2$ relativement à cette conique est le troisième point de rebroussement du groupe, c'est-à-dire a_3.

Le développement des relations qui ont lieu entre les points de rebroussement d'une courbe de troisième classe donnerait lieu à quelques remarques intéressantes ; mais ce n'est pas ici le lieu de les exposer. M. Hesse a déjà donné d'élégantes propositions sur ce sujet dans le *Journal de Crelle* (t. 36).

18. Parmi le grand nombre de propositions particulières que l'on peut déduire de la proposition du n° 11, je me contenterai de donner la suivante :

Considérons un point de rebroussement r de la courbe K^3 et une courbe du quatrième ordre composée de la tangente de rebroussement en ce point et d'une courbe du troisième ordre passant par les 8 autres points de rebroussement r'. La tangente en r rencontre la courbe en 3 points α distincts du point r, et les tangentes en ces points concourent en un même point ρ situé sur la courbe du troisième ordre $\mathfrak{K}^3$ qui passe par les 9 points de rebroussement.

En appliquant la proposition déjà citée, on aura le théorème suivant :

Si, par les 8 points r', on mène une courbe quelconque du troisième ordre, cette courbe coupe K^3 en 2 points distincts

des points r'; les tangentes menées en ces points à K^3 se coupent sur la tangente de rebroussement au point r. La courbe du troisième ordre passe en outre par ce point de rencontre et par le point ρ, qui est ainsi le neuvième point fixe, commun à toutes les courbes du troisième ordre qui passent par les 8 *points r'.*

19. Considérons maintenant deux courbes de troisième classe K^3 et K'^3, et soient

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

et

$$U' = (a', b', c', d' \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

leurs équations mixtes.

Ces deux courbes ont 9 tangentes communes, et l'équation mixte générale des courbes de troisième classe, qui touchent ces 9 droites, est

$$U + \rho U' = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

20. Pour éviter d'inutiles répétitions, je transcrirai d'abord le Tableau suivant des divers invariants des formes U et U' :

$$D = a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd,$$
$$D' = a'^2d'^2 + 4a'c'^3 + 4d'b'^3 - 3b'^2c'^2 - 6a'b'c'd',$$
$$H = d'(a^2d + 2b^3 - 3abc) - 3c'(b^2c + abd - 2ac^2) + 3b'(2b^2d - bc^2 - acd) - a'(3bcd - ad^2 - 2c^3),$$
$$H' = d(a'^2d' + 2b'^3 - 3a'b'c') - 3c(b'^2c' + a'b'd' - 2a'c'^2) + 3b(2b'^2d' - b'c'^2 - a'c'd') - a(3b'c'd' - a'd'^2 - 2c'^3),$$
$$I = 2(ac - b^2)(b'd' - c'^2) + 2(bd - c^2)(a'c' - b'^2) - (ad - bc)(a'd' - b'c'),$$
$$J = ad' - 3bc' + 3cb' - da',$$
$$R = (ad')^3 - 9(ad')^2(bc') + 27(ca')^2(cd') + 27(db')^2(ab') - 81(ab')(bc')(cd') - 27(ad')(ab')(cd') \ (^1).$$

21. Les plus importants de ces invariants sont d'abord les deux

---

(1) Je désigne ici, suivant l'usage, par les symboles (ad'), (ab'), ..., les binomes alternés

$$ad' - da', \quad ab' - ba', \quad \ldots.$$

discriminants D et D′; en les égalant à zéro, on a les équations cartésiennes des deux courbes K^3 et K'^3; l'équation d'une courbe quelconque du troisième ordre K^3_ρ, tangente aux 9 tangentes communes aux 2 premières, s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant de

$$U + \rho U';$$

elle peut se mettre sous la forme

$$D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0. \tag{2}$$

22. Le Tableau précédent renferme deux *combinants* R et J.

R est le résultant des deux formes U et U′; l'équation

$$R = 0$$

représente évidemment l'ensemble des 9 tangentes communes aux deux courbes, droites qui touchent aussi toutes les autres courbes du faisceau.

Pour un point de rebroussement de K^3, l'équation

$$U = 0$$

ayant trois racines égales, on peut supposer

$$a = b = c = 0;$$

dans ces hypothèses, R devient

$$-d^3 a'^3,$$

et J devient

$$-da';$$

pour tout point de rebroussement de K^3, on a donc

$$R - J^3 = 0; \tag{3}$$

si maintenant on remarque que, R et J, étant des combinants, ne changent pas de valeur quand on y remplace U par $U + \rho U'$, on en conclut que l'équation précédente représente le lieu des points de rebroussement de toutes les courbes du faisceau.

Ceci suppose que l'on n'ait pas *identiquement*

$$R - J^3 = 0.$$

Je reviendrai plus loin sur ce sujet.

23. Considérons une courbe de troisième classe K^3 et ses 9 tangentes de rebroussement; on peut inscrire, dans le polygone formé par ces 9 droites, une infinité de courbes de troisième classe qui, toutes, auront les 9 premières tangentes pour tangentes de rebroussement. Le lieu des points de rebroussement se confond alors avec les tangentes elles-mêmes, et l'on a

$$J = 0.$$

D'où cette conséquence remarquable :

Si deux courbes de troisième classe ont les mêmes tangentes de rebroussement, l'invariant J *relatif à ces deux courbes est identiquement nul.*

Réciproquement, si cet invariant est identiquement nul, les deux courbes ont mêmes tangentes de rebroussement.

24. Cette proposition peut s'énoncer de la façon suivante pour les courbes du troisième ordre :

Si, par les 9 points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, on fait passer un faisceau de courbes, ce faisceau détermine sur une sécante fixe quelconque une division en involution.

Chaque groupe de 3 points de cette involution peut être considéré comme déterminé par les racines d'une équation de la forme

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d + \rho(a'x^3 + 3b'x^2 + 3c'x + d') = 0;$$

cela posé, l'invariant

$$ad' - 3bc' + 3cb' - da'$$

est toujours nul, *quelle que soit la position de la sécante.*

25. Si l'on égale à zéro l'invariant H, l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe du sixième ordre, $\mathcal{H}^6$.

Pour trouver les points de rencontre de cette courbe avec K^3, faisons

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Il se réduit alors à

$$2a'c^3.$$

Cette quantité s'annule pour

$$c^3 = 0;$$

donc la courbe $\mathcal{H}^6$ passe par les points de rebroussement de K^3 et elle la touche en ces points, puisque chaque point d'intersection doit compter pour 3.

Cette quantité s'annule encore pour

$$a' = 0;$$

donc $\mathcal{H}^6$ passe par les 9 points de contact des tangentes communes à K^3 et à K'^3.

Les courbes $\mathcal{H}^6$ et K^3 n'ont d'ailleurs, évidemment, aucun autre point commun.

Laissons la courbe K'^3 fixe, et remplaçons la courbe K^3 par la courbe variable K^3_ρ, dont l'équation cartésienne est

$$(2) \qquad D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0;$$

la courbe que je viens de considérer est remplacée par une courbe $\mathcal{H}^6_\rho$, dont l'équation est

$$(3) \qquad H + \rho(J^2 - 6I) + 3\rho^2 H' + 2\rho^3 D' = 0;$$

les courbes K^3_ρ et $\mathcal{H}^6_\rho$ se rencontrent :

1° Aux points de contact des tangentes communes à K'^3 et à K^3_ρ ;

2° Aux points de rebroussement de K^3_ρ, chacun de ces derniers comptant trois fois.

Si l'on élimine la variable ρ entre les équations précédentes, l'équation obtenue en égalant le résultant à zéro représente donc :

1° Les 9 tangentes communes aux courbes K^3_ρ ;

2° Le lieu de leurs points de rebroussement de ces courbes, ce dernier lieu étant pris 3 fois.

Remarquons maintenant que, le premier membre de l'équation (3) étant la dérivée par rapport à ρ du premier membre de l'équation (2), le résultant de ces deux équations est le discriminant de (2).

Ce discriminant ne peut donc différer que par un facteur constant du produit

$$R(R - G^3)^3,$$

puisque, comme nous l'avons vu,

$$R - G^3 = 0$$

est l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes K_ρ.

Ces résultats sont d'ailleurs d'accord avec la théorie bien connue des formes cubiques simultanées.

26. Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté à des courbes d'une classe quelconque.

Soient un faisceau de courbes de $n^{\text{ième}}$ classe tangentes à n^2 droites fixes, et

$$U = (a, b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^n = 0,$$
$$U' = (a', b', c', \ldots, h', k', l' \between \lambda, \mu)^n = 0$$

les équations mixtes de deux courbes de ce faisceau, K^n et K'^n.

Soit, en outre, D le discriminant de la forme U.

Posons

$$H = a'\frac{dD}{da} + b'\frac{dD}{db} + \ldots + k'\frac{dD}{dk} + l'\frac{dD}{dl}.$$

H est un invariant des formes U et U', dont le poids est égal à $n(n-1)$, et par conséquent l'équation

$$H = 0$$

représente une courbe $\mathcal{H}^{n(n-1)}$ de degré $n(n-1)$.

Pour trouver ses points de rencontre avec K^n, il faut faire, dans l'invariant H,

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

D'après un beau théorème de Joachimsthal [1], D est de la forme

$$b^2\Delta + a\varphi + a^2\psi + \ldots,$$

Δ désignant le discriminant de la forme

$$(b, c, \ldots, h, k, l \between \lambda, \mu)^{n-1}.$$

En tenant compte de cette expression, on voit que, dans les hypo-

---

(1) SALMON, *Alg. sup.*, p. 80.

thèses données, la valeur de H se réduit à

$$a'\varphi_0,$$

φ_0 désignant la valeur de φ quand on y fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Or l'on a en général

$$\varphi = -4c\Delta + b\left(d\frac{d}{dc} + \ldots\right)\Delta;$$

on a donc

$$\varphi_0 = -4c\Delta_0,$$

Δ_0 désignant la valeur de Δ dans les mêmes hypothèses que ci-dessus.

D'après le théorème déjà mentionné de Joachimsthal, on a

$$\Delta = c^2\nabla + b\Phi + b^2\Psi + \ldots,$$

∇ désignant le discriminant de la forme

$$(c, d, \ldots, k, l \between \lambda, \mu)^{n-2}.$$

On en déduit

$$\Delta_0 = c^2\nabla;$$

d'où l'on voit que la valeur de H se réduit à

$$-4a'c^3\nabla.$$

27. Cette valeur s'annule :

1° Quand l'on a

$$a' = 0.$$

Donc la courbe $\mathcal{H}^{n(n-1)}$ passe par les n^2 points, où les tangentes communes aux courbes du réseau touchent K^n.

2° Quand on a

$$\nabla = 0.$$

C'est ce qui a lieu pour les points doubles de K^n; car, en ces points, l'équation

$$U = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que l'on peut supposer infinie ; mais on a alors

$$l = 0 \quad \text{et} \quad k = 0,$$

et par conséquent

$$\nabla = 0,$$

puisque, dans ce cas, l'équation

$$(c, d, \ldots, k, l \between \lambda, \mu)^{n-2} = 0$$

a aussi une racine double.

3° Quand on a

$$c^3 = 0.$$

Donc la courbe considérée passe par les points de rebroussement de K^n, et, comme ces points comptent trois fois, la courbe lui est tangente en chacun d'eux.

Nous avons ainsi tous les points d'intersection des courbes K^n et $\mathcal{K}^{n(n-1)}$. Chacun des points doubles de K^n doit, en effet, être compté au moins deux fois. Or le nombre total des points d'intersection est $[n(n-1)]^2$, ou m^2, si l'on pose

$$n(n-1) = m.$$

D'après une formule de Plücker, on a

$$m(m-1) = n + 2d + 3r,$$

en désignant respectivement par d et par r le nombre des points doubles et des points de rebroussement de K^n.

On en déduit

$$m^2 = m + n + 2d + 3r = n^2 + 2d + 3r.$$

Les m^2 points d'intersection se composent donc :

1° Des n^2 points de contact des tangentes communes à K^n et K'^n;

2° Des d points doubles (chacun d'eux étant compté deux fois);

3° Des r points de rebroussement (chacun d'eux étant compté trois fois).

28. Quelques remarques sur les résultats précédents ne seront pas inutiles.

On sait que les points d'intersection des deux courbes de degré $n(n-1)$, K^n et $\mathcal{K}^{n(n-1)}$ ne sont pas indépendants entre eux; en

conservant les mêmes notations que ci-dessus ([1]),

$$\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}-d-r$$

de ces points sont déterminés par les autres.

De même les tangentes communes aux deux courbes de classe n, K^n et K'^n, ne sont pas non plus indépendantes entre elles;

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$$

d'entre elles sont déterminées par les autres.

Les deux nombres précédents sont égaux, car ils indiquent tous deux le *genre* de la courbe K^n. On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de n classe K^n, *si l'on mène une courbe quelconque de degré* $n(n-1)$, *qui passe par les points doubles de* K^n *et la touche en chacun de ses points de rebroussement, cette courbe rencontre* K^n *en* n^2 *points distincts de ses points singuliers; les tangentes menées à* K^n, *en ces* n^2 *points, sont tangentes à une autre courbe de même classe.*

29. Considérons maintenant le faisceau de courbes considéré plus haut (n° 26). Soit K_ρ^n l'une quelconque des courbes de ce faisceau, et

$$U+\rho U'=0$$

son équation mixte. En désignant par $F(\rho)$ le discriminant de cette équation (discriminant pris par rapport à λ et μ),

$$F(\rho)=0$$

est l'équation cartésienne de K_ρ^n.

La courbe $\mathcal{K}^{n(n-1)}$ relative à K_ρ^n a pour équation

$$\frac{dF}{d\rho}=0.$$

([1]) CLEBSCH et GORDAN, *Th. von der Abelschen Functionen*, p. 35.

Soit W le discriminant de $F(\rho)$ (discriminant pris par rapport à ρ);

$$W = 0$$

est le résultat de l'élimination de ρ entre les deux équations précédentes. Nous obtenons ainsi l'enveloppe des courbes du faisceau; d'autre part, en se reportant à ce que j'ai dit dans le n° 27 sur l'intersection des courbes $\mathcal{K}^{n(n-1)}$ et K^n, on voit que cette enveloppe se compose :

1° Des n^2 tangentes communes;

2° Du lieu des points doubles des courbes du faisceau, ce lieu étant compté deux fois;

3° Du lieu des points de rebroussement de ces courbes, ce lieu étant compté trois fois.

Si donc on désigne respectivement par

$$\mathfrak{T} = 0, \qquad \mathfrak{D} = 0, \qquad \mathfrak{R} = 0$$

les équations du système des tangentes communes, du lieu des points doubles et du lieu des points de rebroussement, on a

$$W = \mathfrak{T}\mathfrak{D}^2\mathfrak{R}^3 \text{ (1)}.$$

Du poids connu des invariants $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{R}$, on conclut que le lieu des points doubles des courbes du faisceau est du degré

$$2n(n-2)(n-3)$$

et le lieu des points de rebroussement du degré $3n(n-2)$.

30. Je reviens maintenant au cas spécial d'un faisceau de courbes de troisième classe. L'équation générale d'une courbe de ce faisceau est

$$D + 2\rho H + \rho^2(J^2 - 6I) + 2\rho^3 H' + \rho^4 D' = 0; \tag{2}$$

et l'on voit que par chaque point du plan passent quatre courbes du faisceau.

Il est facile de trouver les coefficients angulaires des tangentes

(1) On déduit de là une proposition importante sur les formes binaires donnée par M. Salmon, d'après M. Cayley, mais sans démonstration (*High Algebra*, p. 149 de l'édition anglaise).



à ces courbes au point donné. En effet, en désignant pour un instant par

$$f(\lambda, \mu) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

les équations mixtes des courbes K^3 et K'^3, l'équation

$$f(\lambda, \mu) + \rho\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

où x et y ont été remplacées par les valeurs des coordonnées du point, détermine les tangentes menées de ce point à une courbe quelconque du faisceau. L'ensemble de ces tangentes forme un faisceau d'involution, et les droites doubles de cette involution sont précisément les droites cherchées; on les obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le Jacobien des deux formes f et φ, et l'équation qui donne des coefficients angulaires des tangentes est

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\mu} \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} & \frac{d\varphi}{d\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on met en évidence les coefficients de U et de U', cette équation devient

$$\begin{aligned} \Upsilon = (6ab' - ba'),\ 3(ac' - ca'),\\ ad' - da' + 3bc' - 3cb',\ 3(bd' - db'),\ 6(cd' - dc')\rangle\!\rangle(\lambda, \mu)^4 = 0; \end{aligned}$$

et si l'on désigne par S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme Υ, on a

$$S = 3J^2, \qquad T = J^3 - 2R,$$

J et R ayant la même signification que dans les numéros précédents.

31. Par un point quelconque M du plan passent, comme nous l'avons vu, quatre courbes du faisceau. Voyons comment on peut déterminer le rapport anharmonique des tangentes à ces courbes en ce point. Soit k ce rapport anharmonique, si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

z sera racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-5)^2] - 4.27\,T^2(z-1)^3 = 0;$$

S et T désignant, comme précédemment, l'invariant quadratique et l'invariant cubique de Υ.

Si l'on remplace S et T par les expressions données ci-dessus, on obtient l'équation

$$(3) \qquad J^6[(z+2)(2z-5)^2]-4(J^3-2R)^2(z-1)^3=0.$$

32. Si nous supposons que la valeur du rapport anharmonique k soit donnée, l'équation précédente est l'équation du lieu des points tels que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en ce point, aient un rapport anharmonique donné.

On voit que ce lieu se compose de deux courbes du neuvième degré

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2}+2\sqrt[2]{(z-1)^3}(J^3-2R)=0$$

et

$$J^3(2z-5)\sqrt{z+2}-2\sqrt[2]{(z-1)^3}(J^3-2R)=0.$$

Réciproquement, toute courbe dont l'équation est de la forme

$$\alpha R+\beta J^3=0,$$

α et β désignant des constantes, représente une courbe telle que les quatre courbes du faisceau, qui se croisent en chacun de ses points, ont un rapport anharmonique constant.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Si le rapport est harmonique; on a alors

$$z+2=0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du neuvième degré, dont l'équation est

$$J^3-2R=0;$$

2° Si le rapport anharmonique est égal à une racine imaginaire de l'unité négative; on a alors

$$z-1=0,$$

et le lieu se réduit à la courbe du troisième degré, dont l'équation est

$$J=0.$$

33. Les résultats précédents supposent que J n'est pas iden-



tiquement nul. Nous avons vu que ce cas se présentait lorsque les courbes du faisceau avaient mêmes tangentes de rebroussement.

L'équation (3) donne alors

$$z = 1.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on considère les courbes de troisième classe qui ont les mêmes tangentes de rebroussement, par tout point du plan passent quatre de ces courbes, le rapport anharmonique de ces quatre courbes est constant, quelle que soit la position du point, et égal à une racine imaginaire de l'unité négative.

34. J'ai montré (22) que l'équation du lieu des points de rebroussement des courbes de troisième classe, qui forment un faisceau, était

$$R - J^3 = 0.$$

Ceci suppose toutefois que cette équation n'a pas lieu identiquement. Ce cas peut effectivement se présenter.

Soit

$$U = (a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = 0$$

l'équation mixte d'une courbe de troisième classe K^3 ; soient ξ, η les coordonnées d'un point M du plan, dont l'équation mixte sera

$$(-Y, X \between \lambda, \mu)^1 = 0,$$

si l'on pose pour abréger

$$Y = y - \eta \quad \text{et} \quad X = x - \xi.$$

Considérons le faisceau de courbes de troisième classe, dont l'équation est

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 + \rho(-Y^3, XY^2, -X^2Y, X^3 \between \lambda, \mu)^3 = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Pour abréger, je poserai

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^3 = f(\lambda, \mu),$$

et

$$h(\lambda, \mu) = (ac - b^2)\lambda^2 + \ldots,$$
$$g(\lambda, \mu) = (a^2 d + 2b^3 - 3abc)\lambda^3 + \ldots.$$

$h(\lambda, \mu)$ et $g(\lambda, \mu)$ sont, comme on le voit, le covariant quadratique et le covariant cubique de $f(\lambda, \mu)$; (je n'ai écrit que le premier terme de leur développement).

Cela posé, on voit immédiatement que l'équation

$$f(X, Y) = 0$$

représente l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe; que R et J sont respectivement égaux à $f^3(X, Y)$ et $f(X, Y)$; la relation

$$R - J^3 = 0$$

est donc satisfaite identiquement.

Résultat facile à prévoir, car l'équation (2) devient dans ce cas

$$(4) \qquad D + 2\rho g(X, Y) + \rho^2[f(X, Y)]^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation (considérée comme étant du quatrième degré) est évidemment nul, puisqu'elle a deux racines égales à l'infini; d'autre part, on sait que ce discriminant est égal, à un facteur numérique près, à

$$R(R - J^3)^3;$$

on devait donc trouver $R - J^3 = 0$.

Si l'on égale à zéro le discriminant de l'équation (4) (considérée comme une équation du second degré), on obtiendra l'équation de l'enveloppe des courbes du faisceau. Cette enveloppe ne comprendra pas les tangentes communes servant de base au faisceau, parce que les courbes les touchent en des points fixes; elle se réduira donc au lieu des points de rebroussement qui devra être compté trois fois.

Donc le discriminant de l'équation (4) est un cube parfait; et, en effet, il a pour valeur

$$g^2(X, Y) - Df^2(X, Y),$$

quantité qui, d'après un théorème bien connu de M. Cayley, est égale à

$$-4h^3(X, Y).$$

Le lieu des points de rebroussement est donc la courbe du sixième



degré, dont l'équation est

$$h(X, Y) = 0.$$

SECTION III.

PROPRIÉTÉS DES COURBES DE QUATRIÈME CLASSE.

35. Soit une courbe de quatrième classe K^4 et

$$U = (a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

son équation mixte. La forme U a deux invariants fondamentaux S et T, dont je transcris ci-dessous les valeurs,

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Ces invariants étant respectivement d'un poids égal à 4 et d'un poids égal à 6, les équations

$$S = 0 \quad \text{et} \quad T = 0$$

représentent respectivement des courbes du quatrième et du sixième ordre. Ces courbes, que j'appellerai $\mathfrak{S}^4$ et $\mathfrak{T}^6$, jouissent des propriétés remarquables déjà signalées par M. Clebsch (¹).

Pour trouver les points de rencontre de $\mathfrak{S}^4$ et de K^4, faisons, dans S, a et b égaux à zéro, S devient alors égal à

$$3c^2;$$

cette quantité s'annule pour $c = 0$, et ne s'annule que dans ce cas. Donc la courbe $\mathfrak{S}^4$ passe par les 24 points de rebroussement de la courbe K^4 et ne coupe la courbe qu'en ces points.

Dans les mêmes hypothèses, T se réduit à

$$-c^3;$$

d'où cette conséquence :

La courbe $\mathfrak{T}^6$ touche K^4 en chacun de ses 24 points de rebroussement et n'a d'ailleurs aucun point commun avec elle.

Ainsi les points de rebroussement de K^4 sont les points d'intersection des deux courbes $\mathfrak{S}^4$ et $\mathfrak{T}^6$.

(¹) *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* (*Crelle*, t. 59).

36. Par chaque point M du plan, on peut mener quatre tangentes à K^4. Cherchons le rapport anharmonique de ces tangentes. Soit k ce rapport anharmonique. Si nous posons

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

nous voyons, comme au n° 31, que z est racine de l'équation

$$S^3[(z+2)(2z-3)^2] - 4.27\,T^2(z-1)^3 = 0,$$

S et T ayant la même signification qu'au paragraphe précédent.

L'équation

$$\alpha S^3 + \beta T^2 = 0,$$

où α et β désignent des constantes arbitraires, représente donc le lieu d'un point tel que les tangentes menées de ce point à K^4 forment un faisceau ayant un rapport anharmonique donné.

Les cas particuliers les plus remarquables sont les suivants :

1° Quand $k = 0$, d'où $z = \infty$; on obtient alors

$$S^3 - 27T^2 = 0;$$

c'est, en coordonnées cartésiennes, l'équation de la courbe K^4 ;

2° Quand $k = -1$, d'où $z = 2$; le rapport est alors anharmonique, et l'équation se réduit à

$$T = 0;$$

la courbe $\mathfrak{T}^6$ est donc le lieu des points tels que les tangentes menées à la courbe forment un faisceau harmonique ;

3° Quand $k = \rho$, ρ étant une racine cubique de l'unité négative ; on a alors $z - 1 = 0$, et l'équation se réduit à

$$S = 0;$$

la courbe $\mathcal{S}^4$ est donc le lieu des points tels que le rapport anharmonique des tangentes menées à la courbe est égal à une racine cubique de l'unité négative.

37. Pour étudier les points doubles de la courbe K^4, considérons en même temps une autre courbe de quatrième classe K'^4, dont l'équation mixte soit

$$U' = (a', b', c', d', e' \between \lambda, \mu)^4;$$

et posons

$$\begin{aligned} I &= ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea', \\ J &= e'(ac - b^2) - 2d'(ad - bc) + c'(ae + 2bd - 3c^2) \\ &\quad - 2b'(be - cd) + a'(ce - d^2). \end{aligned}$$

I et J sont deux invariants des formes U et U'.

Si nous égalons à zéro le nouvel invariant $\Omega = 2SJ - 3TI$, comme cet invariant est d'un poids égal à 10, l'équation

$$(1) \qquad 2SJ - 3TI = 0$$

représentera une courbe du dixième degré $\mathcal{A}^{10}$.

Pour avoir les points de rencontre de cette courbe avec K^4, faisons

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

Ω devient alors

$$6c^2(-3c^2c' + 2b'cd + a'ce - a'd^2) + 3c^3(6cc' - 4db' + ea'),$$

ou, en réduisant,

$$3c^2a'(3ce - 2d^2).$$

Cette quantité s'annule :

1° quand

$$a' = 0;$$

donc $\mathcal{A}^{10}$ passe par les 16 points de contact des tangentes communes aux courbes K^4 et K'^4;

2° quand l'on a

$$c^2 = 0;$$

donc $\mathcal{A}^{10}$ passe par les 28 points de rebroussement de K^4, chacun de ces points comptant pour deux, comme on le savait *a priori;*

3° quand l'on a

$$3ce - 2d^2 = 0,$$

ce qui a lieu aux points doubles de K^4; en effet, pour ces points, l'équation

$$U = 0,$$

outre la racine double égale à zéro, a une autre racine double que

l'on peut supposer infinie, ce qui revient à poser

$$e = 0, \qquad d = 0,$$

auquel cas l'expression précédente s'annule.

Chacun de ces 28 points doubles doit d'ailleurs évidemment être compté deux fois.

On a aussi tous les points d'intersection de K^4 et de $\mathcal{A}^{10}$, car ces points sont au nombre de 120, et l'on a bien

$$120 = 16 + 2.24 + 2.28.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une autre courbe arbitraire de même classe* K'^4, *les* 16 *points où les tangentes communes à ces courbes touchent* K^4 *et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du dixième degré* $\mathcal{A}^{10}$.

38. Les 120 points d'intersection des courbes $\mathcal{A}^{10}$ et K^4 ne sont pas indépendants entre eux ; comme on le sait,

$$\frac{11.10}{2} - 52 \text{ (}^1\text{)}$$

sont déterminés par les autres.

Des 16 points d'intersection distincts des points singuliers de K^4, 13 suffisent donc pour déterminer les autres; remarquons maintenant que les 13 tangentes en ces points suffisent pour déterminer aussi 16 tangentes communes à K^4 et à un faisceau de courbes de quatrième classe.

De là résulte le théorème suivant :

Si, par les 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en* 16 *points distincts des points singuliers; les tangentes menées en ces* 16 *points à* K^4 *touchent une autre courbe de quatrième classe.*

---

(1) Cf. Clebsch et Gordan, *loc. cit.*

39. La courbe de quatrième classe K'^4 peut se décomposer en une courbe de classe inférieure et en un point ou en un système de points. On démontrerait, comme au n° 13, que la courbe $\mathcal{A}^{10}$ passe par ces points.

En particulier, si K'^4 se résout en un système de 4 points, on a la proposition suivante :

Si, par 4 points (α), *on mène des tangentes à une courbe de quatrième classe* K^4, *les* 16 *points de contact des tangentes et les* 52 *points singuliers de la courbe sont situés sur une même courbe du dixième ordre* $\mathcal{A}^{10}$, *qui passe par les* 4 *points* (α).

40. Lorsqu'on coupe une courbe de quatrième classe K^4 par une droite A, les tangentes, aux 12 points de rencontre de A avec K^4, touchent une même courbe de troisième classe K^3, qui est la polaire de A.

Adjoignons à cette dernière courbe un point arbitraire M; l'ensemble de K^3 et M constitue une courbe de quatrième classe.

La courbe $\mathcal{A}^{10}$ correspondante passe par les points de contact des tangentes communes à K^3 et à K^4, c'est-à-dire par les 12 points de rencontre de A avec K^4; elle contient donc cette droite tout entière, et se résout en la droite A et une courbe du neuvième ordre $\mathcal{B}^9$. Cette courbe passe d'ailleurs par les 52 points singuliers de K^4, les 4 points de contact des tangentes menées de M à K^4 et en outre par le point M (*Cf.* n° 39).

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si d'un point* M *pris dans le plan d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène des tangentes à la courbe, les* 4 *points de contact et les* 52 *points singuliers de* K^4 *sont situés sur une même courbe du neuvième ordre, qui passe en outre par le point* M.

Théorème II. — *Si, par les* 52 *points singuliers d'une courbe de quatrième classe* K^4, *on mène une courbe quelconque du neuvième ordre, cette courbe rencontre* K^4 *en* 4 *points distincts des points singuliers, les tangentes en ces points à la courbe* K^4 *se coupent en un même point* M, *qui se trouve sur la courbe du neuvième ordre.*

41. On peut choisir la droite A de telle façon que sa polaire se décompose en une conique et un point ϖ; nous prenons, du reste, le point M arbitrairement dans le plan. La courbe $\mathcal{A}^{10}$ se compose alors de la droite A et de la courbe $\mathcal{B}^9$ correspondante au point M; d'après ce que nous avons vu, le point ϖ doit se trouver sur $\mathcal{A}^{10}$, et, comme il est en dehors de la droite A, il est nécessairement situé sur $\mathcal{B}^9$.

On trouve dans le plan 21 points ϖ, qui sont évidemment caractérisés par la propriété que les tangentes que l'on peut mener de chacun d'eux à K^4 ont leurs 4 points de contact en ligne droite; ces 21 points se trouvent donc sur la courbe $\mathcal{B}^9$, quelle que soit la position du point M.

D'où la proposition suivante :

Théorème. — *Toutes les courbes du neuvième ordre qui passent par les 52 points singuliers d'une courbe de quatrième classe passent en outre par 21 points fixes; ces points fixes sont les points qui jouissent de la proprieté que les tangentes menées de chacun d'eux à* K^4 *ont leurs points de contact en ligne droite.*

42. Je m'arrête ici dans l'étude de l'invariant (¹)

$$2SJ - 3TI;$$

les théorèmes auxquels cette étude nous a conduits comprennent, dans leur énoncé, tous les points singuliers de la courbe.

Pour étudier en particulier les points doubles de K^4, je considérerai le covariant du sixième ordre de U,

$$\begin{aligned} V = (&a^2d + 2b^3 - 3abc,\ a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c,\\ &5abe - 15acd + 10b^2d,\ 10b^2e - 10d^2a,\\ &-5ade + 15bce - 10bd^2,\ -ae^2 - 2bde + 9ce^2 - bcd^2,\\ &3cde - 2d^3 - be^2)(\lambda, \mu)^6. \end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$U = 0$$

(¹) Je signalerai cependant encore, en passant, le cas important où l'invariant quadratique I est identiquement nul; alors la courbe $\mathcal{A}^{10}$ se décompose en S^4 et en une courbe du sixième ordre $\mathfrak{J}^6$ sur laquelle sont, dans ce cas, situés les 28 points doubles de la courbe K^4 et les 28 points doubles de K^{14}.



ait deux couples de racines égales, il faut et il suffit que tous les coefficients du covariant V se réduisent à zéro.

Le poids de ce covariant étant égal à 9, en égalant à zéro ses coefficients, on obtient l'équation d'autant de courbes du neuvième ordre, qui toutes passent par les 28 points doubles de la courbe.

43. Considérons en particulier le coefficient de $\lambda^3\mu^3$, l'équation

$$ad^2 - eb^2 = 0$$

représente, comme nous venons de le voir, une courbe du neuvième degré passant par les 28 points doubles de K^4.

La forme remarquable de cette équation donne lieu à d'importantes conséquences; on voit, en effet, facilement que

$$a = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point x_∞ situé à l'infini sur l'axe des x.

De même

$$b = 0$$

est l'équation du faisceau des tangentes menées à la courbe par le point y_∞ situé à l'infini sur l'axe des y.

Supposons que ces points soient deux points doubles de la courbe; alors a et b seront deux carrés parfaits, et si l'on pose

$$a = \alpha^2 \quad \text{et} \quad b = \beta^2,$$

l'équation de la courbe du neuvième ordre deviendra

$$\alpha^2 d^2 - \beta b^2 = 0,$$

équation qui se décomposera en deux autres

$$\alpha d - \beta b = 0$$

et

$$\alpha d + \beta b = 0.$$

Dans ce fait analytique se trouve l'origine des beaux théorèmes donnés par Steiner sur les points doubles des courbes de quatrième classe (¹); mais, pour en développer toutes les consé-

(¹) Il est presque inutile d'ajouter que Steiner les a énoncés pour les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre.

quences, il est nécessaire d'étudier plus complètement le covariant V.

44. Considérons, en même temps que la courbe K^4, une conique quelconque K^2 dont l'équation mixte soit

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \between \lambda, \mu)^2 = 0.$$

De cette forme et du covariant V on déduit l'invariant suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = {} & (a^2 d - 3abc + 2b^3)\mathrm{C}^3 - (a^2 e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2 c)\mathrm{BC}^2 \\ & + (abe - 3acd + 2b^2 d)\mathrm{AC}^2 + (4abe - 12acd + 8b^2 d)\mathrm{B}^2\mathrm{C} \\ & + 6(ad^2 - b^2 e)\mathrm{ABC} + 4(ad^2 - b^2 e)\mathrm{B}^3 - (ade - 3bce + 2bd^2)\mathrm{A}^2\mathrm{C} \\ & - (4ade - 12bce + 8bd^2)\mathrm{AB}^2 + (ae^2 + 2bde - 9c^2 e + 6cd^2)\mathrm{BA}^2 \\ & - (be^2 - 3cde + 2d^3)\mathrm{A}^3. \end{aligned}$$

Cet invariant étant d'un poids égal à 9, l'équation

$$\mathrm{I} = 0$$

représente une courbe du neuvième ordre $\mathfrak{S}^9$.

1° Lorsqu'on fait

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

I se réduit à

$$(2d^2 - 3ce)(3\mathrm{B}c - \mathrm{A}d)\mathrm{A}^2;$$

cette quantité s'annule pour

$$e = 0 \quad \text{et} \quad d = 0;$$

donc la courbe $\mathfrak{S}^9$ passe par les 28 points doubles de K^4. Elle s'annule aussi pour

$$\mathrm{A}^2 = 0;$$

donc $\mathfrak{S}^9$ touche K^4 aux 8 points de contact des tangentes communes à K^4 et à K^2.

2° Considérons les 8 tangentes communes à K^4 et à K^2; ces droites se coupent en 28 points. Pour chacun de ces points, les équations

$$(a, b, c, d, e \between \lambda, \mu)^4 = 0$$

et

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

ont deux racines communes, qu'on peut supposer égales respecti-

vement à zéro et à l'infini, ce qui revient à poser

$$a = 0, \quad e = 0, \quad A = 0, \quad C = 0;$$

I s'annule dans cette hypothèse; donc la courbe $\mathfrak{J}^9$ passe par les points de rencontre des 8 tangentes communes.

De là résulte la proposition suivante :

Théorème. — *Étant données une courbe de quatrième classe* K^4 *et une courbe de seconde classe* K^2, *on peut construire une courbe du neuvième ordre* $\mathfrak{J}^9$, *qui passe par les* 28 *points doubles de* K^4, *par les* 28 *points de rencontre des* 8 *tangentes communes à* K^4 *et à* K^2, *et qui touche* K^4 *aux points de contact de ces tangentes.*

45. Pour calculer l'équation de la courbe $\mathfrak{J}^9$, nous pourrons toujours supposer que, par une substitution linéaire des variables, on ait mis le polynome qui, égalé à zéro, donne l'équation de la conique K^2 sous la forme

$$\mathcal{F}\lambda\mu;$$

par la même substitution, le polynome qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe de quatrième classe K^4, deviendra

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \between \lambda, \mu)^4.$$

La valeur de l'invariant I, relative aux deux formes précédentes, est, à un facteur numérique près,

$$\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

si l'on désigne par ω le déterminant de la substitution employée, on aura, en vertu de la propriété fondamentale des invariants, à un facteur numérique près,

$$I = \omega^{-9}.\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2);$$

l'équation de la courbe $\mathfrak{J}^9$ sera donc

$$\omega^{-9}\mathcal{F}^3(\mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{E}\mathcal{B}^2) = 0.$$

46. Supposons la conique K^2 composée du système des deux points M et M', dont les coordonnées sont respectivement

$$\xi, \quad \eta \qquad \text{et} \qquad \xi', \quad \eta'.$$

Posons, pour un instant,

$$x - \xi = X, \qquad y - \eta = Y, \qquad x - \xi' = X', \qquad y - \eta' = Y'.$$

L'équation de la conique K^2 (ou de l'ensemble des deux points) est

$$(-Y\lambda + X\mu)(-Y'\lambda + X'\mu) = 0.$$

Faisons la substitution suivante,

$$\lambda = X'\lambda' - X\mu',$$
$$\mu = Y'\lambda' - Y\mu',$$

dont le déterminant est

$$\omega = XY' - YX'.$$

Par cette substitution, l'équation des points M, M' devient

$$\omega^2\lambda\mu = 0;$$

si l'équation mixte de K^4 est

$$F(\lambda, \mu) = 0,$$

cette équation devient, après la transformation,

$$F(X'\lambda' - X\mu', \; Y'\lambda' - Y\mu') = 0,$$

ou, en développant,

$$[F(X', Y'), \; \Phi', \; \ldots, \; \Phi, \; F(X, Y)\char"2 (\lambda, \mu)]^4,$$

Φ et Φ' désignant deux polynomes entiers en X, Y, X', Y', dont on peut se dispenser d'écrire la valeur.

Les quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ étant ainsi déterminées, on en déduit

$$I = \frac{1}{\omega^3}[F(X', Y')\Phi^2 - F(X, Y)\Phi'^2],$$

expression qui, malgré la présence de ω en dénominateur, est un polynome entier en X, Y, X' et Y'.

Si les points donnés M et M' sont deux points doubles de la courbe, comme les équations

$$F(X, Y) = 0,$$
$$F(X', Y') = 0$$

représentent respectivement les faisceaux de tangentes menées de



ces points à la courbe, les polynomes $F(X, Y)$ et $F(X', Y')$ sont des carrés parfaits; et, si l'on pose

$$F(X, Y) = W^2,$$
$$F(X', Y') = W'^2,$$

l'équation de la courbe $\mathfrak{J}^9$ devient

$$\frac{W'^2\Phi^2 - W^2\Phi'^2}{\omega^3} = 0,$$

ou bien

$$\frac{(\Phi W' - W\Phi')(\Phi W' + W\Phi')}{\omega^3} = 0.$$

$\mathfrak{J}^9$ se décompose ainsi, comme nous le verrons tout à l'heure, en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

Remarque. — Il est clair que, si la courbe K^4 a une tangente double pour chacun des points où cette tangente coupe la courbe, le polynome

$$F(X, Y)$$

est un carré parfait; on peut donc appliquer la proposition précédente, soit à un couple de ces points, soit à un de ces points et un point double.

47. On sait, depuis les beaux travaux de Steiner et de M. Hesse, qu'une courbe de quatrième classe peut être considérée (et cela de soixante-trois façons différentes) comme l'enveloppe de coniques qui lui sont quadruplement tangentes.

Si

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0$$

sont les équations tangentielles de deux coniques d'un de ces groupes, l'équation de la courbe K^4 peut se mettre sous la forme

$$AB = C^2,$$

en désignant par

$$C = 0$$

l'équation d'une troisième conique.

En se reportant à ce que j'ai dit au n° 5, on voit immédiatement que c'est aussi la forme de l'équation mixte de la courbe, si l'on

suppose que

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

soient les équations mixtes de trois coniques.

Soient respectivement

$$(1) \qquad a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2 = 0,$$

$$(3) \qquad A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2 = 0$$

ces équations mixtes.

L'équation mixte de la courbe de quatrième classe K^4 sera

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2)(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2) \\ \quad = (A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2)^2; \end{array} \right.$$

ou bien encore, si l'on pose

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + 2\rho(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ &\quad + \rho^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + 2\theta(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2), \\ &\quad + \theta^2(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \\ A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 &= (a_0\lambda^2 + 2b_0\lambda\mu + c_0\mu^2) \\ &\quad + (\rho + \theta)(A_0\lambda^2 + 2B_0\lambda\mu + C_0\mu^2) \\ &\quad + \rho\theta(\alpha_0\lambda^2 + 2\beta_0\lambda\mu + \gamma_0\mu^2), \end{aligned}$$

θ et ρ désignant deux paramètres variables arbitraires,

$$(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2) = (A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2)^2.$$

Les équations

$$(5) \qquad a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0$$

et

$$(6) \qquad \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 = 0$$

représentent deux quelconques des coniques du groupe quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes aux 8 points de contact des deux coniques touchent une troisième conique, dont l'équation est

$$(7) \qquad A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0.$$

On peut donner à ρ six valeurs telles que la conique représentée par l'équation (1) se décompose en un système de 2 points; ces points sont évidemment des points doubles de la courbe, et l'on obtient ainsi les 12 points doubles qui appartiennent au groupe considéré.

48. Ce qui précède peut être présenté d'une façon plus nette en employant les considérations exposées par M. Aronhold dans son Mémoire *Sur les courbes du quatrième ordre* (¹).

On sait qu'en général trois courbes de seconde classe quelconques peuvent être considérées comme les polaires de trois droites du plan par rapport à une certaine courbe de troisième classe.

Les courbes déterminées par les équations (1), (2) et (3) sont ainsi les polaires de trois droites relativement à une courbe de troisième classe bien déterminée K^3 (²).

Soient

$$p = 0 \qquad \varpi = 0, \qquad P = 0$$

les équations de ces droites.

La conique déterminée par l'équation (5) est la polaire de la droite

$$p + 2\rho P + \rho^2 \varpi = 0;$$

toutes les droites déterminées par cette équation, lorsqu'on y fait varier ρ, enveloppent une conique C^2 dont l'équation est

$$p\varpi - P^2 = 0.$$

De là les conséquences suivantes :

1° Toute droite tangente à la conique C^2 a pour polaire, par rapport à K^3, une conique quadruplement tangente à K^4 et appartenant au groupe considéré.

2° Si l'on considère deux droites tangentes à C^2, leurs coniques polaires sont quadruplement tangentes à K^4; les 8 tangentes menées aux points de contact touchent une même conique, qui

(¹) *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin,* juin 1864.

(²) *Voir* HERMITE : *Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires* (*Journal de Crelle,* t. 57).

est la polaire de la corde joignant les points où les droites touchent C^2.

3° Les six couples de points doubles appartenant au groupe sont les coniques polaires des tangentes communes à C^2 et à la hessienne de K^3.

49. Je vais maintenant démontrer que, si la conique K^2 est une des coniques données par l'équation (7), en d'autres termes, si cette conique est la polaire d'une droite du plan par rapport à K^3, la courbe $\mathfrak{J}^9$ se décompose en une courbe du troisième ordre et une courbe du sixième ordre.

A cette effet, posons

$$B^2 - AC = \Delta,$$

et effectuons la substitution

$$\lambda = (\sqrt{\Delta} - B)\lambda' + (\sqrt{\Delta} + B)\mu',$$
$$\mu = A\lambda' - A\mu',$$

propre à réduire à un rectangle la forme $A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$, et qui a pour déterminant

$$\omega = -2A\sqrt{\Delta}.$$

Soient

$$2B'\lambda\mu,$$
$$a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2,$$
$$\alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2$$

ce que deviennent respectivement, après la transformation, les formes

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2, \qquad a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2, \qquad \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2.$$

Les équations mixtes des courbes K^2 et K^4 deviendront

$$2B'\lambda\mu = 0,$$
$$(a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2)(\alpha'\lambda^2 + 2\beta'\lambda\mu + \gamma'\mu^2) - B'^2\lambda^2\mu^2 = 0,$$

et l'équation, en coordonnées cartésiennes, de $\mathfrak{J}^9$ sera, d'après ce que j'ai dit plus haut,

$$\omega^{-9}B'^3[a'\alpha'(b'\gamma' + c'\beta')^2 - c'\gamma'(b'\alpha' + a'\beta')^2] = 0,$$

ou encore

$$\omega^{-9}B'^3(a'\gamma' - c'\alpha')(b'^2\alpha'\gamma' - \beta'^2a'c') = 0.$$

50. En effectuant les calculs, on trouve

$$B' = 2A\Delta,$$
$$b' = A(2Bb - Ca - Ac),$$
$$\beta' = A(2B\beta - C\alpha - A\gamma).$$

Mettons maintenant l'équation précédente sous la forme suivante

$$(8) \qquad \omega^{-9}B'^2B'(a'\gamma' - c'\alpha')[b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2)] = 0.$$

Je remarque que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

est un invariant des trois formes (5), (6) et (7); on a donc

$$B'(a'\gamma' - c\alpha') = -\begin{vmatrix} 0 & B' & 0 \\ a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = -\omega^3 \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

On a de même

$$\alpha'\gamma' - \beta'^2 = \omega^2(\alpha\gamma - \beta^2) \qquad \text{et} \qquad a'c' - b'^2 = \omega^2(ac - b^2);$$

d'où

$$b'^2(\alpha'\gamma' - \beta'^2) - \beta'^2(a'c' - b'^2)$$
$$= A^2\omega^2[(2Bb - Ca - Ac)(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)(ac - b^2)].$$

Remplaçons, dans l'équation (8), ω, B', ... par leurs valeurs; elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \times [(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2)] = 0.$$

51. Avant d'examiner la relation précédente, il est bon de revenir sur quelques points de la théorie des sections coniques.

Considérons trois coniques

$$p, \quad \varpi, \quad P,$$

et soient, comme ci-dessus,

$$(a, b, c \between \lambda, \mu)^2 = 0, \qquad (\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 = 0, \qquad (A, B, C \between \lambda, \mu)^2 = 0$$

leurs équations mixtes.

Les invariants fondamentaux de ce système de formes sont :

1° Les discriminants

$$ac - b^2, \qquad \alpha\gamma - \beta^2, \qquad AC - B^2,$$

qui, égalés à zéro, donnent les équations cartésiennes des coniques;

2° Les invariants simultanés quadratiques

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta, \qquad Ac + Ca - 2Bb, \qquad a\gamma + c\alpha - 2b\beta.$$

L'équation

$$A\gamma + C\alpha - 2B\beta = 0$$

représente une conique; de chacun des points de cette courbe les tangentes menées aux deux coniques P et ϖ forment un faisceau harmonique.

L'équation des tangentes communes à P et à ϖ s'obtient en égalant à zéro le résultant des formes

$$(\alpha, \beta, \gamma \between \lambda; \mu)^2 \quad \text{et} \quad (A, B, C \between \lambda, \mu)^2.$$

D'après un beau théorème de M. Boole, cette équation peut se mettre sous la forme

$$(A\gamma + C\alpha - 2B\beta)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(AC - B^2) = 0.$$

Les invariants $Ac + Ca - 2Bb$ et $a\gamma + c\alpha - 2b\beta$ ont une signification analogue relativement aux systèmes de coniques P, p et p, ϖ.

3° L'invariant gauche G, dont la valeur est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

L'équation

$$G = 0$$

représente une courbe de troisième ordre; c'est évidemment le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points aux trois coniques données forment un faisceau en involution.

Il est clair qu'on peut remplacer une de ces coniques par une quelconque des courbes dont l'équation est

$$\rho(A, B, C \between \lambda, \mu)^2 + \theta(a, b, c \between \lambda, \mu)^2 + \varphi(\alpha, \beta, \gamma \between \lambda, \mu)^2 = 0,$$

ρ, θ et φ désignant des constantes arbitraires.

Cette courbe jouit d'un grand nombre de propriétés remarquables qui sont dues, pour la plupart, à M. Cayley.

52. D'après le résultat auquel je suis parvenu dans les nos 49 et 50, on voit que, dans le cas considéré, la courbe $\mathfrak{S}^9$ se décompose en une courbe de troisième ordre Q^3, dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et une courbe de sixième ordre Q^6, dont l'équation est

$$(2Bb - Ca - Ac)^2(\alpha\gamma - \beta^2) - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2(ac - b^2) = 0.$$

53. Étudions d'abord la courbe Q^3; pour abréger le discours, j'emploierai les expressions suivantes :

J'appellerai *coniques* F^2 les différentes coniques qui sont les polaires des droites du plan relativement à la courbe de troisième classe K^3; les coniques F^2 forment un réseau.

J'appellerai *coniques* G^2 les coniques qui sont les polaires, par rapport à K^3, des droites tangentes à C^2; ces coniques G^2 sont des positions particulières des coniques F^2, chacune d'elles est quadruplement tangente à K^4.

D'après ce que j'ai dit plus haut, on voit que la courbe Q^3 peut être définie par les propriétés suivantes :

Si l'on prend d'une façon quelconque trois coniques F^2, *le lieu des points d'où l'on voit ces coniques suivant un faisceau en involution est la courbe* Q^3.

Étant données deux coniques quelconques F^2, *les points de rencontre des tangentes communes à ces deux courbes sont situés sur* Q^3.

Étant donnée une conique quelconque G^2, *les quatre tangentes aux points où cette courbe touche* K^4 *se coupent en* 6 *points situés sur* Q^3.

La courbe Q^3 *est le lieu des couples de points qui font partie des coniques* F^2.

Elle passe par les 12 *points doubles de* K^4 *qui appartiennent au groupe considéré.*

La courbe Q^3 est la corrélative de la courbe désignée par G dans le Mémoire de Steiner.

54. La courbe Q^3, qui passe par les 12 points doubles du groupe, est complètement déterminée et ne dépend pas de la conique K^2.

Il n'en est pas de même de la courbe Q^6.

La courbe $\mathfrak{J}^9$, qui se compose des courbes Q^3 et Q^6, devant passer par les 28 points doubles de la courbe et Q^3 ne contenant que 12 de ces points, les 16 autres sont situés sur Q^6.

L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&[(2Bb - Ca - Ac)^2 - 4(AC - B^2)(ac - b^2)](\alpha\gamma - \beta^2)\\ &= [(2B\beta - C\alpha - A\gamma)^2 - 4(AC - B^2)(\alpha\gamma - \beta^2)](ac - b^2).\end{aligned}$$

D'où, si l'on se reporte à ce que j'ai dit plus haut (n° 51), les conclusions suivantes, qui concordent d'ailleurs avec ce qui a été établi généralement pour la courbe $\mathfrak{J}^9$:

THÉORÈME. — *Étant données deux coniques quelconques p et ϖ, quadruplement tangentes à K^4 et appartenant au groupe considéré, les quatre tangentes aux points de contact de p rencontrent les quatre tangentes aux points de contact de ϖ en 16 points; ces 16 points et les 16 points doubles, qui n'appartiennent pas au groupe, sont situés sur une même courbe du sixième ordre, qui passe en outre par les 4 points d'intersection des coniques p et ϖ et touche K^4 aux 8 points où cette courbe est touchée par les coniques.*

55. Reprenons l'équation de Q^6

$$(2Bb - Ac - Ca)^2(\alpha\gamma - \beta^2) = (2B\beta - A\gamma - C\alpha)^2(ac - b^2),$$

et supposons que chacune des coniques p et ϖ se réduise à un couple de points (qui seront des points doubles du groupe).

On aura alors

$$\alpha\gamma - \beta^2 = V^2,$$

V étant l'équation de la droite qui joint les deux points en lesquels

se résout la conique ϖ; on aura de même

$$ac - b^2 = W^2,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(2Bb - Ac - Ca^2)V^2 = (2B\beta - A\gamma - C\alpha)^2 W^2;$$

la courbe Q^6 se décompose, dans ce cas, en deux courbes du troisième ordre analogues à Q^3 et dont les équations sont

$$(2Bb - Ca - Ac)V + (2B\beta - C\alpha - A\gamma)W = 0,$$
$$(2Bb - Ca - Ac)V - (2B\beta - C\alpha - A\gamma)W = 0.$$

56. Soient d et d' un couple quelconque de points doubles d'une courbe de quatrième classe K^4; ces points définissent un groupe de 12 points doubles (G), dont ils font eux-mêmes partie, et les 12 points du groupe sont situés sur une des courbes du troisième ordre de Steiner.

Soit Δ un troisième point double de la courbe; je supposerai, pour simplifier la démonstration, que d et d' soient respectivement les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y, et que Δ soit l'origine des coordonnées.

Cela posé, l'origine étant un point double, en faisant dans l'équation mixte de K^4

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

le résultat doit être un carré parfait; cette équation est donc de la forme

$$\begin{aligned}(\mu x - \lambda y)^4 + 4(\alpha\lambda + \beta\mu)(\mu x - \lambda y)^3 + 6(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2 \\ + 4(A\lambda^3 + 3B\lambda^2\mu + 3C\lambda\mu^2 + D\mu^2)(\mu x - \lambda y)^2 \\ + (P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2)^2 = 0,\end{aligned}$$

$Px^2 + 2Qxy + Ry^2 = 0$ étant l'équation des tangentes menées à la courbe par le point Δ.

Les points situés à l'infini sur l'axe des x et sur l'axe des y étant des points doubles de la courbe, les coefficients de λ^4 et de μ^4 dans l'équation précédente sont des carrés parfaits, et l'on peut poser, par exemple,

$$(9) \quad \begin{cases} P^2 - 4Ay + 6ay^2 - 4\alpha y^3 + y^4 = (y^2 - 2\alpha y + h)^2, \\ R^2 + 4Dx + 6cx^2 + 4\beta x^3 + x^4 = (x^2 + 2\beta x + k)^2, \end{cases}$$

d'où, en particulier, on déduit la relation suivante,

$$P^2 k^2 - R^2 h^2 = 0. \tag{10}$$

Les coefficients de $4\lambda^3\mu$ et de $4\lambda\mu^3$, dans l'équation mixte de K^4, sont respectivement

$$PQ - 3By + Ax - 3\alpha xy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3 x$$

et

$$RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2 y - x^3 y.$$

Il résulte de là, et de ce que j'ai dit plus haut, que l'équation de la courbe Q^6 est

$$\begin{aligned}
&(y^2 - 2\alpha y + h) \\
&\quad \times (RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2 y - x^3 y) \\
&+ (x^2 + 2\beta x + k) \\
&\quad \times (PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta y^3 + 3\alpha xy^2 - y^3 x) = 0,
\end{aligned}$$

et l'équation de Q^3

$$\begin{aligned}
&(y^2 - 2\alpha y + h) \\
&\quad \times (RQ + 3Cx - Dy - 3cxy + 3bx^2 + \alpha x^3 - 3\beta x^2 y - x^3 y) \\
&- (x^2 + 2\beta x + k) \\
&\quad \times (PQ - 3By + Ax - 3axy + 3by^2 - \beta x^3 + 3\alpha xy^2 - y^3 x) = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation est en apparence du sixième degré; mais, en vertu des relations (9), ce degré s'abaisse au troisième.

57. Les premiers membres des équations précédentes, quand l'on y fait

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

se réduisent respectivement à

$$Q(hR + kP) \quad \text{et à} \quad Q(hR - kP).$$

De l'équation (10) il résulte que l'une des quantités précédentes est nulle [1]; le point Δ se trouve donc sur la courbe Q^3 ou sur la courbe Q^6.

Il est clair, d'après ce que j'ai dit précédemment, qu'il se trouve

[1] Je suppose, pour abréger la discussion, qu'aucune des quantités P, Q, R ne soit nulle; c'est évidemment le cas général.

sur Q^3 s'il fait partie du groupe (G), et sur Q^6 dans le cas contraire.

Dans le premier cas, l'on a

$$hR - kP = 0;$$

or c'est là la condition nécessaire pour que les six droites représentées par les équations

$$\begin{gathered} y^2 - 2\alpha y + h = 0, \\ x^2 + 2\beta x + k = 0, \\ Px^2 + 2Qxy + Ry^2 \end{gathered}$$

soient tangentes à une même conique; et, d'ailleurs, ces droites sont les tangentes que l'on peut mener à la courbe par les trois points doubles A, B, C.

D'où cette propriété due à Steiner :

Si le point Δ appartient au groupe (G), les 6 tangentes que l'on peut mener à la courbe des points d, d' et Δ touchent une même conique.

58. Supposons maintenant que le point Δ n'appartienne pas au groupe (G); on a alors

$$hR + kP = 0;$$

soit Γ l'une quelconque des tangentes menées du point C à la courbe, et

$$Px - y(Q + \sqrt{Q^2 - PR}) = 0$$

son équation; l'équation de la seconde de ces tangentes Γ' sera

$$Px - y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0.$$

Appelons Γ_0 la conjuguée harmonique de Γ' par rapport aux deux axes $d\Delta$ et $d'\Delta$, l'équation de cette droite sera

$$Px + y(Q - \sqrt{Q^2 - PR}) = 0,$$

l'ensemble des droites Γ et Γ_0 ayant pour équation

$$Px^2 - 2\sqrt{Q^2 - PQ}\,xy - Ry^2 = 0.$$

L'égalité

$$hR + kP = 0$$

exprime précisément la relation nécessaire pour que les droites Γ et Γ_0 et les 4 tangentes que l'on peut mener à la courbe par les points d et d' touchent une même conique.

On peut donc, en groupant ensemble les résultats précédents, énoncer la proposition suivante :

Étant pris, sur une courbe de quatrième classe, 2 *points doubles d et d', ces* 2 *points déterminent* 10 *autres points doubles de la courbe qui forment, avec les premiers, un groupe* (G) *de* 12 *points situés sur une même courbe du troisième ordre.*

Soient Δ un point double de la courbe différent de d et de d', et Γ et Γ' les tangentes menées à ce point. La droite Γ et les tangentes menées par d et d' déterminent une conique. Cela posé :

1° Si Δ fait partie du groupe G, la droite Γ' se confond avec la deuxième tangente que l'on peut mener du point Δ à la conique;

2° Si Δ ne fait pas partie de ce groupe, la droite Γ' et cette deuxième tangente sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites Δd et $\Delta d'$.

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES

DANS LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE (1).

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872.

I. — Généralités sur les surfaces a génératrices circulaires.

1. On sait, depuis les travaux de Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du plan considéré qui passe par l'un des points I et J; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel et n'en renferme évidemment qu'un; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée (2).

---

(1) Une Note de l'auteur, sur le même sujet, a paru dans le journal *L'Institut*, n° 1898.

(2) Je dis que deux points sont imaginairement conjugués, lorsque leurs coordonnées, prises par rapport à un système d'axes réels quelconque, sont des quantités imaginaires conjuguées. Un point réel est à lui-même son conjugué.

Deux courbes sont imaginairement conjuguées, lorsque les équations de chacune d'elles se déduisent des équations de l'autre en changeant le signe du symbole imaginaire i.

Une courbe réelle est à elle-même sa propre conjuguée.

Si, par un point fixe, réel ou imaginaire, on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point fixe. Les droites ainsi obtenues sont situées sur un même cône du second degré, que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant pour centre le point fixe et qui jouit de toutes les propriétés de la sphère. Ainsi, par exemple, toute section plane de ce cône est un cercle, et le centre du cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan.

Je désignerai sous le nom de *cône isotrope* le cône ainsi formé par toutes les droites isotropes qui passent par un même point. Tous les cônes isotropes coupent le plan de l'infini suivant une même conique, commune à toutes les sphères tracées dans l'espace et que l'on peut appeler l'*ombilicale*.

Par une droite, on peut généralement mener deux plans tangents à l'ombilicale; j'appellerai ces plans *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes, passant par une droite donnée, est coupé par un plan perpendiculaire à cette droite suivant deux droites isotropes. Par une droite isotrope, on ne peut faire passer qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

2. Ces définitions établies, concevons un point imaginaire de l'espace a, et le point a' qui lui est imaginairement conjugué. Par chacun de ces points passe un cône isotrope; les deux cônes ainsi obtenus se coupent suivant un cercle réel A, dont le plan est perpendiculaire à la droite réelle qui joint les deux points imaginairement conjugués a et a'; le centre de ce cercle est le point réel O, qui est le milieu du segment aa', et, la distance Oa étant représentée par Ri, son rayon a pour valeur la grandeur réelle R.

Il est clair que les deux points imaginaires a et a' déterminent complètement le cercle A; réciproquement, étant donné le cercle réel A, par ce cercle on ne peut faire passer que deux cônes isotropes dont les sommets sont les points a et a'. La position de ce cercle dans l'espace détermine donc complètement ces deux points.

Je dirai que le cercle réel A, ainsi déterminé, est le *cercle représentatif* du couple de points imaginaires a et a', couple que je désignerai par la notation (A); réciproquement, le cercle A,

déterminé comme précédemment par les deux points a et a', sera désigné par la notation (a, a').

Le cercle A ou (a, a') représente ainsi l'ensemble des deux points imaginaires conjugués a et a'; dans certaines questions, il est nécessaire de pouvoir distinguer ces deux points l'un de l'autre. A cet effet, on peut imaginer que le cercle A soit décrit dans un certain sens par un point mobile; le sens dans lequel il sera supposé décrit déterminera celui des deux points a et a' dont il sera la représentation. Afin de fixer les idées, supposons que dans un système de coordonnées quelconque, mais d'ailleurs réel, les coordonnées d'un point m soient respectivement

$$x = a + \alpha i, \quad y = b + \beta i, \quad z = c + \gamma i;$$

le sens dans lequel on supposera décrit le cercle représentatif du point m sera tel qu'un spectateur, ayant l'œil placé à l'origine des coordonnées, voie le point mobile, décrivant le cercle, se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, suivant que la quantité $a\alpha + b\beta + c\gamma$ est positive ou négative.

Il est évident d'ailleurs que, si cette quantité a un signe donné pour le point m, elle aura le signe contraire pour le point imaginairement conjugué m', dont les coordonnées sont

$$x = a - \alpha i, \quad y = b - \beta i, \quad z = c - \gamma i.$$

3. Dans la plupart des recherches de géométrie, on a à considérer, par couples, des points réels ou qui ne sont pas imaginairement conjugués. J'étendrai à ce cas les notions établies précédemment. Ainsi, a et b désignant deux points quelconques de l'espace, je désignerai par (a, b) le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets ces deux points; ce cercle sera généralement imaginaire et ne deviendra réel que dans le cas, examiné précédemment, où les points considérés sont imaginairement conjugués. De même, C désignant un cercle quelconque de l'espace, je dénoterai par le symbole (C) les deux points qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

4. Considérons dans l'espace une courbe géométrique quelconque, réelle ou du moins (pour le moment je me restreindrai à



ce cas de beaucoup le plus intéressant) définie par des équations réelles; c'est-à-dire telle que, lorsqu'elle passe par un point imaginaire, elle passe également par le point imaginairement conjugué.

Étant donné un cercle réel de l'espace, ce cercle représente un couple de points imaginairement conjugués; et, pour que ces points appartiennent à la courbe donnée, il est nécessaire que le cercle satisfasse à certaines conditions déterminées par la nature de la courbe et dont l'étude forme, pour ainsi dire, un prolongement géométrique de la théorie de cette courbe elle-même. Pour éclaircir ces considérations générales et montrer les diverses questions auxquelles elles se rattachent, j'en ferai tout d'abord, et avec quelques détails, l'application aux courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, en m'appuyant sur les propriétés connues des surfaces *anallagmatiques*.

5. M. Moutard a appelé *surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* des surfaces qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de sphères mobiles qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leurs centres décrivent une surface du second degré; dans tout ce qui suit, je les désignerai simplement sous le nom de *surfaces anallagmatiques;* leur degré, qui est, en général, le quatrième, peut d'ailleurs s'abaisser au troisième, lorsque la surface lieu des centres des sphères mobiles est un paraboloïde, et même au second, puisque les surfaces du second degré sont comprises dans la famille des surfaces anallagmatiques.

La définition donnée ci-dessus peut être légèrement modifiée de la façon suivante. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P coupant cette sphère suivant un cercle C, on peut, par ce cercle, faire passer deux cônes isotropes. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points, qui, d'après ce que j'ai dit ci-dessus, pourraient être représentés par la notation (C), sont réciproques par rapport à la sphère **S**; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P et, réciproquement, que le plan P est le plan associé aux points p et p' [1].

---

[1] Voir, *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868), ma Note sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.

Cela posé, on peut définir une surface anallagmatique donnée R comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S, des différents plans que l'on peut mener tangentiellement à une surface du second degré A. L'intersection des surfaces S et A est une biquadratique F qui est l'une des cinq focales de la surface; les quatre autres focales correspondent aux quatre modes de génération dont la surface est susceptible ([1]). En chaque point m de la surface anallagmatique, la normale passe par le point où le plan associé au point m touche la surface A.

Soit G une génératrice rectiligne de cette dernière surface, et soient a, a' les points où cette génératrice s'appuie sur la focale F. On voit facilement que, tandis que le plan mobile qui sert à décrire la surface se déplace le long de la droite G en tournant autour de cette droite, les points associés au plan tangent dans ses diverses positions décrivent un cercle; et ce cercle est précisément l'intersection des deux cônes isotropes ayant pour sommets les points a et a', cercle que nous pouvons désigner par la notation (a, a'). A chaque génératrice rectiligne de A correspond donc une génératrice circulaire de R; et, comme chacun des plans tangents à la surface A passe par une génératrice rectiligne de même système que G, on voit que la surface anallagmatique peut être considérée comme engendrée par les différents cercles correspondant aux génératrices du même système que G. Aux génératrices rectilignes de A, du système différent de celui de G, correspond un autre système de sections circulaires de R; les deux systèmes ainsi obtenus forment un groupe de cercles que, pour plus de clarté, je dirai appartenir au mode de génération défini par la focale F, ou simplement à la focale F. A chacun des quatre autres modes de génération de la surface correspond un autre groupe de cercles situés sur la surface et appartenant à la focale définissant le mode de génération considéré. On peut donc définir, de la façon suivante, les surfaces anallagmatiques au moyen de leurs sections circulaires.

Étant donnée une biquadratique sphérique F, si l'on fait passer par cette courbe une surface du second degré quelconque et si,

---

([1]) Voir, *Bulletin de la Société philomathique* (janvier 1868), ma Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.

pour chaque génératrice rectiligne d'un système donné de cette surface, on construit le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes, ayant pour sommets les points où cette génératrice s'appuie sur la courbe, le lieu des cercles ainsi obtenus est une surface anallagmatique ayant F pour focale; et le système formé par ces cercles appartient à cette focale.

6. Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature de la surface A, non plus que sur sa position relative par rapport à la sphère S. Les génératrices rectilignes de A peuvent être imaginaires, ou bien, étant réelles, elles peuvent traverser la sphère et la couper en deux points réels. Dans ces deux cas, les sections circulaires correspondantes de l'anallagmatique sont imaginaires. Pour qu'un cercle C, correspondant à une génératrice rectiligne, soit réel, il faut et il suffit évidemment que cette génératrice soit réelle et extérieure à la sphère; elle coupe alors cette sphère en deux points imaginairement conjugués de la focale F, et le cercle C est ce que j'ai appelé le *cercle représentatif* de ces deux points.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système de sections circulaires d'une surface anallagmatique, appartenant à une focale F *de cette surface, est réel, les points imaginaires représentés par ces cercles sont situés sur la courbe* F.

Si l'on imagine toutes les surfaces anallagmatiques, qui ont pour focale une biquadratique sphérique donnée F, et toutes les sections circulaires réelles de ces surfaces qui appartiennent à F, on obtiendra les cercles représentatifs de tous les points imaginaires de la courbe F. En effet, si un cercle C représente un point imaginaire de F, la droite réelle qui joint les points imaginaires (C), détermine avec la courbe F un hyperboloïde à une nappe, et cet hyperboloïde détermine une surface anallagmatique ayant F pour focale et passant par le cercle C. D'où la conclusion suivante :

Pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires situés sur une biquadratique sphérique donnée F, *il faut et il suffit que ce cercle soit situé sur une surface anal-*

lagmatique ayant F *pour focale et qu'il appartienne au mode de description caractérisé par cette focale.*

7. La façon dont j'ai défini au n° 5 les surfaces anallagmatiques, au moyen de leurs sections circulaires, s'étend d'elle-même au cas où ces surfaces ont un plan de symétrie; dans ce cas, l'une des sphères principales se réduit à un plan, ainsi que la surface du second degré correspondante, et les définitions que j'ai données précédemment, la définition comme enveloppes de sphères et la définition par points, deviennent illusoires. Mais, avant d'aborder ce sujet, il est nécessaire d'exposer quelques considérations très simples sur la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

Étant donnés un point quelconque a, réel ou imaginaire, et le cône isotrope ayant ce point pour sommet, il est clair que, par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques, ce cône isotrope se transforme en un autre cône isotrope ayant pour sommet le point qui correspond au point a. Si donc on a deux points quelconques a et b, au cercle (a, b) correspondra après la transformation le cercle (α, β), α et β désignant les points qui correspondent aux points a et b.

Imaginons une surface anallagmatique comme le lieu des différents cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... déterminés par les points où les génératrices d'une surface du second ordre aa', bb', cc', ... s'appuient sur une biquadratique sphérique F, et effectuons sur cette figure une transformation par rayons vecteurs réciproques. La courbe F se transformera en une autre biquadratique sphérique Φ; sur cette courbe Φ, aux points a, a', b, b', ... correspondront des points α, α', β, β', ..., et la surface transformée de la surface donnée sera le lieu des cercles (α, α'), (β, β'), ... D'où l'on peut, en passant, tirer cette conséquence, que les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, ... sont, comme les droites aa', bb', cc', ..., les génératrices d'une même surface du second ordre.

Considérons maintenant une biquadratique sphérique F et une surface du second degré quelconque A, passant par cette courbe. Toutes les génératrices d'un même système de A, telles que aa', peuvent être obtenues en choisissant arbitrairement une génératrice ss' de l'autre système et en menant des plans par cette der-

nière génératrice. Ces divers plans couperont la sphère suivant des cercles passant par les deux points fixes s et s' et chacun de ces cercles coupera la courbe F en deux points variables a et a situés sur une même génératrice de A; le lieu des cercles (a, a') est l'anallagmatique définie par la surface A et la focale F; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, par deux points fixes s et s', d'une biquadratique sphérique F, *on mène un cercle variable rencontrant la courbe* F *aux deux points a et a', le lieu des cercles (a, a') est une surface anallagmatique ayant* F *pour focale.*

Transformons maintenant la figure précédente en prenant le pôle de transformation sur la sphère qui contient la courbe F; la surface anallagmatique donnée se transforme en une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan qui correspond à la sphère. La focale F se transforme en une anallagmatique plane Φ sur laquelle se trouvent les deux points σ et σ' correspondant aux points s et s'; et l'on obtient la proposition suivante :

Si, par deux points fixes σ et σ' d'une anallagmatique plane Φ, on mène un cercle variable coupant la courbe Φ aux points α et α', le lieu des cercles (α, α') est une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan de la focale Φ.

Le second système de sections circulaires appartenant à la focale Φ s'obtiendrait facilement : en effet, étant mené par σ et par σ' un cercle quelconque coupant la focale en deux points α et α'; si, par ces deux points, on mène un cercle variable rencontrant Φ aux points ρ et ρ', les différents cercles tels que (ρ, ρ') constitueront ce second système de sections circulaires.

Les plans des différents cercles tels que (α, α') ont pour traces, sur le plan de la focale Φ, les perpendiculaires élevées sur les segments $\alpha\alpha'$ en leurs points milieux. Toutes ces perpendiculaires, il est facile de le voir, enveloppent une conique ayant pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique Φ [1]. D'où l'on peut conclure que, quand une série de surfaces anallagmatiques a pour

---

[1] *Voir*, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1863), ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes*, etc.

focale commune une anallagmatique plane, les traces des cylindres enveloppés par les plans des cercles de ces surfaces appartenant à cette focale, sur le plan de symétrie, sont des coniques homofocales ayant pour foyers communs les foyers singuliers de la focale.

8. La proposition précédente n'est, du reste, qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux anallagmatiques en général et que l'on peut établir très simplement.

Considérons une surface anallagmatique quelconque R, ayant pour focale une biquadratique sphérique F. Les plans des divers cercles de la surface, appartenant à cette focale, enveloppent un cône ayant pour sommet le centre de la sphère S, sur laquelle est située la focale; et ces plans sont perpendiculaires aux diverses génératrices de la surface du second degré A passant par la focale qui détermine la surface R. Pour trouver les droites focales de ce cône, je rappellerai que ces droites sont les intersections des divers plans isotropes qu'on peut lui mener tangentiellement. Or, les perpendiculaires à un plan isotrope touchant l'*ombilicale* en un point donné ω sont les diverses droites isotropes passant par ce point correspondant aux plans isotropes tangents au cône, donc des génératrices isotropes de A, et réciproquement. Une génératrice isotrope de A doit percer le plan de l'infini en un point de l'ombilicale, et aussi en un point de la trace de la surface A sur le même plan. Soient Ω l'ombilicale et a, b, c, d les quatre points où cette courbe rencontre la focale F; la surface A passant par cette focale, sa courbe d'intersection avec le plan de l'infini est une conique passant par les points a, b, c et d, et il est clair que les génératrices isotropes de A sont les huit génératrices passant par ces quatre points. Les traces, sur le plan de l'infini, des quatre plans qui leur sont perpendiculaires et qui passent par le centre de la sphère, sont les quatre droites menées tangentiellement à l'ombilicale par les quatre points a, b, c et d; les focales du cône sont donc les six droites conjuguées deux à deux qui joignent le centre de la sphère aux divers points d'intersection p. q, r, s, t, u des quatre tangentes. On voit que ces focales sont complètement déterminées par la focale F et ne dépendent en aucune façon de la surface particulière A. On peut donc énoncer cette proposition :

Si l'on considère une série de surfaces anallagmatiques

homofocales, et si, pour chacune de ces surfaces, on construit le cône enveloppe des cercles appartenant à l'une de ses focales, tous les cônes ainsi obtenus sont homofocaux.

J'ajouterai que les focales de ces cônes sont les focales singulières des cônes ayant pour base la focale de la surface anallagmatique considérée, et, pour sommet, le centre de la sphère sur laquelle cette courbe est située. Mais, pour abréger, je laisse de côté la démonstration de ce point de détail ([1]).

9. Je reviens maintenant au mode de description des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie, donné au n° 7, pour montrer comment il s'applique aux surfaces du second ordre. Ces dernières s'obtiennent lorsque la focale, qui, en général, est une courbe anallagmatique plane, se réduit à une conique. Soit donc une conique quelconque C réelle (ou du moins ayant une équation réelle) et a, a' deux points fixes pris sur cette conique. Par ces deux points, menons un cercle quelconque coupant la conique en α et en α'; d'après ce qui a été dit ci-dessus, le lieu des cercles tels que (α, α') est une surface du second ordre ayant pour focale C. D'après un théorème élémentaire bien connu, toutes les droites telles que $\alpha\alpha'$ ont une direction fixe. On peut donc énoncer la proposition suivante qu'il serait très simple, d'ailleurs, d'établir directement :

Si l'on mène, dans le plan d'une conique, une série de droites parallèles à une direction fixe D, *en désignant par a et a' les deux points d'intersection de la conique avec une quelconque de ces droites, le lieu des cercles tels que (a, a') est une surface du second ordre ayant pour focale la conique donnée.*

Supposons que C soit une ellipse; imaginons toutes les droites réelles parallèles à une droite fixe D et extérieures à l'ellipse; chacune de ces droites rencontre l'ellipse en deux points imagi-

---

([1]) *Voir*, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, le n° 4 de ma Communication du 23 mars 1867 : *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.*

nairement conjugués, représentés par un cercle réel; tous les cercles réels ainsi obtenus, quand la droite se déplace, constituent l'un des systèmes de sections circulaires d'un hyperboloïde à deux nappes ayant pour focale l'ellipse donnée. Si le système des droites considéré était parallèle à une droite D' faisant avec le grand axe de l'ellipse un angle supplémentaire de l'angle que fait D avec ce même axe, les cercles représentatifs des points d'intersection de l'ellipse avec ces diverses droites constitueraient le second système de sections circulaires de l'hyperboloïde mentionné ci-dessus.

Si nous imaginons l'infinité d'hyperboloïdes à deux nappes qui ont pour focale l'ellipse C, leurs diverses sections circulaires représenteront tous les points imaginaires situés sur cette ellipse. D'où l'on peut conclure le théorème suivant :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une ellipse donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.

De même :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une hyperbole donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un ellipsoïde ayant cette hyperbole pour focale.

10. Il existe, relativement au système de deux cercles situés sur une même sphère, une propriété très simple, qui a de fréquentes applications dans la géométrie de la sphère et dans la théorie des surfaces anallagmatiques. Je vais l'exposer brièvement, en en supprimant la démonstration, d'ailleurs très facile à suppléer.

Soient deux cercles C et D situés sur une même sphère, et par conséquent se coupant en deux points. Le cercle C représente deux points de l'espace c et c', qui sont réciproques par rapport à la sphère et que l'on pourrait désigner par la notation (C); le cercle D représente de même deux points réciproques d et d'. Les quatre points c, c', d et d' sont d'ailleurs dans un même plan passant par le centre de la sphère. Cela posé, par les deux cercles

donnés, on peut faire passer deux cônes, et les sommets de ces cônes sont les deux points de rencontre respectifs des droites cd et $c'd'$ et des droites cd' et $c'd$.

Supposons les cercles C et D réels; supposons-les, en outre, décrits dans un sens déterminé, en sorte que chacun d'eux représente un point imaginaire et un seul; le point c, par exemple, étant représenté par le cercle C et le point d par le cercle D. La droite imaginaire cd est imaginairement conjuguée à la droite $c'd'$; ces deux droites étant dans le même plan se coupent en un point réel, que l'on peut définir comme étant le point réel situé sur cd; et, d'après ce que j'ai dit plus haut, ce point est le sommet d'un cône passant par C et D. Mais ici l'on peut ajouter qu'un spectateur, dont l'œil serait placé au sommet du cône, verrait les cercles C et D décrits en sens inverse; en sorte que, si le mobile qui est censé décrire l'un d'eux lui paraît se mouvoir dans le sens des aiguilles d'une montre, le mobile qui est supposé décrire l'autre lui paraîtra se mouvoir dans l'autre sens.

Cette dernière remarque est souvent utile pour fixer le sens que l'on doit affecter à un cercle représentant un point imaginaire.

Considérons maintenant une surface anallagmatique R, définie par la surface du second degré A et la focale F située sur cette surface, et les deux systèmes de génératrices circulaires de l'anallagmatique appartenant à cette focale. Soit C un cercle fixe de l'un de ces systèmes, représentant deux points c et c' de la focale; soit D un cercle quelconque de l'autre système, représentant deux points d et d' de la focale. Les cercles C et D sont situés sur une même sphère, et l'on sait d'ailleurs que les droites cc' et dd' sont deux génératrices, de systèmes différents, de la surface A. D'après ce qui a été dit plus haut, les sommets des cônes qui passent par les cercles C et D sont les deux points r et s, où se coupent respectivement les droites cd' et $c'd$ d'une part, les droites cd et $c'd'$ d'autre part. Le lieu décrit par les sommets de ces cônes, lorsque, le cercle C étant fixe, le cercle D se déplace sur la surface R, est donc l'intersection des deux cônes ayant pour base la focale F et pour sommets les points c et c'. Ces cônes sont du troisième degré; leur intersection, qui est du neuvième degré, se compose d'abord de la génératrice cc', de la focale et du lieu cherché; ce dernier est donc du quatrième ordre.

D'où l'on peut conclure la proposition suivante :

Étant pris, sur une surface anallagmatique, un cercle quelconque appartenant à une focale F *de cette surface, par ce cercle et par un cercle quelconque* D *du second système circulaire appartenant à cette focale, on peut faire passer deux cônes; le lieu décrit par le sommet de ces cônes, lorsque, le cercle* C *étant fixe, le cercle* D *se déplace sur la surface, est une courbe du quatrième ordre faisant partie de l'intersection des deux cônes, qui ont pour base commune la focale* F *et pour sommets les deux points de cette focale que représente le cercle* C.

11. Dans ce qui précède, j'ai montré comment on peut déterminer les conditions géométriques auxquelles un cercle doit satisfaire pour représenter un couple de points situés sur une biquadratique sphérique donnée, en groupant deux à deux les divers points de cette courbe de façon qu'à l'ensemble de tous les couples de points corresponde l'ensemble des génératrices circulaires d'une surface anallagmatique. Chaque mode de groupement est défini par une surface du second ordre, de telle sorte que deux points quelconques de la courbe, qui se correspondent, se trouvent sur une même génératrice de la surface.

Soit, en général, une courbe gauche géométrique quelconque G; imaginons une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices s'appuie en deux points sur cette courbe. Soient aa', bb', cc', ... les génératrices consécutives de cette surface; les cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... engendreront une autre surface, que je dirai *dérivée* de la courbe G. D'une même courbe donnée on peut ainsi déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, et chacune de ces surfaces dérivées correspond à un certain mode de groupement des points de la courbe, défini par la surface réglée V.

Lorsque la courbe G est plane, les droites, telles que aa', bb', ..., qui joignent les points conjugués de cette courbe, ne forment plus une surface gauche, mais enveloppent une courbe plane, qui peut aussi servir à définir le groupement des points. Dans ce cas, et lorsque la courbe G est d'un degré supérieur à deux, chacune des tangentes à l'enveloppe plane rencontrant G en

plus de deux points, il est nécessaire de fixer ceux des points de rencontre que l'on doit grouper ensemble. Pour éviter cette difficulté, il est alors généralement préférable de définir chaque couple de points par d'autres considérations ne donnant lieu à aucune ambiguïté, comme je l'ai fait au n° 7, en traitant des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie.

On peut toujours, d'ailleurs, sauf dans le cas très particulier où la courbe plane G est un cercle, effectuer une transformation par rayons vecteurs réciproques, de façon que cette courbe devienne une courbe gauche sphérique (¹).

12. D'une courbe gauche donnée on peut, comme je l'ai montré, déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, dérivées de cette courbe.

Réciproquement, étant donnée une surface quelconque à génératrices circulaires, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une certaine courbe gauche G. En désignant par C, C', C'', ... les diverses génératrices circulaires de la surface, cette courbe est le lieu des points (C), (C'), (C''), ...; et la surface réglée V, qui détermine le mode de groupement des points de la courbe, est le lieu des axes des différents cercles.

13. Parmi l'infinité de surfaces dérivées d'une courbe gauche G, se trouve en particulier la *développable isotrope,* circonscrite à cette courbe; j'entends par là la surface développable circonscrite à la fois à l'ombilicale et à la courbe donnée. Tous les plans qui lui sont tangents sont, par conséquent, des plans isotropes, et ses génératrices, comme nous allons le voir, sont des droites isotropes.

Soit m un point quelconque de G; pour construire les génératrices de la surface développable isotrope qui passent en ce point, menons la tangente à la courbe en m, et soit t le point où cette tangente perce le plan de l'infini. Menons par t les deux tangentes à l'ombilicale Ω et soient a et b leurs points de contact. Les plans

(¹) *Voir,* comme application de ces considérations, mon *Étude géométrique sur la cyclide* (journal *L'Institut* et *Bulletin de la Société philomathique,* novembre 1871).



tma et *tmb* sont deux plans isotropes tangents à la courbe G, et les génératrices correspondantes de la développable sont les droites isotropes *ma* et *mb*. Remarquons maintenant que, la droite *ab* étant la polaire du point *t* par rapport à l'ombilicale, le plan *mba* est perpendiculaire à la tangente *mt*; les génératrices de la développable, qui passent au point *m*, sont donc les deux droites isotropes passant par ce point dans le plan normal à la courbe.

J'imagine maintenant une droite passant par le point *m* et par le point *m'*, pris sur la courbe G, à une distance infiniment petite de *m*. Les cônes isotropes ayant ces deux points pour sommets se coupent suivant un cercle, dont le plan, perpendiculaire à *mm'*, passe par le milieu de ce segment, et dont le rayon, égal à *mm'*, est par conséquent infiniment petit. Le point *m'* venant à se confondre avec le point *m*, le plan du cercle d'intersection devient normal à la courbe au point *m*, le rayon de ce cercle devient nul et ce cercle se réduit à deux droites isotropes. Donc, quand une droite est tangente à une courbe gauche, le cercle, correspondant aux deux points de la courbe, qui sont réunis au point de contact, se compose des deux droites isotropes qui passent par ce point dans le plan normal à la courbe.

D'où cette conclusion : la développable isotrope, circonscrite à une courbe gauche, est la surface dérivée de cette courbe, lorsque la surface réglée, qui fixe le groupement de ses points, est la développable formée par les tangentes à la courbe.

Appliquons ces résultats à la recherche de la focale d'une courbe sphérique quelconque H; on sait, d'ailleurs, que cette focale est la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H.

En désignant par S la sphère qui contient cette courbe, pour qu'un point donné *m* soit situé sur une surface Σ dérivée de H, il est nécessaire et suffisant que le plan, associé au point *m* par rapport à la sphère [1], coupe la courbe H en deux points situés sur une génératrice de la surface réglée γ, qui détermine le groupement de points correspondant à la surface Σ. Si l'on considère en particulier la développable isotrope, qui correspond à la développable ayant H pour arête de rebroussement, pour qu'un point *m*

---

[1] Sur l'expression « plan associé à un point », *voir* n° 5.

soit situé sur cette développable isotrope, il faut et il suffit que le plan associé au point m soit tangent à la courbe H.

Si m est un point de la focale, c'est-à-dire de la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H, le plan associé à m est doublement tangent à H.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La focale d'une courbe sphérique est le lieu des points associés (par rapport à la sphère qui contient la courbe) *aux divers plans doublement tangents à cette courbe.*

14. En particulier, supposons que la courbe donnée soit une biquadratique sphérique; on a, dans ce cas, quatre systèmes de plans doublement tangents à cette courbe et qui correspondent aux quatre cônes du second degré sur lesquels on peut la placer. La focale se compose donc de quatre biquadratiques sphériques. Pour les construire, considérons un de ces cônes K et son sommet O; la biquadratique correspondante est le lieu des points associés aux plans tangents à ce cône. Ces plans tangents passant par le point fixe O, la courbe est située sur la sphère ayant ce point pour centre et coupant orthogonalement la sphère S, et elle est l'intersection de cette sphère par le cône supplémentaire du cône K dont le sommet est le centre de S.

Si la biquadratique donnée est une focale d'une surface anallagmatique, les quatre autres biquadratiques que l'on en déduit ainsi constituent avec elle la focale ordinaire de cette anallagmatique. On sait d'ailleurs que ces cinq courbes sont situées sur cinq surfaces du second degré homofocales; les trois coniques focales communes à ces surfaces constituent la focale singulière de l'anallagmatique.

15. *Remarques sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.* — Lorsqu'une surface passe par l'ombilicale, sa focale complète se compose généralement de deux courbes distinctes (dont chacune peut elle-même se décomposer en plusieurs autres). Les plans isotropes tangents à la surface, dont le point de contact est à distance finie, enveloppent une développable dont la ligne double est la *focale ordinaire* de la surface; la dévelop-

pable circonscrite le long de l'ombilicale a pour ligne double la *focale singulière*.

Pour prendre l'exemple le plus simple, on voit que la focale ordinaire d'une anallagmatique se compose de cinq biquadratiques sphériques qui ont entre elles les relations que j'ai indiquées plus haut, et que sa focale singulière se compose de trois coniques.

Une surface du second degré n'a généralement pas de focale singulière et sa focale ordinaire se compose de trois coniques; une sphère n'a qu'une focale singulière qui se réduit à son centre.

Quand on transforme une surface par rayons vecteurs réciproques, on voit facilement que la focale ordinaire de la transformée est la transformée de la focale ordinaire de la surface primitive.

Mais il n'en est pas de même relativement à la focale singulière. Pour voir ce qui a lieu dans ce cas, je ferai remarquer que tout point (réel ou imaginaire) de l'espace situé à distance finie est représenté par un cercle de l'espace dont le rayon est fini et dont le centre est situé également à distance finie.

Généralement, un point situé à l'infini n'est pas susceptible de mode de représentation, le cercle qui le représenterait étant alors rejeté entièrement à l'infini; il faut le définir par l'une quelconque des droites qui s'y croisent.

Lorsque le point considéré dans le plan de l'infini se trouve sur l'ombilicale, le cercle qui le représente se réduit à une droite dont la direction seule est déterminée. Un point de l'ombilicale n'a donc pas, à proprement parler, de représentation; mais si on le considère comme appartenant à une nappe d'une surface donnée, la droite qui le représente est alors déterminée; c'est la droite réelle du plan tangent à la nappe de la surface au point considéré.

Une sphère ayant une nappe unique, on voit que chaque point de l'ombilicale (considéré comme appartenant à la sphère) est représenté par une droite unique passant par le centre de cette sphère, si l'on suppose ce centre réel, en sorte que tous les points de l'ombilicale seront représentés par le système de toutes les droites qui rayonnent autour de ce point.

Une surface anallagmatique ayant deux nappes qui se coupent suivant l'ombilicale, chaque point de cette courbe est représenté par deux droites réelles; l'ensemble de toutes les droites que l'on obtient ainsi forme une *congruence* qui représente l'ombilicale.

Les considérations qui précèdent permettent d'établir facilement la proposition suivante :

Si l'on transforme une surface S *en* S′ *par une transformation par rayons vecteurs réciproques; au moyen d'une sphère décrite autour d'un point* O *comme centre avec un rayon égal à* R :

1° *La focale ordinaire de* S *a pour transformée la focale ordinaire de* S′;

2° *Pour obtenir la focale singulière de* S′ *considérons le cône isotrope ayant pour sommet le point* O; *il coupe* S *suivant une courbe à double courbure, à laquelle on peut circonscrire une infinité de plans doublement tangents enveloppant une surface développable* Σ.

La courbe polaire réciproque de cette surface, par rapport à la sphère décrite du point O *comme centre avec* $\frac{R}{\sqrt{2}}$ *comme rayon, est la focale cherchée.*

16. Si, en particulier, on considère une surface anallagmatique S, le cône isotrope ayant pour foyer le point O coupe l'anallagmatique suivant une biquadratique. La développable doublement circonscrite à cette courbe se compose de trois cônes du second degré, qui ont pour polaires, relativement à la sphère dont je viens de parler, les trois focales singulières de S′.

II. — Propriétés des normales aux surfaces anallagmatiques [1].

Proposition fondamentale.

17. Je rappellerai d'abord quelques notions importantes relatives aux surfaces anallagmatiques.

On peut définir une surface anallagmatique Σ comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S_1, des divers plans qui touchent une surface du second degré (ou *quadrique*) A_1.

---

[1] *Voir*, à ce sujet, *Bulletin de la Société philomathique*, janvier 1868, ma Note *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.*



L'intersection de S_1 et de A_1 est une biquadratique sphérique F_1 qui constitue l'une des focales ordinaires de Σ.

On sait, d'après M. Moutard, que la même surface est susceptible de quatre autres modes de génération semblables, au moyen de quatre autres quadriques A_2, A_3, A_4, A_5, et de quatre sphères correspondantes S_2, S_3, S_4, S_5.

Les quatre biquadratiques F_2, F_3, F_4, F_5 suivant lesquelles se coupent respectivement ces quadriques et ces sphères, constituent avec F_1 la focale ordinaire complète de Σ, et toutes ces courbes sont reliées entre elles de la façon que j'ai indiquée dans le Chapitre précédent.

Des nombreuses relations qui ont lieu entre ces diverses surfaces, je rappellerai seulement les suivantes, dont j'aurai besoin dans ce qui suit.

En désignant respectivement par O_1, O_2, O_3, O_4 et O_5 les cinq centres des sphères :

1° Quatre quelconques d'entre eux forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère qui a pour centre le cinquième point et par rapport à la quadrique correspondante; ainsi le tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ est conjugué par rapport à S_5 et à A_5.

D'où il suit que O_5 est le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, ou encore que la droite O_4O_5 est perpendiculaire au plan $O_1O_2O_3$.

2° Deux quelconques des cinq sphères se coupent suivant un plan qui contient les centres des trois autres. Ainsi, le plan radical des sphères S_1 et S_2, que je désignerai par la notation P_{12}, est le plan $O_3O_4O_5$.

L'axe radical des trois sphères S_1, S_2 et S_3, que je désignerai par la notation D_{45}, est la droite O_4O_5.

18. Ceci posé, soient S_i et S_j deux sphères principales de l'anallagmatique Σ, et A_i, A_j les quadriques correspondantes.

M désignant un point quelconque de Σ et (M) le cône isotrope dont ce point est le sommet, le plan associé à M par rapport à S_i touche A_i en un point m_i que l'on peut appeler le *point correspondant de* M *sur* A_i; ce plan est d'ailleurs le plan radical de S_i et de (M) considéré comme une sphère de rayon nul. De même, le plan associé à M par rapport à S_j touche A_j en un point m_j cor-

respondant aussi à M, et ce plan est le plan radical de S_j et de (M).

D'après un théorème connu, ces deux plans radicaux se coupent sur le plan radical P_{ij} des deux sphères S_i et S_j.

On peut donc énoncer la proposition fondamentale suivante :

THÉORÈME I. — *Si l'on désigne par m_i et m_j deux points correspondants sur les quadriques A_i et A_j, les plans tangents en ces points se coupent suivant une droite E située dans le plan P_{ij}. La droite $m_i m_j$ est normale à l'anallagmatique Σ, et le pied de la normale est situé dans le plan mené par D_{ij}, perpendiculairement à E.*

Comme l'on a dix plans P_{ij}, on voit, d'après le théorème précédent, que le système des normales à une anallagmatique donnée peut être engendré de dix façons différentes, au moyen de deux quadriques homofocales. De là résultent encore d'autres modes de génération de ces droites, au moyen de trois ou de quatre quadriques.

Ce sont ces diverses conséquences que je me propose d'étudier et de développer dans les paragraphes qui suivent.

Génération du système des droites normales à une même surface anallagmatique au moyen de deux quadratiques homofocales.

19. De la proposition qui précède on déduit facilement le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Étant données deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et un plan arbitraire P_{12}, si, de chaque droite E de ce plan on mène des plans tangents aux deux quadriques, et si l'on joint deux à deux les points de contact appartenant à des surfaces différentes, toutes les droites ainsi obtenues sont normales à une même surface anallagmatique Σ.*

J'ajouterai que la *surface Σ est le lieu des points d'intersection de chacune des normales avec le plan mené par la droite, qui est le lieu des pôles du plan P_{12} par rapport aux surfaces homofocales à A_1 et A_2, perpendiculairement à la droite E correspondant à la normale.* On a ainsi un mode simple et direct de

génération de la congruence de droites formée par les normales à une anallagmatique; et, comme je l'ai fait remarquer, cette congruence peut être engendrée, de la même façon, de dix manières différentes.

Tout ceci se rattache à l'étude de deux complexes de droites remarquables, que l'on peut définir ainsi qu'il suit :

Étant données arbitrairement deux quadriques, et m, m' désignant deux points pris respectivement sur chacune de ces surfaces, le premier complexe est composé des droites mm' telles que les plans tangents en ces points se coupent sur une droite fixe. Le deuxième complexe (réciproque du premier) est composé des droites d'intersection des plans tangents en m et en m' quand la droite mm' s'appuie sur une droite fixe.

20. La construction précédente donne, pour chaque point m de A_1, deux des normales à Σ qui s'y croisent; comme ces deux droites doivent être symétriques par rapport au plan tangent à ce point, on en déduit la proposition suivante :

Théorème III. — *Si, par une droite* D, *prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans tangents à deux quadriques homofocales* A_1, A_2, *et qui la touchent respectivement en* p_1, q_1 *et* p_2, q_2, *la normale menée en* p_1 *à la quadrique* A_1 *est dans le plan des deux droites* p_1p_2 *et* p_1q_2, *et fait avec elles des angles égaux.*

Si l'on considère le quadrilatère $p_1q_1p_2q_2$, on voit que deux côtés consécutifs quelconques de ce quadrilatère, p_1q_1 et q_1p_2 par exemple, sont également inclinés sur la normale en q_1, et que leur plan contient cette normale; d'où cette conséquence curieuse :

Théorème IV [1]. — *Étant données deux quadriques homofocales quelconques, si un rayon lumineux, mené d'une façon quelconque dans l'espace, se réfléchit une première fois sur la première surface, une seconde fois sur la deuxième, une troi-*

---

[1] Il est bien clair que l'on doit choisir d'une façon convenable les points de réflexion; de plus, on peut remarquer que deux des rayons réfléchis sont virtuels.

sième fois sur la première, et enfin une quatrième fois sur la deuxième, après ces quatre réflexions, il reprend la même route, en sorte que, quel que soit le nombre de réflexions analogues qu'il éprouve, il parcourt constamment les quatre côtés du même quadrilatère.

En s'appuyant sur la théorie bien connue des caustiques, on déduit de là la proposition suivante, qui s'applique également aux coniques homofocales [1] et donne alors comme cas particulier la propriété focale qui sert de définition à l'ellipse et à l'hyperbole.

Théorème V. — *Étant données deux quadriques homofocales quelconques, si, par une droite prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces aux points p_1, p_2 et q_1, q_2, la somme de deux côtés consécutifs du quadrilatère formé par ces quatre points est égale à la somme des deux autres, en sorte que l'on a*

$$p_1 q_1 + q_1 p_2 = p_2 q_2 + q_2 p_1.$$

21. Aux propositions précédentes se rattache un mode de transformation de droites dans l'espace, qui mérite d'être signalé.

Étant données deux quadriques homofocales A et B et une droite quelconque D, considérons un des points où cette droite rencontre A, et soit a ce point; soit de même b un des points où la droite coupe B, les plans tangents en a et en b se coupent suivant une droite par laquelle on peut encore faire passer un plan tangent à A et un plan tangent à B; Δ désignant la droite qui joint leurs points de contact, je dirai que D et Δ sont des droites correspondantes conjuguées.

A une droite quelconque de l'espace D correspondent quatre droites Δ; si un rayon lumineux est dirigé suivant la droite D, après s'être réfléchi successivement sur chacune des deux qua-

---

[1] Il est presque inutile de dire que tous les théorèmes énoncés dans ce Mémoire s'appliquent également aux anallagmatiques et aux coniques planes, ainsi qu'aux courbes sphériques analogues.



driques, sa direction coïncidera avec celle d'une des droites conjuguées Δ, et l'on obtiendra ces quatre droites en choisissant, de toutes les façons possibles, les points où se fait la réflexion.

Du théorème de Malus il résulte d'ailleurs que si un système de droites D est normal à une même surface, il en est de même des systèmes des droites conjuguées.

22. Le système des droites normales à une anallagmatique Σ étant défini comme je l'ai fait dans le n° 19 au moyen des deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et du plan fixe P_{12}, on peut se proposer de déterminer tous les autres éléments qui définissent Σ.

En conservant les notations du n° 20, si l'on désigne en outre par K_j^i la conique suivant laquelle le plan P_{ij} coupe la quadrique A_i, on obtiendra facilement les propositions suivantes :

Les centres O_1 et O_2 des sphères correspondant aux quadriques A_1 et A_2 sont respectivement les pôles du plan P_{12} par rapport à ces surfaces. Les centres des trois autres sphères sont les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre points d'intersection des coniques K_2^1 et K_1^2.

Si l'on circonscrit une surface développable à la quadrique A_1 et à la conique K_1^2, les trois autres coniques doubles de cette surface sont les coniques K_1^3, K_1^4 et K_1^5, et la développable est circonscrite à la sphère S_1.

De là résulte, en particulier, une construction très simple des diverses quadriques A_1, A_2, A_3, ..., lorsque la surface anallagmatique est définie par l'une d'elles et la sphère correspondante.

Théorème VI. — *Une surface anallagmatique étant définie par une surface du second degré et une sphère, la développable circonscrite à ces deux surfaces a quatre lignes doubles qui sont des coniques. D'après un théorème dû à M. Chasles, par chacune de ces coniques on peut faire passer une quadrique homofocale à la première; les cinq quadriques ainsi déterminees sont précisément celles au moyen desquelles on peut engendrer la surface.*

23. Le système des normales à une surface anallagmatique Σ peut être *en général* engendré de dix manières différentes par le mode de construction que j'ai indiqué ci-dessus.

Si la surface a un plan de symétrie, quatre de ces modes de génération ne peuvent être généralement appliqués et deviennent illusoires.

On peut, en effet, définir cette surface au moyen d'une quadrique et d'une sphère S ayant son centre dans un des plans de symétrie H de cette quadrique; les centres des autres sphères principales de l'anallagmatique sont les sommets des cônes passant par l'intersection de la quadrique et de la sphère S. Dans le cas considéré, l'un de ces centres étant à l'infini, la sphère, la quadrique et le plan fixe correspondant se confondent tous les trois avec le plan de symétrie H; la proposition fondamentale ne peut donc plus s'appliquer, et il est nécessaire d'étudier directement ce cas spécial.

Mais avant d'aborder cette étude, je dois encore faire une remarque sur un cas singulier qui semble présenter quelque intérêt.

24. Les normales à une surface anallagmatique ayant trois plans de symétrie peuvent être considérées comme le lieu des diverses droites qui joignent les points de deux quadriques homofocales pour lesquels les plans tangents sont parallèles.

Considérons maintenant deux quadriques homofocales, et soit H un de leurs plans de symétrie; prenons une droite quelconque E située dans ce plan, et menons par cette droite des plans tangents à ces deux surfaces; les droites qui joignent les points de contact situés sur l'une des surfaces aux points de contact situés sur l'autre sont toutes normales à une même série de surfaces parallèles pour lesquelles on saura même déterminer les lignes de courbure.

Dans le cas général (celui où le plan H n'est pas un plan de symétrie), on sait que, parmi ces surfaces parallèles, se trouve une anallagmatique; dans le cas singulier que je considère, cette anallagmatique est rejetée à l'infini.

Je remarque, en effet, que le lieu des pôles du plan H, par rapport aux quadriques homofocales aux quadriques données, est l'axe Oz perpendiculaire au plan de symétrie H; les points de

contact des plans menés par E aux deux quadriques sont situés sur un cercle dont le plan est perpendiculaire à E, et, par conséquent, parallèle au plan mené par Oz, perpendiculairement à cette droite. Il en résulte, d'après la construction donnée dans le n° 16, que tous les points de l'anallagmatique sont rejetés à l'infini.

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES

DE LA

THÉORIE DES SURFACES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872.

1.

Les beaux travaux de MM. Bonnet, Bour et Codazzi ont notablement perfectionné la théorie des surfaces; les formules fondamentales de cette théorie me paraissent pouvoir être exposées d'une façon assez simple....

Je suppose les différents points de la figure rapportés à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et les coordonnées des points de la surface exprimées en fonction de deux variables indépendantes u et v.

Soient (u) et (v) les courbes de la surface obtenues en donnant respectivement à u et à v des valeurs constantes.

Imaginons un trièdre trirectangle MX, MY, MZ, qui se déplace de façon que son sommet M décrive la surface, l'arête MZ lui étant normale; les deux arêtes MX et MY sont constamment situées dans le plan tangent en M, mais leur mouvement reste indéterminé.

Soient

$$\begin{matrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, \\ \cos\xi, & \cos\upsilon, & \cos\zeta, \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu \end{matrix}$$

les cosinus que font respectivement les axes MX, MY, MZ avec les axes fixes Ox, Oy, Oz.

Si l'on passe d'un point quelconque (u, v) de la surface à un point infiniment voisin $(u + du,\ v + dv)$, d'après une formule bien connue sur le déplacement infiniment petit d'un corps invariable [1], on a les neuf relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} d\cos\alpha &= +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\xi + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\lambda,\\ d\cos\xi &= -(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\alpha - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\lambda,\\ d\cos\lambda &= -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\alpha + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\xi,\\ d\cos\beta &= +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\upsilon + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\mu,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Je n'écris que les quatre premières de ces relations, les autres s'en déduisant immédiatement; M, N, P, Q, R et S désignent six fonctions données de u et de v.

II.

Comme les développements qui suivent s'appuient surtout sur les formules données [2] par M. Serret pour les lignes à double courbure, je transcrirai ici ces formules.

Soient

$$\begin{matrix} \cos a, & \cos b, & \cos c,\\ \cos x, & \cos y, & \cos z,\\ \cos l, & \cos m, & \cos n \end{matrix}$$

les cosinus des angles que font respectivement, avec les axes fixes Ox, Oy et Oz, la tangente à la courbe, la normale principale et l'axe du plan osculateur.

Désignons de plus par ds un élément infiniment petit de la courbe, par r le rayon de courbure et par t le rayon de torsion en ce point.

Les formules de M. Serret sont contenues dans le Tableau sui-

---

[1] Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VI, la Note de M. Picart : *Nouvelle théorie du déplacement continu d'un corps solide*, p. 160.

[2] Voir *Calcul différentiel* de Lacroix, t. II, p. 284 et 299.

vant :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &d\cos a = \cos x\frac{ds}{r}, \qquad d\cos l = \cos x\frac{ds}{t},\\ &d\cos b = \cos y\frac{ds}{r}, \qquad d\cos m = \cos y\frac{ds}{t},\\ &d\cos c = \cos z\frac{ds}{r}, \qquad d\cos n = \cos z\frac{ds}{t};\\ &\quad d\cos x = -\cos a\frac{ds}{r} - \cos l\frac{ds}{t},\\ &\quad d\cos y = -\cos b\frac{ds}{r} - \cos m\frac{ds}{t},\\ &\quad d\cos z = -\cos c\frac{ds}{r} - \cos n\frac{ds}{t}. \end{aligned}\right.$$

Elles sont, on le voit facilement, contenues dans les formules générales (1).

Je suppose maintenant, en conservant toutes les notations précédentes, que la ligne considérée soit tracée sur la surface donnée.

La droite MZ étant normale à la surface, en désignant par i l'angle que fait la courbe avec l'axe MX, et par ϖ l'angle que fait la normale principale de la courbe avec la normale à la surface, les formules d'Euler donnent le système de formules suivant :

$$\begin{aligned} &\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma = \cos i,\\ &\cos a\cos\xi + \cos b\cos\upsilon + \cos c\cos\zeta = \sin i,\\ &\cos a\cos\lambda + \cos b\cos\mu + \cos c\cos\nu = 0;\\ &\cos x\cos\alpha + \cos y\cos\beta + \cos z\cos\gamma = \sin\varpi\sin i,\\ &\cos x\cos\xi + \cos y\cos\upsilon + \cos z\cos\zeta = -\sin\varpi\cos i,\\ &\cos x\cos\lambda + \cos y\cos\mu + \cos z\cos\nu = \cos\varpi;\\ &\cos l\cos\alpha + \cos m\cos\beta + \cos n\cos\gamma = -\cos\varpi\sin i,\\ &\cos l\cos\xi + \cos m\cos\upsilon + \cos n\cos\zeta = \cos\varpi\cos i,\\ &\cos l\cos\lambda + \cos m\cos\mu + \cos n\cos\nu = \sin\varpi. \end{aligned}$$

Si maintenant nous différentions ces neuf équations en tenant compte des relations (1) et (2), nous obtiendrons, après quelques réductions faciles, le Tableau suivant :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{ds}{r}\sin\varpi = di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv,\\ &\frac{ds}{r}\cos\varpi = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\sin i,\\ &-d\varpi + \frac{ds}{t} = -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i \end{aligned}\right.$$

qui donne les trois premières équations fondamentales de la théorie des courbes tracées sur les surfaces.

Les quantités $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, ... étant, par leur définition même, des différentielles exactes, en exprimant que cette condition est remplie, on obtiendra les trois relations contenues dans le Tableau suivant :

$$(B)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dM}{dv}-\frac{dN}{du}&=RS-PQ,\\ \frac{dP}{dv}-\frac{dS}{du}&=MQ-RN,\\ \frac{dR}{dv}-\frac{dQ}{du}&=NP-MS.\end{aligned}\right.$$

III.

Supposons maintenant que les courbes (u) et (v) déterminent sur la surface un réseau orthogonal, et que les axes MX et MY soient, en chaque point, tangents aux deux courbes qui s'y croisent à angle droit.

En désignant par ds un élément linéaire quelconque de la surface, soit

$$ds^2=E^2\,du^2+G^2\,dv^2,$$

d'où

$$ds\cos i=E\,du,\qquad ds\sin i=G\,dv,$$

et

$$\begin{aligned} ds\cos a&=E\,du\cos\alpha+G\,dv\cos\xi,\\ ds\cos b&=E\,du\cos\beta+G\,dv\cos\upsilon,\\ ds\cos c&=E\,du\cos\gamma+G\,dv\cos\zeta.\end{aligned}$$

Je remarque, avec M. Bonnet (¹), que par définition ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes; exprimant ces conditions, en tenant compte des équations (1), nous obtiendrons les relations contenues dans le Tableau suivant :

$$(C)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dE}{dv}=-GM,\qquad ES+GR=0,\\ &\frac{dG}{du}=EN,\qquad \operatorname{tang} i=\frac{G\,dv}{E\,du}.\end{aligned}\right.$$

(¹) *Mémoire sur la théorie des surfaces,* etc. (*Journal de l'École Polytechnique,* XLIIᵉ cahier, p. 35).

J'ai introduit dans ce Tableau la valeur de $\tang i$, en fonction de u et de v.

On a ainsi, en A, B, C, toutes les formules fondamentales relatives au cas où les courbes (u) et (v) sont orthogonales.

Il resterait à prouver que, si les fonctions M, N, P, Q, R, S, E, G satisfont aux équations aux différences partielles contenues dans les Tableaux (B) et (C), ces fonctions déterminent effectivement une surface; pour cette démonstration, je renverrai au Mémoire de M. Bonnet, déjà cité.

IV.

Considérons maintenant le cas général; soit 2ω l'angle sous lequel, en un point quelconque de la surface, se coupent les courbes (u) et (v) qui se croisent en ce point.

Nous choisirons les axes MX et MY, de telle sorte qu'ils coïncident avec les bissectrices de cet angle.

En désignant par ds un élément linéaire quelconque de la surface, posons

$$ds^2 = \mathrm{E}^2 du^2 + 2\mathrm{EG}\cos 2\omega . du\, dv + \mathrm{G}^2 dv^2,$$

d'où

$$ds \cos i = (\mathrm{E}\, du + \mathrm{G}\, dv)\cos\omega, \qquad ds \sin i = (\mathrm{E}\, du - \mathrm{G}\, dv)\sin\omega,$$

et

$$ds \cos a = (\mathrm{E}\, du + \mathrm{G}\, dv)\cos\omega \cos\alpha + (\mathrm{E}\, du - \mathrm{G}\, dv)\sin\omega\cos\xi;$$

je ne transcris pas les valeurs de $ds \cos b$ et $ds \cos c$.

Si nous exprimons que ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes, nous obtiendrons les relations contenues dans le Tableau suivant, où j'ai transcrit la valeur de $\tang i$,

$$(\mathrm{C}')\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{d\mathrm{E}}{dv} - \dfrac{d\mathrm{G}}{du}\right)\dfrac{1}{\tang\omega} = \mathrm{E}\left(\mathrm{N} + \dfrac{d\omega}{dv}\right) + \mathrm{G}\left(\mathrm{M} - \dfrac{d\omega}{du}\right), \\ \left(\dfrac{d\mathrm{E}}{dv} + \dfrac{d\mathrm{G}}{du}\right)\tang\omega = -\mathrm{E}\left(\mathrm{N} + \dfrac{d\omega}{dv}\right) + \mathrm{G}\left(\mathrm{M} - \dfrac{d\omega}{du}\right), \\ (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega = (\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega, \\ \tang i = \dfrac{\mathrm{E}\, du - \mathrm{G}\, dv}{\mathrm{E}\, du + \mathrm{G}\, dv}\tang\omega. \end{array} \right.$$

Les Tableaux (A), (B), (C′) renferment toutes les formules fondamentales relatives au cas le plus général.

En terminant, je ferai remarquer que les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, au cas de l'espace, lorsqu'on en détermine les points par les intersections successives de trois séries quelconques de surfaces.

Je reviendrai sur ce sujet.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES

QUI SE RATTACHENT

A L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872.

1. Tous les géomètres connaissent, depuis les découvertes de Poncelet et de Jacobi, les liens étroits qui rattachent entre elles la théorie des fonctions elliptiques et les propriétés des polygones qui sont à la fois inscrits dans une section conique et circonscrits à une autre conique.

Bien que cette question soit maintenant parfaitement connue, je crois cependant, pour les lecteurs des *Nouvelles Annales,* devoir la développer dans tous ses détails.

2. Étant donnée une conique dont l'équation soit

$$f(x, y) = 0,$$

j'appelle *puissance* d'un point par rapport à cette conique la valeur que prend le polynome $f(x, y)$, quand on substitue à x et à y les valeurs des coordonnées de ce point; et je m'appuierai principalement sur les deux lemmes suivants, dont le premier est une conséquence immédiate d'un théorème bien connu de Newton, sur les transversales des courbes algébriques.

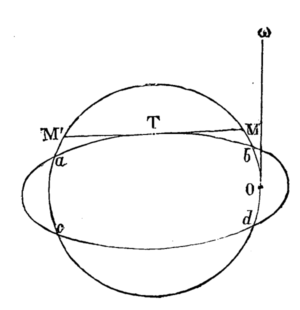
Lemme I. — *Soient* M *et* M′ *deux points situés dans le plan d'une conique, et* α, β *les deux points où la droite* MM′ *coupe la conique; cela posé, les puissances des points* M *et* M′, *relativement à cette courbe, sont proportionnelles aux produits*

$$M\alpha . M\beta \quad \text{et} \quad M'\alpha . M'\beta.$$

Lemme II. — *Soient* M *et* M′ *deux points situés dans le plan d'une conique; si, par ces deux points, on mène un cercle quelconque qui coupe la conique en* a, b, c, d, *les puissances des points* M *et* M′, *par rapport à la conique, sont proportionnelles aux produits*

$$Ma.Mb.Mc.Md \quad \text{et} \quad M'a.M'b.M'c.M'd \text{ (1)}.$$

3. Cela posé, considérons un cercle et une conique se coupant aux points a, b, c et d. Imaginons une tangente mobile qui roule



sur la conique; soit T le point où elle touche cette conique, et M, M′ les deux points où elle coupe le cercle.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, le rayon du cercle pris pour unité, et nous fixerons la position de chaque point du cercle par l'angle que fait la droite, joignant le point donné à un point fixe O pris sur le cercle, avec la tangente $O\omega$ menée au cercle en ce point.

La tangente mobile occupant une certaine position, déplaçons-la infiniment peu; φ et φ' désignant les angles qui fixent les positions des points M et M′,

$$2\,d\varphi \quad \text{et} \quad 2\,d\varphi'$$

mesureront les arcs décrits par ces points, et l'on aura évidemment

$$\frac{d\varphi}{MT} = \frac{d\varphi'}{M'T}.$$

(1) Voir, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* janvier 1865, ma Note *Sur les propriétés générales des courbes algébriques,* et, *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. IX, p. 188, une Note de M. Grant intitulée : *Démonstration d'un théorème de Géométrie.*

Désignons, pour un instant, par

$$\pi(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \pi(\mathrm{M}')$$

les puissances des points M et M′ relativement à la conique; on a, en vertu du lemme I,

$$\frac{\pi(\mathrm{M})}{\pi(\mathrm{M}')} = \frac{\overline{\mathrm{MT}}^2}{\overline{\mathrm{M'T}}^2};$$

d'autre part, en vertu du lemme II,

$$\frac{\pi(\mathrm{M})}{\pi(\mathrm{M}')} = \frac{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c.\mathrm{M}d}{\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{M'T}} = \frac{\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c.\mathrm{M}d}}{\sqrt{\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d}},$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}c.\mathrm{M}d}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d}}.$$

4. Désignons par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

les angles qui fixent les positions des points a, b, c, d sur le cercle; nous aurons

$$\mathrm{M}a = 2\sin(\varphi - \alpha), \qquad \mathrm{M}'a = 2\sin(\varphi' - \alpha), \qquad \ldots;$$

et l'équation précédente deviendra, en développant et divisant par $\cos^2\varphi$,

$$\frac{d\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha)(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\beta)(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\gamma)(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta)}}$$
$$= \frac{d\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\alpha)(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\beta)(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\gamma)(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\delta)}};$$

ou encore, en posant pour abréger

$$\operatorname{tang}\varphi = x, \qquad \operatorname{tang}\varphi' = y, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \mathrm{A}, \qquad \operatorname{tang}\beta = \mathrm{B}, \qquad \ldots,$$

$$(1)' \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{\sqrt{(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})(x-\mathrm{C})(x-\mathrm{D})}} \\ &\quad = \frac{dy}{\sqrt{(y-\mathrm{A})(y-\mathrm{B})(y-\mathrm{C})(y-\mathrm{D})}}; \end{aligned} \right.$$

c'est l'équation différentielle dont l'étude sert de base à la théorie des fonctions elliptiques, et qui a été intégrée pour la première fois par Euler.

5. Les considérations géométriques qui précèdent donnent immédiatement cette intégrale. On satisfait évidemment, en effet, à l'équation précédente [ou à l'équation (1)], si l'on suppose que les angles φ et φ' correspondent à deux points M et M', tels que la corde MM' enveloppe une conique passant par les points a, b, c et d; comme l'équation des coniques qui passent par ces points renferme une constante arbitraire, on voit que l'on a l'intégrale générale de l'équation.

Considérons trois points quelconques a, b, c communs au cercle et à la conique; on sait que, MT désignant une tangente quelconque à cette conique, et (a), (b), (c) désignant les distances à cette droite des points a, b, c, on a, quelle que soit la tangente, la relation

$$\lambda\sqrt{(a)}+\mu\sqrt{(b)}+\nu\sqrt{(c)}=0,$$

où λ, μ, ν désignent des quantités constantes pour la même conique, mais qui renferment une quantité arbitraire, si l'on considère toutes les coniques qui passent par les points a, b, c et d.

Joignons aux points M et M' les points a, b et c; les aires des triangles MaM', MbM', McM', ayant même base, sont entre elles comme leurs hauteurs

$$a),\quad (b),\quad (c);$$

les aires de ces triangles, dont les angles aux sommets sont égaux, sont entre elles comme les produits

$$a\mathrm{M}.a\mathrm{M}',\quad b\mathrm{M}.b\mathrm{M}',\quad c\mathrm{M}.c\mathrm{M}';$$

on a donc

$$\frac{(a)}{a\mathrm{M}.a\mathrm{M}'}=\frac{(b)}{b\mathrm{M}.b\mathrm{M}'}=\frac{(c)}{c\mathrm{M}.c\mathrm{M}'}.$$

D'où

$$\lambda\sqrt{a\mathrm{M}.a\mathrm{M}'}+\mu\sqrt{b\mathrm{M}.b\mathrm{M}'}+\nu\sqrt{c\mathrm{M}.c\mathrm{M}'}=0,$$

et nous avons là l'intégrale générale des équations (1) et (1').

En introduisant les angles φ, φ', α, ..., ou plutôt leurs tan-

gentes y, x, A, ..., elle prendra la forme connue [1]

$$\lambda\sqrt{(y-A)(x-A)}+\mu\sqrt{(y-B)(x-B)}+\nu\sqrt{(y-C)(x-C)}=0.$$

6. La forme précédente de l'intégrale, bien qu'élégante, a le défaut de ne pas mettre en évidence la constante arbitraire qui y entre et de ne pas contenir symétriquement les quantités A, B, C, D.

Pour trouver une autre forme de l'intégrale, je prendrai pour point de départ la proposition suivante :

Théorème. — *Soit une conique passant par quatre points a, b, c et d d'un cercle; une tangente mobile roule sur cette conique. Si l'on désigne par* M *et* M' *les deux points où, dans une de ses positions, cette tangente coupe le cercle, et si l'on partage d'une façon quelconque en deux groupes a et b, c et d, les quatre points communs au cercle et à la conique, le rapport*

$$\frac{\sqrt{Ma.Mb.M'c.M'd}-\sqrt{Mc.Md.M'a.M'b}}{MM'}$$

reste constant, lorsque la tangente se déplace tangentiellement à la conique.

Il résulte de là que, K désignant une constante arbitraire, l'intégrale de l'équation d'Euler est

$$\sqrt{Ma.Mb.M'c.M'd}-\sqrt{Mc.Md.M'a.M'b}=K.MM',$$

ou encore, en introduisant les quantités x, y, A, B, ...,

$$\sqrt{(x-A)(x-B)(y-C)(y-D)} \\ -\sqrt{(y-A)(y-B)(x-C)(x-D)}=K(x-y).$$

7. Le résultat précédent, qui est peut-être nouveau, peut se mettre sous la forme suivante :

Étant donnée l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

---

[1] Darboux, *Recherches sur les surfaces orthogonales* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. II).

où $f(x)$ représente un polynome du quatrième degré en x, si l'on décompose d'une manière arbitraire le polynome $f(x)$ en deux facteurs du second degré, en posant

$$f(x) = \theta(x)\,\varphi(x),$$

l'intégrale générale de cette équation est

$$\frac{\sqrt{\theta(x)\,\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\,\varphi(x)}}{x - y} = \mathrm{K},$$

K *désignant une constante arbitraire.*

SUR LA SURFACE DE STEINER.

Bulletin de la Société philomathique; 1872.

Les lignes asymptotiques de la surface de Steiner ont été données par M. Clebsch; on en déduit facilement les lignes asymptotiques de la surface de troisième ordre à quatre points nodaux qui en est la réciproque.

En étudiant récemment cette dernière surface, j'en ai retrouvé les lignes asymptotiques sous une forme qui paraîtra peut-être présenter quelque intérêt, même après les recherches dont je viens de parler.

Soit M un point quelconque de la cubique à quatre points nodaux; d'après la propriété fondamentale de cette surface, le cône circonscrit à la surface, qui a pour sommet le point M, se décompose en deux cônes du second degré dont chacun touche la surface suivant une cubique gauche.

Cela posé, les deux surfaces développables, qui ont ces cubiques pour arêtes de rebroussement, coupent la surface suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point M.

Soit tracée sur la surface une ligne asymptotique quelconque Z; de chacun des points de cette courbe on peut mener deux cônes du second degré circonscrits à la surface. La cubique gauche, qui est la courbe de contact d'un de ces cônes, est l'arête de rebroussement d'une surface développable passant par Z.

Je dirai que cette cubique appartient à l'asymptotique Z. Toutes les cubiques qui appartiennent à Z passent par les quatre points nodaux; les cônes circonscrits à la surface suivant ces courbes ont

leurs sommets sur Z ; les surfaces développables dont elles sont les arêtes de rebroussement contiennent cette courbe.

Deux quelconques d'entre elles, indépendamment des quatre points nodaux, se coupent en un cinquième point qui est le sommet d'un cône du second degré passant par ces deux cubiques.

SUR LA

REPRÉSENTATION DES FORMES BINAIRES

DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE.

Bulletin de la Société philomathique; 1872.

On peut représenter une forme binaire sur une ligne droite par n points de cette droite correspondant aux racines de l'équation que l'on obtient en égalant la forme à zéro. On peut dans ce but employer aussi une courbe quelconque, plane ou gauche, de genre zéro, et un grand nombre de propriétés du système de points situés sur cette courbe, que j'appellerai courbe fondamentale, se déduiront immédiatement de celles des formes qu'ils représentent.

La courbe fondamentale étant choisie, on pourra aussi d'une façon plus simple représenter des groupes de points (ou des formes) par un certain nombre d'éléments (points ou droites) qui pourront les déterminer; ce mode de représentation variera d'ailleurs suivant la nature de la courbe choisie.

Étant données deux formes du même degré f et φ, j'appellerai, pour abréger, *faisceau de ces formes* l'ensemble des formes comprises dans l'expression $f + \lambda \varphi$; un faisceau est évidemment déterminé quand on connaît deux des formes qu'il contient.

Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons une conique H pour courbe fondamentale; une forme quadrique sera déterminée par deux points de cette conique, ou bien, si l'on veut, par la droite qui joint ces deux points. C'est ce dernier mode de représentation que nous emploierons (*voir* à ce sujet un remarquable article de M. Weyr, *sur l'involution de degré supérieur,* Crelle, t. 72). Cela posé, on voit que toutes les formes quadratiques d'un faisceau

sont représentées par des droites concourant en un même point, qui représentera ce faisceau. D'où l'on déduit immédiatement que la propriété connue de l'hexagone de Pascal peut s'énoncer algébriquement de la façon suivante :

Étant donnée une équation du sixième degré $f(x) = 0$ *dont les racines soient* α_i, *si l'on pose pour abréger*

$$A_{kh} = (x - \alpha_k)(x - \alpha_k),$$

on pourra déterminer six facteurs numériques λ, μ, λ', μ', λ'' *et* μ'' *de telle sorte que l'on ait identiquement*

$$\lambda A_{12} + \mu A_{45} = \lambda' A_{23} + \mu' A_{56} = \lambda'' A_{34} + \mu'' A_{16}.$$

Cette propriété de six points d'une droite appliquée à une conique donne le théorème de Pascal; appliquée à une cubique, elle fournit à la fois des propriétés de six points quelconques de cette courbe (et par conséquent de six points quelconques de l'espace) et des propriétés de sept points quelconques situés sur cette cubique.

Dans ce qui suit, je considérerai spécialement une cubique gauche fondamentale K. Une forme quadratiqne sera déterminée par deux points de cette courbe et représentée par la sécante qui joint ces deux points. Les droites représentatives d'un faisceau de formes quadratiques sont les génératrices (sécantes de la cubique) d'une quadrique passant par K; une telle surface représentera donc un faisceau de formes quadratiques.

Cela posé, la propriété que je viens d'énoncer relativement aux racines de l'équation du sixième degré donnera immédiatement la proposition suivante :

Étant pris sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sur K, il y existe une droite D (sécante de la cubique) qui rencontre les neuf droites contenues dans les deux tableaux suivants :

E.......	3	(12)	(54)	1	(23)	(56)	2	(34)	(16)
	6	(12)	(54)	4	(23)	(56)	5	(34)	(16)
F.......	7	(12)	(54)	7	(23)	(56)	7	(34)	(16)

La droite D rencontre donc les six droites contenues dans le tableau E, ce qui fournit une propriété de six points quelconques



de l'espace (cette propriété se rattache d'ailleurs à de belles propositions données par M. P. Serret sur les cubiques gauches).

Le tableau F montre en outre que la droite D ayant été déterminée au moyen des points 1, 2, 3, 4, 5 et 6, tout plan sécant mené par D rencontre les côtés de l'hexagone, dont ils sont les sommets, en six points situés deux à deux sur trois droites concourantes.

Le point de concours décrit, lorsqu'on fait varier le plan, la cubique gauche déterminée par les six points.

Dans ce qui précède, 3 (12) (54) désigne la droite qui, passant par le point 3, rencontre les droites 12 et 54; les autres notations ont une signification analogue.

On peut énoncer ces résultats de la façon suivante :

« Un hexagone étant inscrit dans une cubique, par la courbe et chaque couple de côtés opposés de l'hexagone on peut faire passer une quadrique; les trois quadriques ainsi obtenues ont une génératrice commune qui est une sécante de la cubique. »

Une forme cubique est déterminée par trois points de K; les plans osculateurs de la courbe en ces points passent par un point p situé, comme on le sait, par un beau théorème de M. Chasles, dans le plan P qui contient les trois points. Je dirai que le point p et le plan P sont associés; si le point p parcourt une droite, le plan P tourne autour d'une autre droite qui est associée à la première. Je représenterai une forme cubique par le point associé au plan qui contient les trois points de K qui la déterminent.

Une forme cubique représentée par un point p est déterminée par les trois points de contact a, b, c des plans osculateurs que l'on peut mener de ce point à la courbe. Si l'on prend les conjugués harmoniques de chacun des points a, b, c par rapport aux deux autres, on obtient un autre système de trois points qui détermine le covariant cubique de la forme; les plans osculateurs en ces points se coupent en un point p' représentatif du covariant.

Cela posé, les deux points p et p' sont situés sur une même sécante de la cubique et partagent harmoniquement le segment intercepté par la courbe sur cette sécante. Je dirai que les deux points se correspondent par rapport à la cubique.

Le faisceau de la forme représenté par le point p est représenté par la sécante qui passe par ce point.

J'ajouterai la remarque suivante :

« Le plan polaire d'un point donné relativement à la surface développable S, dont K est l'arête de rebroussement, est le plan associé au point correspondant. »

Étant données deux formes cubiques représentées par les points p et q, les différentes formes contenues dans le faisceau qu'elles déterminent sont représentées par les différents points de la droite pq. Une droite dans l'espace représentera donc un faisceau de formes cubiques.

Si une droite rencontre une génératrice de S, leur point de rencontre représente une forme cubique ayant un facteur carré. D'où cette conséquence :

« Une droite (représentant un faisceau) rencontre quatre génératrices de S; les quatre points où ces droites touchent K représentent le Jacobien du réseau. »

Étant donnée une forme biquadratique F représentée par quatre points de K, menons les tangentes en ces points. Ces quatre droites n'étant jamais sur une même quadrique, il n'y a que deux droites D et D' qui les rencontrent toutes.

Donc F est le Jacobien des deux faisceaux de formes cubiques, lesquels sont représentés par les droites D et D'.

Ces deux droites sont associées par rapport à la cubique. Je représenterai la forme F par ces deux droites ou simplement par l'une d'entre elles, puisque par là même l'autre sera déterminée.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR LA

SURFACE RÉCIPROQUE DE LA SURFACE DE STEINER.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872 et 1873.

I. — *Détermination des lignes asymptotiques de la surface* [1].

1. La théorie de cette surface se rattache intimement, comme je me propose de le faire voir dans cette Note, à la théorie des formes biquadratiques simultanées.

Soient a, b, c, d et e cinq fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes x, y et z; nous pouvons considérer les valeurs que prennent ces fonctions en un point de l'espace comme les coordonnées (pentaédriques) de ce point; il est clair d'ailleurs qu'entre ces coordonnées d'un point existe une relation linéaire, satisfaite identiquement, et que je mettrai sous la forme

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0, \tag{1}$$

α, β, γ, δ et ε désignant les constantes numériques que je rattacherai au polynome du quatrième degré

$$\omega = \alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon;$$

en posant

$$u = a t^4 + 4 b t^3 + 6 c t^2 + 4 d t + e,$$

---

[1] Les lignes asymptotiques de la surface de Steiner (qui sont réciproques des lignes que nous étudions ici) ont été trouvées pour la première fois par M. Clebsch (*Journal de Borchardt,* t. LXVIII, p. 1).

Sur la relation qui a lieu entre les lignes asymptotiques d'une surface et celles de la réciproque, *voir* une Note de M. Mannheim (*Bulletin des Sciences mathématiques,* t. I, p. 198).

on voit que la relation précédente exprime que l'invariant quadratique simultané des formes u et ω est égal à zéro.

2. L'équation $u = 0$ [1], si l'on y considère t comme un paramètre variable, représente un plan mobile qui enveloppe une surface du sixième ordre, dont l'équation est

$$i^3 - 27j^2 = 0, \tag{2}$$

si l'on représente respectivement par i et j l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme u. Les équations de son arête de rebroussement sont

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

La surface que je me propose d'étudier est la surface du troisième ordre $\mathcal{H}$, dont l'équation est

$$j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on désigne par $\mathcal{S}$ la surface du second ordre (ou quadrique) représentée par l'équation

$$i = ae - 4bd + 3c^2 = 0,$$

on voit, en considérant l'équation (2), que la surface développable dont j'ai parlé plus haut touche $\mathcal{H}$ tout le long de l'intersection de cette surface avec $\mathcal{S}$, c'est-à-dire tout le long de son arête de rebroussement.

D'où la conséquence suivante :

La cubique $\mathcal{H}$ est coupée par la quadrique $\mathcal{S}$ suivant une de ses lignes asymptotiques.

3. Il est facile de voir qu'en réalité les considérations précédentes nous conduisent à la détermination complète des lignes asymptotiques de $\mathcal{H}$.

---

[1] *Voir* CAYLEY : *On a certain sextic developpable* (*Quarterly Journal*, t. IX); *Note sur quelques tores sextiques* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. II).

Considérons le système linéaire numérique

$$\begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix},$$

dont, pour plus de simplicité, je supposerai le déterminant égal à l'unité, et le système composé suivant

$$\begin{matrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{matrix} \times \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{matrix} \times \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix} = \begin{matrix} a' & b' & c' \\ b' & c'' & d' \\ c' & d' & e' \end{matrix}.$$

Si l'on choisit les nombres p, q, r, ... de telle sorte que l'on ait $c'' = c'$, il est clair que l'on aura

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & d' \\ c' & d' & e' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

et l'équation de $\mathcal{H}$ s'obtiendra en égalant à zéro l'une ou l'autre de ces deux expressions; mais l'on n'aura pas en général

$$a'e' - 4b'd' + 3c'^2 = ae - 4bd + 3c^2,$$

c'est-à-dire

$$i' = i.$$

L'équation $i' = 0$ représentera donc une nouvelle quadrique coupant $\mathcal{H}$ suivant une de ses lignes asymptotiques, et la question qui s'offre à nous est la suivante :

Les nombres p, q, r, ... étant choisis de telle sorte que la relation $c'' = c'$ soit satisfaite, trouver les différentes valeurs que peut prendre l'expression

$$i' = a'e' - 4b'd' + 3c'^2.$$

4. J'emploierai dans la suite de ce Chapitre les notations dont je me suis servi dans mon Mémoire sur le calcul des systèmes linéaires (¹); une grande lettre représentera un système linéaire,

(¹) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV.

Pour éclaircir ces notations par quelques exemples, soit

$$A = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix}$$

la même lettre affectée de l'indice zéro ou de l'indice 1 le système réciproque ou le système inverse, et la caractéristique Δ la valeur du déterminant du système linéaire qu'elle précède.

Cela posé, en calculant les quantités c'' et c', on trouve que, pour qu'elles soient égales, on doit avoir la relation

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & pra + (pr' + rp')b + (pr'' + rp'' + r'p')c + (p'r'' + r'p'')d + p''r''e \\ & \quad = q^2 a + 2qq'b + (2qq'' + q'^2)c + 2q'q''d + q''^2 e; \end{aligned} \right.$$

cette relation doit être identique et elle ne peut différer que dans la forme de la relation (1). On en déduit, ρ désignant une certaine quantité numérique, la série d'égalités

$$\frac{\rho}{2} = \frac{pr - q^2}{\varepsilon} = \frac{pr' + rp' - 2qq'}{-4\delta} = \frac{pr'' + rp'' + p'r' - 2qq'' - q'^2}{6\gamma}$$
$$= \frac{p'r'' + r'p'' - 2q'q''}{-4\beta} = \frac{p''r'' - q''^2}{\alpha}.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{I} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad A = \begin{matrix} \varepsilon & -2\delta & \gamma \\ -2\delta & 4\gamma & -2\beta \\ \gamma & -2\beta & \alpha \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix},$$

on déduit facilement des égalités précédentes l'équation

$$(4)\qquad \mathrm{HIH}_1 = \rho A + \theta \mathrm{I},$$

θ désignant une autre quantité numérique dont il est inutile d'écrire la valeur.

Réciproquement, si le système H est choisi de telle manière que le produit HIH_1 soit de la forme $\rho A + \theta \mathrm{I}$, ρ et θ désignant des constantes (*systèmes simples*), les relations (3) sont satis-

---

et a la valeur du déterminant de ce système linéaire ; on aura

$$\mathrm{A}_1 = \begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_0 = \begin{matrix} \frac{da}{d\alpha} & \frac{da}{d\alpha'} & \frac{da}{d\alpha''} \\ \frac{da}{d\beta} & \frac{da}{d\beta'} & \frac{da}{d\beta''} \\ \frac{da}{d\gamma} & \frac{da}{d\gamma'} & \frac{da}{d\gamma''} \end{matrix};$$

d'où, par suite,

$$\mathrm{A}_0 \mathrm{A} = a = \Delta(\mathrm{A}).$$

faites; et si nous faisons

$$A = \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d, \\ c & d & e \end{matrix}$$

et posons

$$H_1 A H = A',$$

on voit que les systèmes A′ et A sont de la même forme.

La recherche des systèmes de transformation que nous devons employer est donc ramenée à la résolution de l'équation (4), où A et I désignent des systèmes donnés et où l'un des nombres ρ et θ peut être choisi arbitrairement.

Ces deux nombres sont reliés entre eux par une relation que l'on établira facilement en égalant les déterminants des deux membres de l'équation (4).

On trouve ainsi

$$2 = \Delta(\rho A + \theta I) = 4 j_0 \rho^3 - 2 i_0 \rho^2 \theta + 2\theta^3,$$

d'où

$$(4') \qquad 2 j_0 \rho^3 - i_0 \rho^2 \theta + \theta^3 = 1.$$

Telle est la relation qui relie les nombres ρ et θ; j_0 et i_0 désignent respectivement l'invariant cubique et l'invariant quadratique de la forme ω.

5. La valeur du déterminant que j'ai transcrite ci-dessus se déduit immédiatement de la formule suivante, facile à vérifier, et dont je me servirai dans ce qui suit,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta[A(Ax + Iy) - z] \\ \quad = -z^3 + z(iy^2 + 2hxy + kx^2) + j(4 j_0 x^3 - 2 i_0 x^2 y + 2y^3). \end{array} \right.$$

Dans cette identité, où x, y, z désignent des quantités arbitraires, j'ai écrit, pour abréger,

$$h = \alpha \frac{dj}{da} + \beta \frac{dj}{db} + \gamma \frac{dj}{dc} + \delta \frac{dj}{dd} + \varepsilon \frac{dj}{de}$$

et

$$-k = 4(ac - b^2)(\gamma\varepsilon - \delta^2) - (ad - bc)(\beta\varepsilon - \gamma\delta) + \ldots,$$

k désignant l'invariant quadratique simultané des hessiens de u et de ω.

6. Ayant choisi l'une quelconque des solutions de l'équation (4), où les nombres ρ et θ satisfont à la relation $(4)'$, on en déduira un système A′ de même forme que le système A.

Les coordonnées a', b', c', ... qui entrent dans ce nouveau système sont reliées par une identité de la forme

$$a'\varepsilon' - 4b'\delta' + 6c'\gamma' - 4d'\beta' + e'\alpha' = 0,$$

et je me propose d'abord de déterminer la valeur des constantes qui entrent dans cette relation, ou encore le système A' que l'on peut former avec elles et qui est analogue à A.

A cet effet, je remarque que l'on a, d'après l'équation (5),

$$\Delta(\mathrm{A}A - z) = -z^3 + kz + 4jj_0,$$

et que, si le second membre de cette relation ne contient pas de terme en z^2, c'est précisément en vertu de l'identité (1).

Pour trouver A', il faut donc le déterminer par la condition que le développement de l'expression

$$\Delta(\mathrm{A}'A' - z)$$

manque du terme en z^2.

Il suffit pour cela de déterminer deux quantités λ et μ, de telle sorte que l'expression

$$A' = \mathrm{H}_0(\lambda A + \mu \mathrm{I})\mathrm{H}_{01}$$

ait la même forme que A (c'est-à-dire que le terme du milieu soit le quadruple de chacun des termes de la diagonale secondaire du système).

En effet, en remplaçant respectivement A′ et A' par leurs valeurs, on a identiquement

$$\Delta(\mathrm{A}'A' - z) = \Delta[\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{H}\mathrm{H}_0(\lambda A + \mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01} - z] = \Delta[\mathrm{A}(\lambda A + \mu\mathrm{I}) - z],$$

expression dont la valeur, en vertu de la formule (5), manque bien du terme en z^2.

7. Les nombres ρ, θ, λ et μ ayant été déterminés comme je l'ai dit ci-dessus, en désignant par i', h', k', ... les quantités analogues à i, h, k, ..., mais relatives aux systèmes A′ et A', la for-

mule (5) donne la relation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta[\mathrm{A}'(A'x+\mathrm{I}y)-z] = &-z^3+z(i'y^2+2h'xy+k'x^2)\\ &+j(4j'_0x^3-2i'_0x^2y-2y^3);\end{aligned}\right.$$

le déterminant qui précède devient, si l'on remplace dans son expression A' et A' par leurs valeurs

$$\Delta\left\{\mathrm{H}_1\mathrm{AH}[\mathrm{H}_0(\lambda A+\mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01}x+\mathrm{I}y]-z\right\},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\Delta(\lambda x\mathrm{H}_1\mathrm{A}A\mathrm{H}_{01}+\mu x\mathrm{H}_1\mathrm{AIH}_{01}+y\,\mathrm{H}_1\mathrm{AHI}-z),$$

ou encore, en multipliant à droite par H_1 le système compris sous le signe Δ et en le divisant ensuite à gauche par H_1,

$$\Delta(\lambda x\mathrm{H}_1\mathrm{A}A+\mu x\mathrm{AI}+y\,\mathrm{AHIH}_1-z),$$

ou encore, en vertu de la formule (4),

$$\Delta\left\{\mathrm{A}[(\lambda x+\rho y)A+(\mu x+\theta y)\mathrm{I}]-z\right\}.$$

Si l'on développe ce déterminant au moyen de la formule (5), on obtient l'expression

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &-z^3+z[i(\mu x+\theta y)^2+2h(\lambda x+\rho y)(\mu x+\theta y)+k(\lambda x+\rho y)^2\\ &\quad+j[4j_0(\lambda x+\rho y)^3-2i_0(\lambda x+\rho y)^2(\mu x+\theta y)+2(\mu x+\theta y)^3.\end{aligned}\right.$$

8. Les polynomes (7) et (6) doivent être identiques, quelles que soient les variables x, y, z; en identifiant ces deux expressions, on obtient les relations contenues dans le Tableau suivant :

Tableau A.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &2j_0\rho^3-i_0\rho^2\theta+\theta^3=1,\\ &6j_0\lambda\rho^2-i_0\rho^2\mu-2i_0\lambda\rho\theta+3\mu\theta^2=0;\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 2j'_0&=2j_0\lambda^3-i_0\lambda^2\mu+\mu^3,\\ i'_0&=i_0\lambda^2\theta+2i_0\lambda\rho\mu-6j_0\lambda^2\rho-3\mu^2\theta;\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} i'&=\theta^2 i+2\rho\theta h+\rho^2 k,\\ h'&=\mu\theta i+(\lambda\theta+\rho\mu)h+\lambda\rho k,\\ k'&=\mu^2 i+2\lambda\mu h+\lambda^2 k.\end{aligned}\right.$$

Je laisse momentanément de côté ces relations, sur lesquelles j'aurai à revenir plus tard; je me contenterai de faire observer

que la première des équations (3) du Tableau précédent donne la solution de la question principale que je m'étais proposée.

Toutes les quadriques fournies par l'équation

$$i' = \theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0,$$

où le rapport $\frac{\rho}{\theta}$ peut varier d'une façon arbitraire, coupent $\mathcal{H}$ suivant une de ses lignes asymptotiques; et comme par chacun des points de cette surface passent deux de ces quadriques, on obtient ainsi le système complet des asymptotiques cherchées.

II. — *Propriétés des lignes asymptotiques.*

9. Considérons une ligne asymptotique quelconque Z de la surface $\mathcal{H}$; cette ligne est l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan dont l'équation est

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0,$$

$t:\tau$ désignant un paramètre variable.

Lorsqu'on donne à ce paramètre une valeur déterminée, l'équation précédente représente un plan osculateur de Z et tangent à $\mathcal{H}$, que j'appellerai simplement *plan* (t). J'appellerai *tangente* (t) la tangente à Z au point où le plan (t) lui est osculateur; ses équations sont

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Enfin j'appellerai *point* (t) le point de contact de cette tangente; ses équations sont

$$\begin{aligned} at^2 + 2bt\tau + c\tau^2 &= 0, \\ bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2 &= 0, \\ ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2 &= 0. \end{aligned}$$

Je dirai indifféremment que $t:\tau$ (ou t) est le paramètre de ce point, de la tangente en ce point à l'asymptotique et du plan osculateur dont cette tangente est la caractéristique.

Les relations précédentes et l'équation (1) permettent d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque de Z en fonction de son paramètre; on obtient ainsi le Tableau suivant :

Tableau B.

$$\begin{aligned}
a &= -4\alpha t^3\tau^3 - 12\beta t^2\tau^4 - 12\gamma t\,\tau^5 - 4\delta\tau^6,\\
b &= 3\alpha t^4\tau^2 + 8\beta t^3\tau^3 + 6\gamma t^2\tau^4 - \varepsilon\tau^6,\\
c &= -2\alpha t^5\tau - 4\beta t^4\tau^2 + 4\delta t^2\tau^4 + 2\varepsilon t\tau^5,\\
d &= \alpha t^6 - 6\gamma t^4\tau^2 - 8\delta t^3\tau^3 - 3\varepsilon t^2\tau^4,\\
e &= 4\beta t^6 + 12\gamma t^5\tau - 12\delta t^4\tau^2 + 4\varepsilon t^3\tau^3.
\end{aligned}$$

10. Étant donné un point M, dont les coordonnées soient a', b', c', d' et e', posons pour un instant

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & c+\lambda c' \\ b+\lambda b' & c+\lambda c' & d+\lambda d' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' & e+\lambda e' \end{vmatrix} = j + \lambda j_0 + \lambda^3 j' + \lambda^3 j' \text{ (1)};$$

d'après la méthode donnée par Joachimsthal, on obtient l'équation du cône circonscrit à $\mathcal{H}$ et ayant pour sommet le point M, en égalant à zéro le discriminant de la forme cubique contenue dans le second membre de l'égalité précédente. Si le point M est sur Z, on a

$$j' = 0,$$

et l'équation du cône circonscrit devient

$$j_0^2 - 4jj'_0 = 0.$$

On peut dans cette équation exprimer, en employant les formules du Tableau B, les coordonnées du point M en fonction de son paramètre t, et je ferai remarquer qu'*après la substitution les invariants* j_0, j, j'_0 *deviendront des covariants des formes* u *et* ω.

Comme un covariant est déterminé par son terme du degré le plus élevé en t, il me suffira, pour calculer chacun des covariants dont je viens de parler, de supposer a', b' et c' égaux à zéro, et de remplacer respectivement d' et c' par αt^6 et $4\beta t^6$. Il viendra ainsi

$$j_0 = [4\beta(ac - b^2) - 2\alpha(ad - bc)]\,t^6 + \ldots;$$

(1) Pour évitèr toute confusion, je ferai remarquer qu'ici j_0, j'_0, j n'ont pas le même sens que dans le paragraphe précédent.

d'où l'on voit que j_0 est égal à $-2J_0$, J_0 désignant le jacobien de ω et du hessien de u, en sorte que

$$J_0 = [\alpha(ad - bc) - 2\beta(ac - b^2)]t^6 + \ldots.$$

On obtient de même

$$j'_0 = -a\alpha^2 u'^2 + \ldots,$$

d'où

$$j'_0 = -\omega^2 u;$$

par suite, l'équation du cône circonscrit à $\mathcal{H}$ et ayant pour sommet le point (t) est

$$J_0^2 + \omega^2 ju = 0.$$

11. Le coefficient du terme le plus élevé dans le covariant $J_0^2 + \omega^2 ju$ est

$$t'^2 \{ [\alpha(ad - bc) - 2\beta(ac - b^2)]^2 + a\alpha^2(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) \},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$t'^2(ac - b^2)[\alpha^2(ae - c^2) - 4\alpha\beta(ad - bc) + 4\beta^2(ac - b^2)].$$

Si l'on désigne par H le hessien de u et par G le covariant

$$[\alpha^2(bd - c^2) - \alpha\beta(ad - bc) + \beta^2(\alpha\gamma - \beta^2)]t^8 + \ldots,$$

on voit que l'on a identiquement

$$J_0^2 + \omega^2 ju = H(\omega^2 i + 4G);$$

d'où il suit que le cône circonscrit se décompose en deux cônes du second ordre, *propriété caractéristique de la surface réciproque de la surface de Steiner* (1).

Remarque. — Les deux cônes ainsi obtenus se distinguent très nettement par la forme de leur équation; je dirai que le cône dont l'équation est

$$H = 0$$

appartient à l'asymptotique Z, et je le désignerai par la nota-

---

(1) Sur la surface de Steiner, voir *Borchardt,* t. LXIII : CREMONA, *Sur la surface du quatrième ordre,* etc., p. 315 et suiv. — *Borchardt,* t. LXIV : KUMMER, *Ueber die Flächen des vierten Grades;* WEIERSTRASS, *Note zur vorstehenden Abhandlung;* SCHRÖTER, *Ueber die Steiner'sche Fläche.*

tion $\mathcal{H}_t$; il est clair que le second cône *appartient* à la deuxième ligne asymptotique qui passe par le point (t).

12. Soient (t) et (t') deux points de l'asymptotique Z; considérons le premier émanant de u,

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathcal{E} = t(at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) \\ \qquad + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau'^3). \end{cases}$$

L'équation $\mathcal{E} = 0$ représente un plan passant évidemment par la tangente (t'); si, laissant le point (t) fixe, on fait varier le point (t'), ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche.

L'équation de cette surface s'obtient en égalant à zéro le discriminant de $\mathcal{E}$ (par rapport à t' et τ'); comme ce discriminant est un covariant de u et de ω, il suffit de calculer son terme du degré le plus élevé qui est

$$[4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2]t^4,$$

ou encore

$$[aj - (ac - b^2)i]t^4.$$

L'équation de la surface développable, que j'appellerai Σ_t, est donc

$$ju - i\mathrm{H} = 0.$$

13. Pour tous les points de l'arête de rebroussement de Σ_t, on doit avoir

$$\frac{at + b\tau}{bt + c\tau} = \frac{bt + c\tau}{ct + d\tau} = \frac{ct + d\tau}{dt + e\tau},$$

ou encore

$$(9)\qquad \begin{cases} (ac - b^2)t^2 + (ad - bc)t\tau + (bd - c^2)\tau^2 = 0, \\ (ad - bc)t^2 + (ac - c^2)t\tau + (be - dc)\tau^2 = 0, \\ (bd - c^2)t^2 + (be - cd)t\tau + (ce - d^2)\tau^2 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ces trois équations est égal à j^2, ainsi qu'il est facile de le vérifier; comme il est nul par les points de la courbe, il en résulte qu'elle est située sur la surface $\mathcal{K}$.

Elle est également située sur le cône $\mathcal{H}_t$; l'équation de ce cône

peut en effet se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&t^2[(ac-b^2)t^2+(ad-bc)t\tau+(bd-c^2)\tau^2]\\
&\quad+t\tau[(ad-bc)t^2+(ae-c^2)t\tau+(be-cd)\tau^2]\\
&\quad+\tau^2[(bd+c^2)t^2+(be-cd)t\tau+(ce-d^2)\tau^2]=0.
\end{aligned}$$

D'où cette conclusion :

L'arête de rebroussement de la développable Σ_t *est la cubique gauche, suivant laquelle la surface* $\mathcal{H}$ *est touchée par le cône circonscrit à la surface, appartenant à l'asymptotique* Z, *et ayant pour sommet le point* (t).

De là on déduira facilement les propositions suivantes :

Théorème I. — *Les cônes du second degré circonscrits à* $\mathcal{H}$, *ayant leur sommet sur une ligne asymptotique* Z *de cette surface et appartenant à cette ligne asymptotique, touchent* $\mathcal{H}$ *suivant des cubiques gauches. Les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent* $\mathcal{H}$ *suivant la ligne* Z.

Théorème II. — *Étant pris un point* M *sur la surface* $\mathcal{H}$, *le cône, circonscrit à la surface et dont ce point est le sommet, se compose de deux cônes du second ordre. Chacun d'eux touche* $\mathcal{H}$ *suivant une cubique gauche; les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent* $\mathcal{H}$ *suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point* M.

14. Les cônes du second degré circonscrits à $\mathcal{H}$ et qui *appartiennent* à l'asymptotique Z touchent cette surface suivant des cubiques gauches que je dirai aussi appartenir à l'asymptotique.

Toutes les cubiques appartenant à cette asymptotique passent par les quatre points satisfaisant aux équations

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e};$$

ces points sont d'ailleurs les points de rebroussement de l'asymptotique et les points coniques de $\mathcal{H}$; leurs paramètres sont les racines de l'équation $\omega=0$.

Indépendamment de ces quatre points, deux cubiques appartenant à l'asymptotique Z se coupent en un cinquième point.

Ce point est le sommet d'un cône du second degré qui contient les deux cubiques.

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le lemme suivant que l'on établira facilement :

Une surface développable du quatrième ordre (ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche) étant considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile

$$f(\lambda) = 0,$$

$f(\lambda)$ désignant un polynome du troisième degré en λ, les différents cônes du second ordre qui passent par l'arête de rebroussement sont donnés par l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le covariant quadratique de $f(\lambda)$.

Cela posé, la cubique gauche, suivant laquelle la surface $\mathcal{H}$ est touchée par le cône du second ordre ayant le point (t) pour sommet et appartenant à l'asymptotique Z, est l'enveloppe du plan mobile défini par l'équation (8) (t' étant considérée comme la variable). L'équation générale des cônes du second ordre passant par cette cubique sera donc, en vertu du lemme précédent,

$$\begin{vmatrix} at+b\tau & bt+c\tau & ct+d\tau \\ bt+c\tau & ct+d\tau & dt+e\tau \\ t'^2 & -t'\tau' & t'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} & t'^2[(ac-b^2)t^2+(ad-bc)t\tau+(bd-c^2)\tau^2] \\ & \quad + t'\tau'[(ad-bc)t^2+(ae-c^2)t\tau+(be-cd)\tau^2] \\ & \quad + t'^2\,[(bd-c^2)t^2+(be-cd)t\tau+(ce-d^2)\tau^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Je remarque maintenant que cette équation est symétrique par rapport à t et t' ; d'où les propositions suivantes :

THÉORÈME III. — *Si de deux points (t) et (t') situés sur l'asymptotique Z, on mène les cônes du second ordre circonscrits à $\mathcal{H}$ et appartenant à cette asymptotique, les deux*

cubiques gauches de contact sont situées sur un même cône du second ordre, dont le sommet est le point d'intersection des deux cubiques distinct des quatre points nodaux de $\mathcal{H}$.

Remarque. — Ce cône est défini par l'équation (10).

Théorème IV. — *Étant donnée une cubique quelconque passant par les quatre points coniques de* $\mathcal{H}$, *la surface développable, dont cette cubique est l'arête de rebroussement, coupe* $\mathcal{H}$ *suivant une de ses lignes asymptotiques* Z.

Si l'on considère les divers cônes du second degré qui contiennent cette cubique, ils coupent $\mathcal{H}$ *suivant les diverses cubiques appartenant à* Z, *en sorte que les développables dont elles sont les arêtes de rebroussement contiennent toutes* Z, *et que les développables circonscrites à* $\mathcal{H}$ *le long de ces cubiques sont des cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur* Z.

15. Il est facile d'étendre les résultats précédents à une asymptotique quelconque Z_ρ résultant de l'intersection de $\mathcal{H}$ avec la quadrique

$$\theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0.$$

A cet effet, j'établirai d'abord une formule très simple et que j'aurai souvent l'occasion d'employer.

Soit, en conservant les notations du § I, le système linéaire gauche

$$U = \begin{array}{ccc} 0 & t^2 & t\tau \\ -t^2 & 0 & t^2 \\ -t\tau & -\tau^2 & 0 \end{array},$$

d'où

$$U_0 = \begin{array}{ccc} \tau^2 & 0 & 0 \\ -t\tau & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{array} \times \begin{array}{ccc} \tau^2 & -t\tau & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array};$$

le produit HUH_1 est aussi un système gauche que je ferai égal à (1)

$$V = \begin{array}{ccc} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{array},$$

(1) Il est important de ne pas confondre ici le système linéaire H avec le hessien de u que j'ai désigné par la même lettre.

en sorte que l'on aura

$$V_0 = \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z & -y & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

et par suite

$$H_{01} \times \begin{matrix} \tau^2 \\ -t\tau \\ t^2 \end{matrix} = \begin{matrix} z \\ -y \\ x \end{matrix}.$$

De l'équation (4) on déduit

$$H(I + U)H_1 = \rho A + \theta I + V,$$

d'où

$$\Delta(I + U) = \Delta(\rho A + \theta I + V).$$

Représentons, pour abréger, par $\varphi(x, y, z)$ la forme quadratique

$$\alpha x^2 + 4\gamma y^2 + \varepsilon z^2 + 4\delta zy + 4\beta yx + 2\gamma xz;$$

en développant la relation précédente, on obtiendra l'équation

$$(11) \qquad \rho\varphi(x, y, z) + 2\theta(xz - y^2) = 0,$$

en sorte que, quand le rapport $t : \tau$ prend toutes les valeurs possibles, les variables x, y, z restent constamment liées par la relation (11).

16. Cela posé, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'équation générale des cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z s'obtient en égalant à zéro le hessien de u; on peut donc l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & & \tau^4 & -\tau^3 t & \tau^2 t^2 \\ b & c & d & + & -\tau^3 t & \tau^2 t^2 & -\tau t^3 \\ c & d & e & & \tau^2 t^2 & -\tau t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou simplement

$$\Delta(A + U_0) = 0.$$

Les cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z_ρ auront par suite pour équation

$$\Delta(A' + U_0) = \Delta(H_1 A H + U_0) = \Delta(A + H_{10} U_0 H_0) = 0.$$

ou encore

$$\Delta(A + V_0) = 0,$$

ou enfin en développant

$$\begin{aligned} f = (ac - b^2)x^2 + (ae - c^2)y^2 + (ce - d^2) \\ + 2(be - cd)yz + 2(bd - c^2)zx + 2(ad - bc)xy = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'équation générale des cônes du second ordre circonscrits à $\mathcal{K}$ *et appartenant à l'asymptotique* Z_ρ, *les variables* x, y, z *étant assujetties à satisfaire à l'équation* (11).

17. L'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques gauches appartenant à l'asymptotique Z (*Cf*, n° **14**) peut se mettre sous la forme

$$\Delta \left\{ A + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = 0.$$

L'équation analogue pour les cubiques appartenant à l'asymptotique Z_ρ sera

$$\begin{aligned} &\Delta \left[H_1 A H + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \\ &= \Delta \left\{ A + H_{01} \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \times H_0 \right\}, \end{aligned}$$

ou encore, en vertu des relations que j'ai établies plus haut,

$$\Delta \left\{ A + \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z' & -y' & x' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = 0.$$

D'où la conclusion suivante :

Si l'on désigne par x, y, z *et* x', y', z' *deux systèmes de variables satisfaisant respectivement à l'équation* (11), *l'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques appartenant à l'asymptotique* Z_ρ *est*

$$x' \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + z' \frac{df}{dz} = 0.$$

Je désigne ici par f la même forme quadratique que dans le numéro précédent.

Les équations des cubiques gauches elles-mêmes sont

$$\begin{aligned}
(ac - b^2)x + (ad - bc)y + (bd - c^2)z &= 0,\\
(ad - bc)x + (ae - c^2)y + (be - cd)z &= 0,\\
(bd - c^2)x + (be - cd)y + (ce - d^2)z &= 0.
\end{aligned}$$

18. Je ferai encore quelques remarques sur les propositions précédentes.

Par tout point M, pris sur la surface $\mathcal{H}$, passent deux cubiques appartenant à l'asymptotique Z; ces deux courbes définissent parfaitement le point M, dont on peut ainsi fixer la position sur la surface par les valeurs des paramètres t et t' des points de Z qui sont les sommets des cônes touchant la surface suivant les cubiques considérées.

En un point (t, t') de $\mathcal{H}$, l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 = t'^2(at^2 + 2bt\tau + c\tau^2) &+ 2t'\tau'(bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2)\\
&+ \tau'^2\,(ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2) = 0;
\end{aligned}$$

on voit ici apparaître l'émanant principal de u; les deux autres émanants

$$\mathcal{E}' = t'(at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + d\tau^3) + \tau'(bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3)$$

et

$$\mathcal{E} = t(at'^3 + 3bt'^2\tau' - 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau^3)$$

représentent, comme nous l'avons vu, les plans passant par le point (t, t') et les tangentes (t) et (t'), ou encore les plans osculateurs des cubiques, appartenant à l'asymptotique Z, qui se croisent au plan considéré.

Le plan tangent au point (t, t') passe évidemment par les deux points (t) et (t').

Il serait facile d'exprimer en fonction des paramètres t et t' les coordonnées du point (t, t'); mais je laisse de côté cette recherche, qui me serait inutile en ce moment.



III. — *Sur les lignes nodales des surfaces développables dont les asymptotiques sont les arêtes de rebroussement* (1).

19. La surface développable $\mathcal{D}$, dont la sextique Z est l'arête de rebroussement, a pour ligne nodale une quartique $\mathcal{N}$ dont il est facile d'obtenir les équations.

Pour tout point de cette courbe, l'équation

$$u = 0$$

a deux couples de racines égales; elle est donc définie par le système d'équations

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e},$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'identité,

$$\alpha\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

$$\varepsilon(ac - b^2) - 2\delta(ad - bc) + \gamma(ae + 2bd - 3c^2) - 2\beta(be - cd) + \alpha(ce + d^2) = 0.$$

---

(1) On sait (*voir* CAYLEY, *loc. cit.*) que ces lignes nodales sont des courbes du quatrième ordre et de seconde espèce (c'est-à-dire par lesquelles on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre); dans tout ce qui suit, je les appellerai, pour abréger, simplement *quartiques,* en réservant le nom de *biquadratiques* aux courbes du quatrième ordre qui résultent de l'intersection de deux surfaces du second ordre. J'appellerai de même *sextiques* les courbes du sixième ordre et de quatrième classe qui sont les asymptotiques de la surface réciproque de la surface de Steiner Les sextiques sont les réciproques des surfaces développables qui ont des quartiques pour arêtes de rebroussement.

Les paragraphes qui suivent peuvent être considérés comme un chapitre partiel de la théorie des quartiques et des sextiques.

A ce sujet, il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer le sens géométrique des deux équations

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

Relativement à la surface de Steiner, elles donnent lieu aux deux propositions suivantes :

I. *Etant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points équiharmoniques est la surface du second ordre que l'on peut mener par la quartique.*

II. *Étant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points harmoniques est la surface de Steiner dont cette quartique est une asymptotique.*



Telle est l'équation de la quadrique $\mathfrak{Q}$, qui contient la ligne nodale; en conservant les notations du § I, on voit que cette équation est

$$h = 0.$$

D'après le Tableau A, l'équation générale des quadriques $\mathfrak{Q}_\rho$, contenant les nodales relatives aux diverses asymptotiques de la surface, sera donc

$$\mu\theta i + (\lambda\theta + \rho\mu) h + \lambda\rho k = 0,$$

le rapport $\mu : \lambda$ étant lié au rapport $\rho : \theta$ par la relation

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2\rho(3j_0\rho - i_0\theta)}{i_0\rho^2 - 3\theta_2}.$$

Toutes ces quadriques, ainsi que les quadriques $\mathcal{S}_\rho$, sont comprises dans le réseau (i, h, k).

20. On peut, par une quartique donnée $\mathfrak{N}$, faire passer une infinité de surfaces réglées du troisième ordre. Prenons, en effet, arbitrairement une corde de cette courbe, c'est-à-dire une droite s'appuyant sur elle en deux points; tout plan passant par cette corde fixe rencontre de nouveau la courbe en deux points. Le lieu des cordes mobiles qui les joignent est évidemment une surface réglée du troisième ordre ayant la corde fixe pour ligne double.

Il est facile d'obtenir l'équation de cette surface.

A cet effet, je considérerai le covariant du sixième degré de u

$$L = (a^2 d + 3b^3 - 3abc)t^6 + \ldots$$

(on sait que tous ses coefficients s'annulent pour les points de la ligne nodale) et l'émanant principal de L

$$L_0 = t'^3 \frac{d^3 L}{dt^3} + 3t'^2\tau' \frac{d^3 L}{dt^2\, d\tau} + 3t'\tau'^2 \frac{d^3 L}{dt\, d\tau^2} + \tau'^3 \frac{d^3 L}{d\tau^3};$$

l'équation

$$L_0 = 0$$

représente une surface du troisième ordre qui contient la quartique $\mathfrak{N}$; il est facile de voir que cette surface est réglée.

On a, en effet, en conservant les notations précédentes et en

posant, pour abréger,

$$u' = at'^4 + 4bt'^3\tau' + 6ct'^2\tau'^2 + 4dt'\tau'^3 + e\tau t',$$

l'identité suivante

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = (t\tau' - t'\tau)^3 L_0 \text{ (1)};$$

d'où l'on voit que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = 0,$$

équation d'une surface réglée dont les diverses génératrices sont données par le système simultané d'équations

$$u = \lambda^2 u' \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E},$$

où λ désigne un paramètre arbitraire.

21. Les équations de la droite double de cette surface sont

$$\mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = 0,$$

et telle est l'équation générale (renfermant deux paramètres arbitraires t et t') des cordes de la quartique.

La seconde directrice rectiligne de cette surface a pour équations

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u' = 0.$$

---

(1) Sur cette identité, voir (*Bulletin de la Société philomathique* et journal *L'Institut,* mars 1872), ma Note *Sur les covariants doubles des formes binaires.*

La proposition fondamentale relative aux covariants doubles peut s'énoncer ainsi :

Étant donné un système quelconque S *de formes binaires, tout covariant double de ce système peut se mettre sous la forme*

$$(A) + (B)\omega + (C)\omega^2 + \ldots;$$

(A), (B), ... *désignant des émanants des formes* A, B, *et ces formes étant elles-mêmes des covariants du système* S; ω *représente le covariant double général*

$$xy' - yx'.$$

Depuis la publication de la Note dont je viens de parler, j'ai reconnu que M. Clebsch s'était appuyé sur la même proposition dans son Ouvrage sur les formes binaires; je crois toutefois pouvoir faire remarquer à ce sujet que, dès 1860, je l'avais communiquée à M. Hermite en lui faisant connaître les premiers principes d'une nouvelle théorie des formes binaires qui est restée inédite.

Si l'on convient d'appeler *droite appartenant à une développable* les droites qui résultent de l'intersection de deux plans tangents à cette développable, on peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *Étant donnée une quartique quelconque, cette courbe est la ligne nodale d'une surface développable du sixième ordre et de la quatrième classe; par toute droite appartenant à cette surface développable et la quartique, on peut faire passer une surface réglée du troisième ordre.*

22. L'équation générale des surfaces réglées du troisième ordre passant par la quartique $\mathfrak{N}$ peut se mettre encore sous une autre forme remarquable, et qui résulte de l'identité

$$(t\tau' - t'\tau)L_0 = uH' - u'H;$$

d'où l'équation

$$uH' - u'H = 0$$

et la conséquence suivante :

La courbe d'intersection de deux cônes quelconques appartenant à l'asymptotique Z et la quartique $\mathfrak{N}$ sont situées sur une même surface réglée du troisième ordre.

Cette même surface réglée contient aussi la courbe du dixième ordre qui est l'intersection (partielle) des surfaces développables dont les arêtes sont les deux cubiques suivant lesquelles la surface $\mathfrak{H}$ est touchée par les deux cônes dont je viens de parler.

Ces deux surfaces (*voir* n° **12**) ont, en effet, pour équations

$$ju - iH = 0 \qquad \text{et} \qquad ju' - iH' = 0;$$

en éliminant j et u, on obtient l'équation précédente, ce qui démontre la proposition énoncée.

23. Lorsque l'on fait

$$t' = t,$$

les deux directrices rectilignes des surfaces du troisième ordre se confondent, et l'on obtient les variétés singulières signalées par

M. Cayley (*voir* Salmon : *Analytic Geometry of three dimensions,* § 447).

L'équation de ces surfaces est $L = 0$.

24. Par la sextique Z et la quartique $\mathfrak{N}$, on peut faire passer une infinité de surfaces du quatrième ordre dont l'équation est

$$3ju - 2iH = 0.$$

Je ferai remarquer encore, et je reviendrai plus tard sur ce sujet, que la ligne nodale $\mathfrak{N}$ est située sur la surface de Steiner $\mathfrak{C}$, qui est la polaire réciproque de $\mathfrak{X}$ par rapport à la quadrique $\mathfrak{S}$.

IV. — *Sur les polygones que l'on peut circonscrire à une sextique gauche.*

25. Soit une sextique gauche Z, définie comme l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan variable

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0.$$

Supposons que les tangentes, en deux points (t) et (t') de cette courbe, se rencontrent en un point M (qui appartient nécessairement à la nodale $\mathfrak{N}$).

Les équations de ces tangentes sont

$$\begin{aligned}
at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + e\tau^3 &= 0,\\
bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3 &= 0,\\
at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3 &= 0,\\
bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + c\tau'^3 &= 0.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations et l'équation identique

$$a\varepsilon - 4b\beta + 6c\gamma - 4d\delta + e\alpha = 0$$

devant être satisfaites pour les coordonnées du point M, on obtiendra la relation qui lie entre eux les paramètres t et t', en égalant à zéro le déterminant de ce système d'équations.

La valeur de ce déterminant peut s'obtenir immédiatement en remarquant que c'est un covariant double de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de ce polynome, et du sixième degré par rapport aux variables t, τ et aux variables t, τ'; en se reportant

à la Note qui précède le paragraphe précédent, on voit immédiatement que ce déterminant a pour valeur

$$(t\tau' - t'\tau)^4 \mathfrak{F}_0,$$

$\mathfrak{F}_0$ désignant l'émanant principal de ω

$t'^2(\alpha t^2 + 2\beta t\tau + \gamma\tau^2) + 2t'\tau'(\beta t^2 + 2\gamma t\tau + \delta\tau^2) + \tau'^2(\gamma t^2 + 2\delta t\tau + \varepsilon\tau'^2)$;
en sorte que la relation qui existe entre les paramètres t et t' est

$$\mathfrak{F}_0 = 0.$$

Les coordonnées du point M s'expriment facilement en fonction des paramètres t et t', et sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2a}{-(t+t')} = \frac{6c}{t^2 + 4tt' + t'^2} = \frac{2d}{-tt'(t+t')} = \frac{e}{t^2 t'^2} \text{ (1)}.$$

26. L'équation

$$\mathfrak{F}_0 = 0$$

donne lieu à une remarque importante.

C'est l'intégrale de l'équation d'Euler qui sert de base à la théorie des fonctions elliptiques.

D'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si l'on peut circonscrire un polygone gauche à une sextique, on peut lui circonscrire une infinité de polygones du même nombre de côtés.*

Remarque. — Il est clair que, pendant que les côtés du polygone roulent sur la sextique, ses sommets décrivent la quartique $\mathfrak{Q}$.

On a ainsi un polygone mobile dont les sommets se meuvent sur une quadrique, tandis que ses côtés enveloppent une courbe tracée sur une autre quadrique ; c'est un point particulier d'une question digne, je crois, d'intérêt, et sur laquelle je reviendrai. Je me suis déjà occupé du problème général dans une Communication faite à la Société philomathique, en m'appuyant sur l'extension à l'espace de la théorie de Jacobi relative aux courbes planes du second ordre, extension que j'ai fait connaître dans une Note pré-

---

(1) Ici, pour simplifier l'écriture, j'ai fait, comme je le ferai souvent dans la suite, $\tau = \tau' = 1$.

sentée à l'Institut sur l'*Intégration d'une certaine classe d'équations différentielles*.

27. En particulier, si l'on peut circonscrire un triangle à une sextique Z, on peut en circonscrire une infinité; en d'autres termes, si l'on peut mener un plan tritangent à la sextique, on peut lui en mener une infinité.

Si l'on se reporte à la relation

$$\mathfrak{F}_0 = 0,$$

on verra facilement que ce cas se présente quand on a

$$i_0 = 0.$$

Comme l'a remarqué M. Cremona (¹), cette relation signifie que les quatre points cuspidaux de Z sont en rapport équiharmonique.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport équiharmonique, on peut mener à cette courbe une infinité de plans tritangents.

Je montrerai plus loin que, dans ce cas, la sextique est située sur un cône du second degré.

28. La considération de l'équation $\mathfrak{F}_0 = 0$ montre aussi facilement que la condition, pour que l'on puisse circonscrire à la sextique Z un quadrilatère, est

$$j_0 = 0.$$

D'où, en se reportant aux observations déjà citées de M. Cremona, la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport harmonique, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères gauches.

(¹) *Voir* les Notes de M. Cayley *Sur les torses sextiques* déjà citées.

M. Cayley a remarqué [1] que, quand l'on a $j_0 = 0$, la sextique est l'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à deux quadriques se touchant d'un contact simple.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Quand deux quadriques ont entre elles un contact simple, on peut circonscrire une infinité de quadrilatères gauches à l'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à ces deux quadriques.

V. — *Digression sur les covariants doubles des formes binaires.*

29. Comme, dans tout ce qui suit, les covariants doubles des formes u et ω se présentent très fréquemment, les considérations suivantes, quoique très simples, ne paraîtront peut-être pas inutiles.

Soient les formes $u(x, y)$ et $\omega(x, y)$, dans lesquelles j'ai, pour un instant, substitué aux variables t et τ de nouvelles variables x et y.

On a évidemment, en conservant les notations précédentes,

$$u(tx + t'y, \tau x + \tau' y) = ux^4 + 4\mathcal{E}'x^3y + 6\mathcal{E}_0x^2y^2 + 4\mathcal{E}xy^3 + u'y^4,$$

et de même

$$\omega(tx + t'y, \tau x + \tau' y) = \omega x^4 + 4\mathfrak{F}'x^3y + 6\mathfrak{F}_0x^2y^2 + 4\mathfrak{F}xy^3 + \omega'y^4,$$

en posant

$$\mathfrak{F}' = t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2\tau + 3\gamma t\tau^2 + \delta\tau^3) + \tau'(\beta t^3 + 3\gamma t^2\tau + 3\delta t\tau^2 + \varepsilon\tau^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit maintenant F un covariant double quelconque de u et de ω; on a, par suite de la définition même des covariants,

$$\begin{aligned}&F(a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, tx + t'y, \tau x + \tau' y, tx' + t'y', \tau x' + \tau' y') \\ &\quad = (t\tau' - t'\tau)^{-m} F(u, \mathcal{E}', \ldots, \omega, \mathfrak{F}', \ldots, x, y, x', y');\end{aligned}$$

[1] Notes *Sur les torses sextiques* déjà citées.



d'où, en faisant dans cette identité $x = 1$, $y = 0$, $x' = 0$, $y' = 1$,

$$\begin{aligned} &F(a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, t, \tau, t', \tau') \\ &\quad = (t\tau' - t'\tau)^{-m} F(u, \mathcal{E}', \ldots, \omega, \mathcal{F}', \ldots, 1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

De là résultent les conclusions suivantes :

1° Un covariant double (et il en est de même évidemment d'un covariant simple et d'un invariant) est déterminé quand on connaît son terme principal, c'est-à-dire le terme auquel se réduit le covariant quand on y fait $t = 1$, $\tau = 0$, $t' = 0$, $\tau' = 1$.

On obtient, à une certaine puissance près de $(t\tau' - t'\tau)$, la valeur du covariant en remplaçant respectivement dans le terme principal $a, b, c, \ldots$ par $u, \mathcal{E}', \mathcal{E}_0, \ldots$, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, par $\omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \ldots$.

2° Si l'on veut établir une relation entre des éléments géométriques dépendant de deux points de la sextique Z, on pourra toujours supposer que les paramètres de ces deux points sont 0 et ∞; de la relation qui a lieu dans ce cas particulier, on déduira la relation générale en remplaçant respectivement $a, b, c, \ldots$ et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par les émanants que j'ai mentionnés ci-dessus.

30. Pour faire une application simple des considérations qui précèdent, je remarquerai que l'on a

$$ae - 4bd + 3c^2 = (t\tau' - t'\tau)^{-4}[uu' - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' + 4\mathcal{E}_0^2].$$

L'équation de la quadrique $\mathcal{S}$ peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$uu' - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' + 4\mathcal{E}_0^2 = 0.$$

Les plans osculateurs de la sextique Z aux points (t) et (t'), dont les équations sont

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u' = 0,$$

coupent $\mathcal{S}$ suivant deux coniques situées sur le cône dont l'équation est

$$4\mathcal{E}_0^2 - 4\mathcal{E}\mathcal{E}' = 0;$$

le sommet de ce cône est défini par les équations

$$\mathcal{E}_0 = 0, \quad \mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = 0.$$

Ce point est d'ailleurs le point (t, t') de la surface $\mathcal{H}$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME VII. — *Étant donnée une sextique Z, si l'on mène deux plans osculateurs quelconques de cette courbe, ils coupent la quadrique, qui contient Z, suivant deux coniques; le sommet d'un des cônes qui passe par ces deux coniques se trouve sur la surface $\mathcal{H}$, dont Z est une asymptotique; et, quand ces plans se déplacent de toutes les manières possibles, le sommet de ce cône décrit la surface $\mathcal{H}$.*

Remarque. — On peut, par ces deux coniques, mener un deuxième cône; le sommet de ce cône décrit une surface que j'étudierai dans la suite de ce Mémoire.

VI. — *Centre et plan central d'une sextique gauche.*

31. Outre l'invariant

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha,$$

qui est identiquement nul, les deux polynomes u et ω ont un autre invariant, du premier degré relativement aux coefficients de u,

$$\begin{aligned} h_0 = a(\gamma\varepsilon - \delta^2) + 2b(\gamma\delta - \beta\varepsilon) + c(\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2) \\ + 2d(\beta\gamma - \alpha\delta) + e(\alpha\gamma - \beta^2). \end{aligned}$$

L'équation $h_0 = 0$ représente un plan Π; pour trouver les points d'intersection de ce plan avec la sextique Z, il faut remplacer a, b, c, ... par leurs valeurs tirées du Tableau B; le résultat devant être un covariant de ω, il suffit de calculer son terme du degré le plus élevé et par conséquent de faire a, b, c égaux à zéro, et

$$d = \alpha t^6 \qquad \text{et} \qquad e = 4\beta t^6;$$

il vient ainsi, comme premier terme de ce covariant,

$$2[3\alpha\beta\gamma - \alpha^2\delta - 2\beta^3]t^6;$$

d'où l'on conclut que les paramètres des points où le plan Π ren-

contre la sextique Z sont les racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le covariant du sixième degré de ω ([1]).

Les paramètres des quatre points stationnaires de Z étant les racines de l'équation $\omega = 0$, on déduit de là et des propriétés bien connues du covariant du sixième degré d'une forme biquadratique la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Les quatre points stationnaires d'une sextique* Z *peuvent être partagés de trois façons différentes en deux groupes de deux points; à chaque mode de groupement correspond sur la courbe une division en involution donnant lieu à deux points doubles. Les droites qui joignent les trois couples de points doubles sont situées dans un même plan* Π, *qui est le plan central de la sextique.*

Comme je le montrerai plus tard, ces trois droites sont situées sur la surface $\mathcal{K}$, dont Z est une asymptotique.

32. Il est facile de conclure de ce qui précède qu'il ne peut exister d'autres covariants de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u, que ceux que je viens d'examiner.

En égalant, en effet, à zéro un tel covariant, on a l'équation d'un plan qui rencontre Z en six points dont les paramètres sont les racines d'une équation que l'on obtient en égalant à zéro un covariant de ω du sixième degré. Or il n'existe qu'un seul covariant de ce degré; la proposition que je viens d'énoncer est donc démontrée.

De là diverses conséquences importantes.

En premier lieu, h_0 étant le seul invariant linéaire par rapport aux coefficients de u (sauf $a\varepsilon - 4b\delta + \ldots$, qui est identiquement

---

([1]) Les points cuspidaux d'une sextique sont souvent désignés sous le nom de *points stationnaires*.

Par tout point (t) d'une sextique Z, on peut mener en effet un plan P osculateur de cette courbe et différent du plan (t); le paramètre t' de ce plan s'obtient en égalant à zéro l'émanant

$$\mathcal{F}' = t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon) = 0.$$

Si le paramètre (t) satisfait à la relation $\omega = 0$, on voit que l'on a $t' = t$ et le plan P se confond avec le plan (t).

nul), si l'on passe de la sextique Z à la sextique Z_ρ, en employant les substitutions dont j'ai parlé au paragraphe I, h_0 devra, à un facteur numérique près, conserver la même valeur; et, en effet, on vérifie facilement que l'on a, en conservant les notations de ce même paragraphe,

$$h'_0 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2 h_0.$$

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME IX. — *Toutes les sextiques qui sont les asymptotiques d'une surface* $\mathfrak{K}$ *ont même plan central.*

Je dirai que ce plan est aussi le *plan central* de $\mathfrak{K}$; comme je l'ai déjà fait observer, il coupe cette surface suivant trois droites.

33. *Équation de la surface du quatrième ordre qui contient les lignes nodales correspondant aux asymptotiques de la surface* $\mathfrak{K}$.

Pour tous les points de la courbe $\mathfrak{N}$, qui est la ligne nodale de la surface développable ayant Z pour arête de rebroussement, on a

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e} = \frac{3j}{2i}.$$

On déduit de là

$$\frac{-k}{4h_0} = \frac{3j}{2i},$$

d'où

$$6jh_0 + ik = 0,$$

et encore

(12) $$6jh_0 + ik - h^2 = 0.$$

Cette équation représente une surface du quatrième ordre Ω qui contient la nodale $\mathfrak{N}$; en se reportant aux formules (3) du Tableau A, on voit que l'on a

$$i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2 (ik - h^2);$$

en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent, on a donc identiquement

$$6jh'_0 + i'k' - h'^2 = (\theta\lambda - \mu\rho)^2 [6jh_0 + ik - h^2];$$

d'où l'on déduit facilement que la surface Ω contient les nodales $\mathfrak{N}_\rho$, dont le lieu est ainsi donné par l'équation (12).

34. Il y existe un point O de l'espace dont les coordonnées s'expriment au moyen des coefficients de u et du hessien de u.

Les coordonnées de ce point sont déterminées par le système suivant d'équations

$$\frac{a}{3j_0\alpha - 2i_0(\alpha\gamma - \beta^2)} = \frac{b}{3j_0\beta - 2i_0\dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{2}} = \frac{c}{3j_0\gamma - 2i_0\dfrac{\alpha\varepsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2}{6}},$$

....

On vérifie facilement que les quantités a, b, c, ... sont les coordonnées d'un point, car elles satisfont identiquement à la relation

$$(1) \qquad a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0.$$

Cela posé, si l'on détermine le plan polaire du point O par rapport à une quadrique quelconque du réseau (i, h, k), c'est-à-dire à une quadrique dont l'équation soit de la forme

$$\mathrm{A}i + \mathrm{B}h + \mathrm{C}k = 0,$$

il est clair que l'équation de ce plan s'obtiendra en égalant à zéro un invariant de u et de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de u.

D'après ce que j'ai dit plus haut, son équation est nécessairement

$$h_0 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

Théorème X. — *Le plan central* Π *de la surface* $\mathfrak{H}$ *a même pôle relativement à toutes les quadriques du réseau* (i, h, k).

Je dirai que ce pôle est *le centre de la surface* $\mathfrak{H}$ *et des diverses sextiques qui sont les asymptotiques de cette surface*.

VII. — *Sur les droites qui sont situées sur la surface* $\mathfrak{H}$.

35. Si une droite peut être placée sur la surface $\mathfrak{H}$, elle rencontre $\mathcal{S}$ en deux points situés sur l'asymptotique Z. Cette droite

est donc une corde de la sextique Z. Pour trouver la relation qui existe entre les paramètres des extrémités de cette corde, je supposerai qu'ils soient respectivement o et ∞, en faisant

$$t = 1, \qquad \tau = 0, \qquad t' = 0 \qquad \text{et} \qquad \tau' = 1.$$

D'après le Tableau B, les coordonnées de ces points seront donc

$$a = b = c = 0, \qquad d = \alpha, \qquad e = 4\beta,$$

et

$$a = -4\delta, \qquad b = -\varepsilon, \qquad c = d = e = 0.$$

Désignons par $\varkappa$ un paramètre variable; les coordonnées d'un point quelconque de la corde seront données par les équations

$$a = -4\delta, \qquad b = -\varepsilon, \qquad c = 0, \qquad d = \varkappa\alpha, \qquad e = 4\varkappa\beta.$$

On a

$$\begin{vmatrix} -4\delta & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & \varkappa\alpha \\ 0 & \nu\alpha & -4\varkappa\beta \end{vmatrix} = 4\varkappa(\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta);$$

d'où l'on voit que la valeur du paramètre $\varkappa$ correspondant au troisième point de rencontre de la corde avec $\mathfrak{H}$ est donnée par l'équation

$$\varepsilon^2\beta - \varkappa\alpha^2\delta = 0;$$

si la corde est située tout entière sur la surface, cette équation doit être satisfaite pour une infinité de valeurs de $\varkappa$. On doit done avoir

$$\varepsilon^2\beta = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha^2\delta = 0;$$

d'où l'on déduit, d'après les propositions données n° 29, les relations suivantes, qui existent entre les paramètres des extrémités d'une corde de Z située sur la surface,

$$\omega'^2\mathfrak{F}' = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega^2\mathfrak{F} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}(\alpha t'^4 + 4\beta t'^3 + 6\gamma t'^2 + 4\delta t' + \varepsilon)^2 \\ \times[t'(\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta) + (\beta t^3 + 3\gamma t^2 + 3\delta t + \varepsilon)] = 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon)^2 \\ \times[t(\alpha t'^3 + 3\beta t'^2 + 3\gamma t' + \delta) + (\beta t'^3 + 3\gamma t'^2 + 3\delta t' + \varepsilon)] = 0.\end{aligned}$$



36. On peut satisfaire à ces relations de deux façons distinctes :

1° En faisant

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega' = 0.$$

Les racines de ces équations sont les paramètres des quatre points stationnaires de Z (qui sont les quatre points coniques de $\mathcal{H}$) ; on en conclut que les six arêtes du tétraèdre dont ces points sont les sommets sont situées sur la surface.

2° En faisant

$$\mathfrak{F} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}' = 0.$$

Pour résoudre ce système d'équations, je remarque que, en éliminant t' entre ces deux équations, le résultat est un covariant dont le premier terme est

$$\alpha(\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma)t'^2.$$

Ce covariant est donc $\omega\Gamma_0$, Γ_0 désignant le covariant du sixième degré de ω.

Laissant de côté le facteur étranger ω, on voit que les paramètres des extrémités des cordes cherchées seront les racines de l'équation

$$\Gamma_0 = 0.$$

Soient z_1, z_2 et z_3 les racines de l'équation (¹)

$$z^3 - i_0 z + 2f_0 = 0 ;$$

on sait que Γ_0 est le produit des trois facteurs

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_2\omega - 2\eta}, \quad \sqrt{z_3\omega - 2\eta}$$

où η représente le hessien de ω.

Les deux racines de l'équation

$$\sqrt{z_1\omega - 2\eta} = 0$$

sont les paramètres des extrémités d'une corde située sur la surface. Je désignerai cette corde par la lettre D_1. Aux deux autres facteurs correspondront deux autres cordes D_2 et D_3 ; il suit d'ail-

(¹) *Voir* SALMON, *Algèbre supérieure,* p. 180 et suiv.

leurs de ce que j'ai dit au n° 31 que ces trois droites sont l'intersection de la surface $\mathcal{H}$ par le plan central Π [1].

A cette occasion, je ferai remarquer que le théorème donné au n° 31 peut s'énoncer d'une façon un peu plus générale de la manière suivante :

Si l'on coupe une asymptotique quelconque $\mathcal{H}$ par une quadrique du réseau (i, h, k), cette quadrique rencontre la courbe en quatre points distincts des points coniques. Si l'on partage d'une façon quelconque ces points d'intersection en deux systèmes de deux points, la droite qui joint les deux points doubles de l'involution déterminée par ces deux systèmes est une des droites de la surface $\mathcal{H}$ située dans le plan central.

VIII. — *Pôles et plans polaires relativement à la surface $\mathcal{S}$. Applications diverses.*

37. Considérons un point dont les coordonnées soient a', b', c', d', e'.

L'équation du plan polaire de ce point, relativement à la quadrique $\mathcal{S}$, est évidemment

$$a'\frac{di}{da} + b'\frac{di}{db} + c'\frac{di}{dc} + d'\frac{di}{dd} + e'\frac{di}{de} = 0,$$

ou bien

$$ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea' = 0.$$

Si la quadrique $\mathcal{S}$ est telle que l'on ait $i_0 = 0$, les coordonnées du centre de la surface $\mathcal{H}$ (n° 34) sont α, β, γ, δ, ε.

L'équation du plan polaire de ce point est donc

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

et, cette relation étant identiquement satisfaite, on en conclut que le plan polaire est indéterminé ; par suite :

Lorsque, pour une asymptotique Z, on a $i_0 = 0$, cette asym-

---

[1] Il est clair que tout ce qui précède suppose que la forme ω ne présente aucune particularité. J'examinerai plus tard les cas particuliers où ω aurait un facteur triple ou deux facteurs carrés.

ptotique est située sur un cône du second degré dont le sommet est le centre de la courbe.

38. Soit un plan

$$a\varepsilon_0 - 4b\delta_0 + 6c\gamma_0 - 4d\beta_0 + e\alpha_0 = 0;$$

on voit immédiatement que les coordonnées du pôle de ce plan sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{2i_0\alpha_0 - 8\alpha} = \frac{b}{2i_0\beta_0 - 8\beta} = \frac{c}{2i_0\gamma_0 - 8\gamma} = \frac{d}{2i_0\delta_0 - 8\delta} = \frac{e}{2i_0\varepsilon_0 - 8\varepsilon},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$8 = \alpha\varepsilon_0 - 4\beta\delta_0 - 6\gamma\gamma_0 - 4\delta\beta_0 + e\alpha_0.$$

Il est facile, en effet, de vérifier :

1° Que les quantités déterminées par les équations précédentes sont effectivement les coordonnées d'un point, car elles satisfont à l'identité

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0;$$

2° Que le plan polaire de ce point, par rapport à $\mathcal{S}$, est le plan donné.

39. Comme application des formules précédentes, considérons un plan tangent quelconque à la surface $\mathcal{H}$. Comme nous l'avons vu (n° 18), son équation est

$$\mathcal{E}_0 = at^2t'^2 + 2b(tt'^2 + t^2t') + c(t^2 + 4tt' + t'^2) + 2d(t + t') + e = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$8 = \mathcal{F}_0,$$

et les coordonnées du pôle de ce plan sont données par le système d'équations

$$(13) \qquad \frac{a}{2i_0 - \mathcal{F}_0\alpha} = \frac{b}{-i_0(t + t') - \mathcal{F}_0\beta} = \ldots = \frac{c}{2i_0t^2t'^2 - \mathcal{F}_0\varepsilon}.$$

Supposons le point tellement choisi sur la surface $\mathcal{H}$ que l'on ait

$$\mathcal{F}_0 = 0,$$

les coordonnées du pôle seront données par les équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-(t+t')} = \ldots = \frac{e}{t^2 t'^2};$$

en se reportant au n° 25, on voit que le point ainsi déterminé est le point de la nodale $\mathfrak{N}$, qui est l'intersection des tangentes (t) et (t'); le plan polaire de ce point touche par conséquent la surface $\mathfrak{H}$ au point (t, t').

D'où encore cette conséquence :

La surface développable, qui est la polaire réciproque de la nodale $\mathfrak{N}$ relativement à la quadrique $\mathfrak{S}$, est circonscrite à $\mathfrak{H}$.

40. D'après ce que je viens de dire, on voit que la surface de Steiner $\mathfrak{T}$, qui est la polaire réciproque de $\mathfrak{H}$ relativement à la quadrique $\mathfrak{S}$, contient la nodale $\mathfrak{H}$.

Cherchons l'équation de cette surface; il faut, pour l'obtenir, éliminer t et t' entre les équations (13). A cet effet, $\varkappa$ désignant une quantité inconnue, je suppose que la valeur commune des rapports contenus dans ces équations soit égale à $\frac{\varkappa}{\mathcal{F}_0}$. On mettra facilement ces équations sous la forme suivante :

$$\frac{2i_0\varkappa}{\mathcal{F}_0} = \frac{a+\varkappa\alpha}{1} = \frac{b+\varkappa\beta}{\frac{-(t+t')}{2}} = \frac{c+\varkappa\gamma}{\frac{t^2+4tt'+t'^2}{6}} = \ldots = \frac{e+\varkappa\varepsilon}{t^2 t'^2}.$$

Je remarque maintenant que ces équations expriment que la forme $u + \varkappa\omega$ est un carré parfait; or, pour que cela soit possible, on doit avoir entre les invariants de u et de ω la relation suivante (¹) :

$$(A - 48B)^2 - R = 0.$$

Dans cette formule, A et B représentent deux combinants qui, dans le cas actuel où

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

s'expriment, au moyen des invariants que nous avons introduits,

(¹) SALMON, *Higher Algebra*, §§ 213 et 214.

par les formules suivantes :

$$A = 4\,i_0\,i \qquad \text{et} \qquad B = -\frac{k}{4} - \frac{1}{6}\,i_0\,i;$$

R représente le résultant des équations u et ω. Par suite, la relation précédente (qui est évidemment l'équation de la surface $\mathfrak{T}$) devient

$$144(k + i_0 i)^2 - R = 0.$$

Il est clair que l'équation $R = 0$ représente les plans osculateurs de la sextique Z en ses quatre points stationnaires; ces plans touchent la surface $\mathfrak{T}$ le long de quatre coniques situées sur la quadrique

$$k + i_0 i = 0.$$

Cette quadrique est la polaire réciproque relativement à $\mathcal{S}$ d'une quadrique Υ à laquelle sont circonscrits les quatre cônes nodaux de la surface [1].

La forme de l'équation précédente montre qu'elle représente une quadrique passant par l'intersection des deux quadriques $i = 0$ et $k = 0$.

Je dirai, pour abréger, que la quadrique $k = 0$ est adjointe à la quadrique $\mathcal{S}$ ($i = 0$), et je la désignerai par la notation $\mathcal{S}'$. Cela posé, la remarque précédente donne lieu, relativement à la surface Υ, à la proposition suivante :

THÉORÈME XI. — *Si l'on considère une quadrique quel-*

---

[1] Pour un point conique de la surface $\mathcal{H}$, l'équation $\omega = 0$ étant satisfaite, de la formule donnée (n° 10) il résulte que l'équation du cône, circonscrit à $\mathcal{H}$ et ayant ce point pour sommet, est

$$J_0^2 = 0.$$

Le cône circonscrit est donc un cône du second degré double; c'est un des cônes nodaux de la surface.

Il est important de remarquer que les *quatre cônes nodaux appartiennent à toutes les asymptotiques*.

Sur ces cônes, et en général sur la théorie de la surface qui fait l'objet de ce Mémoire, *voir :*

STURM, *Uber die Römische Fläche von Steiner* (*Math. Ann.,* III);

ECKARDT, *Beiträge zur analytischen Geometrie* (*Math. Ann.,* V);

TOWNSEND, *On the Nodal Cones of Quadrinodal Cubics* (*Quarterly Journal,* X).

conque $\mathcal{S}_\rho$, *passant par une asymptotique de* $\mathcal{H}$, *et la quadrique adjointe* $\mathcal{S}'_\rho$, *la développable, circonscrite à* $\mathcal{S}_\rho$ *le long de leur intersection, est circonscrite à la quadrique* Υ.

Réciproquement, si l'on circonscrit à Υ *et à* $\mathcal{S}_\rho$ *une surface développable, la courbe suivant laquelle cette développable touche* $\mathcal{S}_\rho$ *est située sur* $\mathcal{S}'_\rho$.

IX. — *Sur les fonctions qui jouent le rôle d'invariants relativement aux substitutions qui permettent de passer d'une asymptotique de* $\mathcal{H}$ *aux autres asymptotiques de la surface.*

41. Étant donnée une asymptotique quelconque Z de la surface $\mathcal{H}$, on peut, en général (sauf un cas particulier que j'examinerai tout à l'heure), en déduire toutes les autres asymptotiques au moyen des substitutions dont j'ai parlé au paragraphe I.

Ces substitutions peuvent être définies par le système linéaire

$$\begin{matrix} \rho & \theta \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

et il y existe un certain nombre de fonctions des coefficients a, b, c, ... qui, quand on y effectue ces substitutions, ne changent pas de valeur, ou, pour parler plus exactement, sont simplement multipliées par une puissance de $(\rho\mu - \lambda\theta)$.

Ces fonctions, lorsqu'on les égale à zéro, représentent des surfaces indépendantes de l'asymptotique particulière qui sert de base au système de coordonnées et ne dépendant que de la surface $\mathcal{H}$ elle-même.

Telles sont, par exemple, les fonctions $ik - h^2$ et h_0, qui donnent lieu aux relations

$$i'k' - h'^2 = (\rho\mu - \lambda\theta)^2(ik - h^2)$$

et

$$h_0 = (\rho\mu - \lambda\theta)^2(ik - h^2).$$

L'équation $ik - h^2 = 0$ représente, comme nous l'avons vu, l'enveloppe des quadriques $\mathcal{S}_\rho$, et l'équation $h_0 = 0$ est celle du plan central.

Les fonctions qui jouissent de cette propriété jouent évidemment un rôle important dans la théorie de la surface $\mathcal{H}$; outre

celles dont je viens de parler, il est facile d'en trouver plusieurs autres.

Il résulte, en effet, des formules données au n° 7 du paragraphe I, que, par la substitution

$$\begin{matrix} \rho & \theta \\ \lambda & \mu, \end{matrix}$$

les formes

$$ix^2 + 2hxy + ky^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i_0 xy^2 + 2j_0 y^3$$

se changent respectivement en

$$i'x^2 + 2h'xy + k'y^2 \quad \text{et} \quad x^3 - i'_0 xy^2 + 2j'_0 y^3.$$

De là résulte que les invariants de ce système de formes sont des fonctions jouissant de la propriété dont je viens de parler.

Nous aurons à considérer [1] :

1° L'invariant quadratique

$$i_0^2 i + 18 j_0 h + 3 i_0 k;$$

je désignerai par Θ la quadrique dont l'équation s'obtient en égalant à zéro cet invariant;

2° Le résultant de ces formes ; j'étudierai de préférence les facteurs de ce résultant.

En désignant, comme au n° 36, par z_1, z_2 et z_3 les trois racines de l'équation

$$z^3 - i_0 z + 2j_0 = 0,$$

je m'occuperai des surfaces représentées par les équations

$$z_1^2 i + 2z_1 h + k = 0,$$
$$z_2^2 i + 2z_2 h + k = 0,$$
$$z_3^2 i + 2z_3 h + k = 0.$$

---

[1] Salmon, *Algèbre supérieure*, § 157.

SUR LA REPRÉSENTATION

SUR UN PLAN DE LA SURFACE DU TROISIÈME ORDRE

QUI EST LA RÉCIPROQUE DE LA SURFACE DE STEINER.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1872.

1. On dit qu'une surface S peut être représentée sur un plan P, lorsque à chaque point M de la surface correspond un point unique et bien déterminé du plan, et réciproquement lorsque à chaque point du plan correspond un point unique et bien déterminé de la surface.

Lorsque le point M de la surface décrit une courbe, le point m, qui lui correspond sur le plan, décrit une autre courbe qui est, pour ainsi dire, l'image de la première, et l'on comprend que les propriétés des courbes tracées sur la surface puissent se déduire de celles des courbes qui sont leurs images.

La projection stéréographique, qui constitue un des moyens que l'on peut employer pour représenter, dans le sens que je viens d'indiquer, la sphère sur le plan, a déjà depuis longtemps familiarisé les géomètres avec ces considérations qui permettent non seulement de transporter à la sphère les propriétés descriptives et métriques des figures planes, mais encore, en sortant de la sphère, d'établir des propriétés importantes des figures dans l'espace.

Le but de cette Note est d'appliquer la même méthode à l'étude d'une surface remarquable du troisième ordre, que j'ai déjà étudiée analytiquement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1).

(1) *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner,* 2e série, t. XI, 1872.

2. Il est facile de voir qu'une surface quelconque du troisième ordre peut être représentée sur un plan.

Une telle surface contient en général 27 droites; soient D et D deux de ces droites qui ne sont pas dans un même plan.

Par un point M de la surface on peut mener une droite unique et bien déterminée qui s'appuie sur D et D', cette droite rencontrera un plan P arbitrairement choisi en un point bien déterminé m; réciproquement, le point m étant donné, on ne pourra mener par ce point qu'une droite s'appuyant sur D et D'; cette droite rencontrera la surface du troisième ordre en deux points situés respectivement sur D et D', et en un troisième point M distinct de ces points et parfaitement déterminé.

On obtient ainsi, on le voit, une représentation de la surface sur le plan P; on aurait évidemment pu, dans le même but, employer au lieu des droites D et D' une cubique gauche quelconque tracée sur la surface, car une des propriétés caractéristiques de cette courbe consiste en ce que, par chaque point de l'espace, on ne peut mener qu'une seule droite qui la rencontre en deux points ([1]).

3. Dans ce qui suit, je m'occuperai spécialement de la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre S qui contient les six arêtes d'un tétraèdre T.

En prenant ce tétraèdre pour tétraèdre de référence, on voit que l'équation d'une pareille surface est de la forme

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{u}=0.$$

La surface qui lui est réciproque (c'est-à-dire la surface qui est, par rapport à une surface du second degré, le lieu des pôles des plans qui lui sont tangents) est une surface du quatrième ordre; et cette nouvelle surface jouit de la propriété d'être coupée

---

([1]) Sur la représentation sur un plan d'une surface du troisième ordre, *voir* le beau Mémoire de M. Cremona : *Sur les surfaces du troisième ordre,* et la *Géométrie de situation,* de M. Reye, p. 172 et 299.

M. Cremona a aussi publié (*Comptes rendus de l'Institut lombard,* 1867) un Mémoire sur la représentation sur un plan de la surface de Steiner, mais je n'ai pu en prendre connaissance.

suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents, c'est donc la *surface* dite *de Steiner*.

On en conclut que, si l'on considère un cône circonscrit à S, et ayant pour sommet un point de cette surface, ce cône se compose de deux cônes du second degré; la courbe de contact se décompose aussi en deux courbes distinctes qui sont évidemment des cubiques gauches.

4. Quand on étudie la représentation sur un plan de la surface S, on voit facilement que l'on peut effectuer la représentation de telle sorte qu'à toute courbe plane de S corresponde, sur le plan, une cubique passant par six points fixes (Π) qui sont les sommets d'un quadrilatère complet Q, et qui correspondent d'ailleurs aux six arêtes du tétraèdre situé sur S.

Cela posé, soient A et B deux points de S et a, b les points qui leur correspondent sur le plan; soient, de plus, C le troisième point où la droite AB rencontre S et c le point correspondant.

Toutes les sections planes de S, qui passent par A et B, passent également par le point C; les cubiques qui sont leurs images passent donc aussi toutes par le point c, d'où il suit que ce point est le *neuvième point* commun aux cubiques qui passent par les points a et b et les six sommets du quadrilatère Q.

Pour déterminer facilement ce neuvième point, supposons, pour un instant, que les points a et b soient les ombilics du plan, c'est-à-dire les points de l'infini où se croisent tous les cercles de ce plan. Si l'on délaisse un des côtés du quadrilatère Q, les trois autres côtés déterminent un triangle, et le cercle circonscrit à ce triangle constitue, avec le côté dont j'ai parlé, une cubique passant par les huit points a, b et (Π); ce cercle passe donc par le neuvième point.

D'où cette proposition :

En prenant, trois à trois, les quatre côtés d'un quadrilatère complet, on détermine quatre triangles; les cercles circonscrits à ces triangles se coupent en un même point O, *qui est le neuvième point commun aux cubiques qui passent par les ombilics du plan et par les six sommets du quadrilatère.*

Imaginons la parabole inscrite dans ce quadrilatère, les quatre



triangles dont je viens de parler lui sont circonscrits, et l'on sait que le cercle circonscrit à un triangle, circonscrit lui-même à une parabole, passe par le foyer de cette courbe.

Le point O est donc le foyer de cette parabole, ou encore le point de rencontre des tangentes qu'on peut lui mener par les ombilics.

5. Revenant maintenant au cas général, nous voyons que pour construire le neuvième point commun aux courbes du troisième ordre, qui passent par les six sommets d'un quadrilatère complet et deux points donnés a et b, il suffit d'inscrire dans le quadrilatère une conique tangente à ab, et par les points a et b de mener des tangentes à cette courbe; le point d'intersection de ces droites est le point cherché.

En d'autres termes, *si trois points* A, B *et* C *de la surface* S *sont en ligne droite, leurs images* a, b *et* c *sur le plan forment un triangle dans lequel on peut inscrire une conique inscrite dans le quadrilatère* Q.

Pour abréger, j'appellerai simplement *coniques du faisceau* les coniques inscrites dans le quadrilatère Q.

6. Considérons une droite tangente au point A à la surface S, ou, si l'on veut, passant par le point A et le point infiniment voisin A'; si l'on désigne par a et a' les images des points A et A', on voit que, pour obtenir l'image du troisième point où la tangente rencontre la surface, il suffit de construire une conique du faisceau tangente à aa', et de mener par a la seconde tangente à cette conique; le point de contact b de cette tangente est l'image du point cherché.

D'où les conséquences suivantes :

1° *Le plan mené au point* A, *tangentiellement à* S, *coupe cette surface suivant une courbe du troisième ordre à point double, lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point* a *aux coniques du faisceau.*

2° *Les lignes asymptotiques de la surface* S *ont pour images les coniques du faisceau.*

En effet, soit t une tangente à l'une de ces coniques et touchant

cette courbe au point a, le point de contact de la deuxième tangente, qu'on peut mener du point a à la conique, se confond avec le point lui-même, la proposition est donc démontrée (¹).

3° *Si l'on circonscrit à la surface les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* A *de cette surface, les deux cubiques de contact ont pour images les tangentes aux deux coniques du réseau qui se croisent au point* a.

7. Soient z une conique du réseau représentant l'asymptotique Z de la surface S et M un point de cette asymptotique; il est le sommet de deux cônes du second degré circonscrits à S et qui la touchent suivant deux cubiques gauches dont l'une est représentée par la tangente menée en m à la cubique z; je dirai que cette cubique *appartient* à l'asymptotique Z, en sorte que l'ensemble des cubiques appartenant à cette courbe sera représenté par l'ensemble des droites tangentes à z.

En se reportant au n° 7, on déduira facilement de cette définition la proposition suivante :

La surface développable, qui a pour arête de rebroussement une cubique appartenant à une asymptotique Z, *coupe la surface suivant cette asymptotique.*

D'où encore :

Si l'on circonscrit à S *les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* M *de cette surface, les surfaces développables dont les courbes de contact sont les arêtes de rebroussement coupent* S *suivant les asymptotiques qui se croisent au point* M.

8. Soient une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z et A l'un de ses points; joignons A à un autre point quel-

---

(¹) Clebsch a le premier trouvé les asymptotiques de la surface de Steiner dont on déduit, par réciprocité, les asymptotiques de la surface donnée.

M. Darboux (*Bulletin des Sciences mathématiques,* t. I, p. 355) a, d'une façon plus générale, déterminé les lignes asymptotiques des surfaces comprises dans l'équation

$$Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0.$$

conque B de la cubique, la droite ainsi obtenue rencontre S en un point C dont il est facile d'avoir l'image.

En effet, a et b étant les images des points A et B et c l'image du point C, il suffit (nº 5), pour construire le point c, de considérer la conique z qui est tangente à ab et de mener par les points a et b deux tangentes à cette courbe ; le point d'intersection de ces deux droites, qui est le point c, est nécessairement sur la tangente menée par le point a ; d'où cette conséquence importante :

Étant donnée une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z, *si l'on imagine un cône quelconque du second degré contenant cette cubique, il coupe la surface* S *suivant une seconde cubique qui appartient également à l'asymptotique* Z ;

Ou autrement :

Deux cubiques appartenant à la même asymptotique sont situées sur un même cône du second degré, ayant pour sommet le point d'intersection de ces courbes qui est distinct des sommets du tétraèdre fondamental T.

9. Lemme. — *Quand un tétraèdre est inscrit dans une cubique gauche, toute corde de la cubique coupe les faces du tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Soient maintenant deux cubiques quelconques appartenant à une asymptotique Z ; ces deux cubiques sont toutes deux circonscrites au tétraèdre T et sont situées sur un même cône du second degré ; elles ont donc une infinité de cordes communes ; on déduit, de là et du lemme précédent, la proposition suivante :

Les cordes de toutes les cubiques appartenant à l'asymptotique Z *coupent les faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Leur ensemble constitue ainsi le complexe remarquable du second ordre étudié par MM. Chasles, Reye, Lie, Darboux [1].

---

[1] *Voir* notamment Reye, *Geometrie der Lage*, t. II, p. 126 et 299.

En particulier, les tangentes aux cubiques font partie du complexe ainsi que les tangentes à l'asymptotique Z qui est l'enveloppe de ces cubiques. Par suite :

Les tangentes à une asymptotique Z *rencontrent les quatre faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est une quantité constante* ζ, *et le complexe* (Z) *des droites, qui sont partagées dans le même rapport par les faces du tétraèdre, se compose des cordes des cubiques appartenant à cette asymptotique* (¹).

On déduit encore de ce qui précède les propositions suivantes :

Étant données deux cubiques gauches situées sur un même cône du second ordre, ces deux cubiques se coupent en quatre points A, B, C *et* D *distincts du sommet du cône; cela posé, les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, se coupent suivant une courbe du dixième ordre et une courbe* K *du sixième ordre et de quatrième classe; cette courbe* K, *les deux cubiques gauches et les six arêtes du tétraèdre* ABCD *sont situées sur une même surface du troisième ordre dont* K *est une asymptotique.*

Le cône du complexe ayant pour sommet un point donné de la surface S *est le cône du second degré qui contient les deux cubiques appartenant à l'asymptotique* Z *et se croisant en ce point.*

Tous les cônes circonscrits à S *et ayant leur sommet sur* Z *sont des cônes du complexe.*

10. Une droite quelconque de l'espace, rencontrant la surface fondamentale S aux points A, B et C, peut être représentée par le triangle *abc*, dont les sommets sont les images des points A, B et C.

Une droite de l'espace aura donc pour image un triangle circonscriptible à une conique du faisceau.

En particulier, toutes les droites du complexe (Z) ont pour

(¹) *Cf.* Sophus Lie, *Ueber Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen* (*Math. Ann.*, t. V).



images les divers triangles que l'on peut circonscrire à la conique z.

Soient abc l'un de ces triangles et α, β, γ les points où z est respectivement touchée par les côtés bc, ca, ab. Le plan mené par A tangentiellement à S coupe cette surface (n° 6, 1°) suivant une cubique à point double qui a pour image le lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point a aux coniques du faisceau; cette courbe, et par suite le plan tangent, passe donc par les points de l'asymptotique qui ont leurs images en β et γ; on démontrerait de même que les plans menés en B et C, tangentiellement à S, passent respectivement par les points de l'asymptotique dont les images sont γ, α et α, β.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on coupe la surface S *par une droite quelconque du complexe* (Z), *les plans tangents, menés à la surface aux trois points de rencontre, forment un trièdre dont les trois arêtes rencontrent* Z.

Autrement :

Si les trois faces d'un trièdre circonscrit à la surface S *la touchent en trois points situés en ligne droite, des neuf points d'intersection des arêtes du trièdre avec la surface, il y en a trois qui sont situés sur une même asymptotique.*

Réciproquement :

Un triangle quelconque étant inscrit dans une asymptotique Z, *on peut toujours construire un trièdre dont les faces passent par les côtés de ce triangle et qui touchent la surface en trois points situés en ligne droite. Cette droite appartient au complexe* (Z).

11. Soit K une conique quelconque située dans le plan sur lequel on fait l'image de la surface; on peut construire deux coniques du faisceau C et C' telles qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire des triangles inscrits dans K.

L'ensemble des triangles circonscrits à C représente un système de droites s'appuyant sur K en trois points; K est donc l'intersection de S par une surface réglée V. Comme, d'ailleurs, la même

courbe est l'intersection de S par les droites dont l'image est formée par les triangles circonscrits à C', on voit que la surface V admet deux systèmes de génératrices rectilignes ; c'est par conséquent une surface du second ordre qui, d'ailleurs, passe par les quatre sommets du tétraèdre T.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Toute conique du plan est l'image d'une courbe du sixième ordre, intersection de S *et d'une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T ;

Et réciproquement :

Si l'on coupe la surface S *par une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T, *la courbe d'intersection a pour image une conique.*

12. En particulier, une asymptotique Z de la surface est située sur une surface du second ordre qui admet deux systèmes de génératrices rectilignes (G) et (G').

Si l'on applique aux points de rencontre de la courbe et de ces droites la dernière proposition du n° 10, on obtient les théorèmes suivants :

Par chaque génératrice G, *on peut mener quatre plans tangents à la surface; des quatre points de contact trois sont sur une même ligne droite* D, *qui appartient au complexe* (Z) *et qui engendre une surface du second ordre* (A) *coupant* S *suivant une courbe* A ; *le quatrième point de contact décrit une courbe* A'.

Par chaque génératrice G', *on peut mener quatre plans tangents à la surface; un des points de contact est situé sur la courbe* A, *les trois autres sont sur une ligne droite* D' *qui engendre la surface du second ordre* (A') *qui contient la courbe* A'.

On déduit de là que *la surface développable circonscrite à* S *et à la surface du second ordre qui contient l'asymptotique* Z *se décompose en deux surfaces du quatrième ordre touchant* S *le long des courbes* A *et* A'.

13. Les beaux théorèmes de Poncelet sur les polygones circonscrits à une conique, tandis que leurs sommets décrivent d'autres coniques, conduisent à plusieurs propriétés intéressantes de la surface S, relativement surtout aux diverses surfaces réglées que l'on peut faire passer par des courbes tracées sur ces surfaces; je reviendrai plus tard sur ce sujet qui, pour être convenablement traité, exige une étude préalable du théorème de Poncelet lui-même.

SUR

L'APPLICATION DE LA THÉORIE DES FORMES BINAIRES

A LA GÉOMÉTRIE DES COURBES

TRACÉES SUR UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1872.

I. — *Considérations préliminaires.*

1. Bien que les considérations suivantes puissent être appliquées à toutes les surfaces algébriques, et en particulier au plan [1], je ne les développerai, dans ce Mémoire, que relativement aux courbes que l'on peut tracer sur une surface du second ordre.

Soit S une surface du second ordre, elle possède deux systèmes de génératrices rectilignes; avec M. Chasles [*Théorie des courbes tracées sur l'hyperboloïde à une nappe* (*Comptes rendus,* 1861)] j'appellerai *directrices* les droites de l'un de ces systèmes, en réservant le nom de *génératrices* aux droites de l'autre système.

Prenons arbitrairement sur S une conique K que je désignerai sous le nom de *conique fondamentale;* cette courbe est *unicursale,* c'est-à-dire qu'on peut désigner chacun de ses points par la valeur d'un paramètre t et de telle sorte qu'à chaque valeur du paramètre corresponde un point unique de la courbe.

Soit M un point de la surface S; par ce point passe une directrice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par x; par ce même point passe une génératrice

(1) Le cas du plan présente naturellement un très grand intérêt, mais demande pour l'application de la théorie quelques explications dans lesquelles je n'ai pas voulu entrer ici.

trice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par y. Il est clair, du reste, que le point M est complètement déterminé et sans ambiguïté par les deux quantités x et y; je les appellerai les *coordonnées du point* M.

L'équation d'une courbe tracée sur S sera de la forme $f(x, y) = 0$; son degré p, relativement à la variable x, indiquant en combien de points elle est coupée par une génératrice quelconque, et son degré q, relativement à la variable y, indiquant en combien de points elle est coupée par une directrice. (*Voy.* Chasles, *loc. cit.*)

2. On connaît le procédé ingénieux employé par Plücker pour rendre homogène l'équation $f(x, y) = 0$, en remplaçant les variables x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; nous emploierons ici un procédé analogue en remplaçant x par $\frac{x}{x'}$ et y par $\frac{y}{y'}$. De cette façon, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur S deviendra

$$F(x, x'; y, y') = 0,$$

le polynome F étant homogène et du degré p par rapport aux deux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'.

3. Cela posé, je rappellerai d'abord ce que l'on nomme *émanant* d'une forme binaire ou d'un polynome algébrique homogène à deux indéterminées.

Soit $U(x, x')$ un tel polynome; on appelle *émanants* de ce polynome les divers polynomes compris dans les expressions suivantes :

$$y\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dx'},$$

$$\frac{1}{2}\left(y^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2yy'\frac{d^2U}{dx\,dx'} + y'^2\frac{d^2U}{dx'^2}\right),$$

$$\frac{1}{2.3}\left(y^3\frac{d^3U}{dx^3} + 3y^2y'\frac{d^3U}{dx^2\,dx'} + 3yy'^2\frac{d^3U}{dx\,dx'^2} + y'^3\frac{d^3U}{dx'^3}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont la loi est facile à saisir.

Pour abréger, je désignerai ces émanants par la notation $(U)_1$, $(U)_2$, $(U)_3$, ...; la parenthèse indiquant un émanant de la

forme U, et l'indice qui lui est adjoint le degré de cet émanant par rapport aux lettres y et y'.

Lorsqu'une forme est de degré pair, elle possède un émanant dans lequel les variables x et y entrent au même degré; j'appellerai cet émanant *émanant principal* de la forme, et je le désignerai par la notation (U), en omettant l'indice adjoint à la parenthèse, lorsque cela ne donnera lieu à aucune ambiguïté.

4. Il résulte de ce qui précède que tout émanant d'une forme U se réduit à cette forme lorsque l'on identifie les variables x, x' et y, y'.

Soit U la forme du degré $(p+q)$ à laquelle se réduit le polynome $F(x, x'; y, y')$ lorsqu'on fait $x'=x$ et $y'=y$; l'expression

$$F(x, x'; y, y') - (U)_q$$

est homogène et du degré p par rapport aux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'; de plus elle s'annule lorsqu'on fait $x=x'$ et $y=y'$, elle est donc divisible par

$$yx' - xy' = \omega,$$

et l'on peut poser

$$F(x, x'; y, y') = (U)_q + \omega F_1(x, x'; y, y'),$$

F_1 désignant un polynome du degré $p-1$ par rapport aux variables x, x', et du degré $q-1$ par rapport aux variables y, y'.

On peut appliquer au polynome F_1 le même raisonnement et, en continuant de proche en proche, mettre l'équation d'une courbe, tracée sur la surface du second ordre S, sous la forme suivante :

$$\Phi = (U)_q + \omega(V)_{q-1} + \omega^2(W)_{q-2} + \ldots = 0,$$

où U, V, W, ... désignent respectivement des polynomes entiers en x et x', des degrés $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ...

5. En particulier, si l'on a $p=q$, l'équation de la courbe pourra se mettre sous la forme

$$\Phi = (U) + \omega(V) + \omega^2(W) + \ldots = 0,$$

où U, V et W désignent respectivement des polynomes entiers



en x et x', des degrés $2p$, $2(p-1)$, $2(p-2)$; et je ferai observer que, dans ce cas, Φ est homogène et du degré p par rapport aux quantités $x-y$, xy et $x+y$ (¹).

6. Par la forme précédente que j'ai donnée à l'équation d'une courbe algébrique, on voit que cette équation s'obtient en égalant à zéro un polynome Φ, qui est un covariant double des formes U, V, W, ...; on sait, en effet, que ω est un covariant double de toutes les formes et qu'un émanant quelconque d'une forme est un covariant double de cette forme.

De là résulte que l'étude de cette courbe se rattache intimement à l'étude simultanée de ces formes; je ne veux pas dire par là qu'elle s'y réduise, car, pour étudier complètement une courbe, il est nécessaire de la comparer avec d'autres courbes qui introduisent d'autres formes dans cette étude.

On pourra toujours néanmoins, dans un calcul relatif à un certain nombre de courbes, faire en sorte que l'on n'ait à considérer que des invariants ou des covariants d'un système de formes binaires, et profiter de leurs propriétés connues pour en déduire des propriétés géométriques de ce système de courbes, ou pour simplifier les opérations.

S'il s'agit, par exemple, de calculer un covariant simple, il suffira de calculer son premier terme; s'il s'agit d'un invariant, on pourra le calculer sous sa forme canonique (²).

7. Éclaircissons ceci par un exemple. Je ferai auparavant remarquer que, si O désigne le pôle du plan de la conique fondamentale K par rapport à la surface S, les coordonnées d'un point M de cette surface étant x et y, les coordonnées du point M′ où le rayon OM perce S sont y et x. De là résulte que si une courbe peut être placée sur un cône ayant pour sommet le point O, son équation doit être symétrique en x et y; elle doit être par conséquent de la forme

$$(U) + \omega^2(W) + \ldots = 0,$$

et ne pas contenir les puissances impaires de ω.

(¹) Ici, pour abréger, je fais, comme je le ferai plus communément, dans la suite de ce Mémoire, $x' = y' = 1$.

(²) *Voir* en général, sur cette théorie des formes, l'*Algèbre supérieure* de Salmon (Paris, Gauthier-Villars).

En particulier, considérons une biquadratique gauche tracée sur S, c'est-à-dire la courbe du quatrième ordre qui résulte de l'intersection de S par une surface du second ordre n'ayant avec elle aucune génératrice commune. Comme on peut la placer sur quatre cônes différents, son équation pourra, de quatre façons différentes, se mettre sous la forme

$$(\mathrm{U}) + k\omega^2 = 0,$$

k désignant une constante et U un polynome du quatrième degré; si l'on fait

$$\mathrm{U} = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e,$$

l'équation de la courbe sera par conséquent

$$(1) \quad y^2(ax^2+2bx+c)+2y(bx^2+2cx+d)+(cx^2+2dx+e)+k(y-x)^2=0.$$

Pour trouver les génératrices de la surface qui touchent la courbe, il faut chercher pour quelles valeurs de y, x acquiert des racines égales. Ces valeurs seront données par l'équation $\mathrm{F}(y)=0$, où F désigne le discriminant de l'équation précédente pris par rapport à x; de même, pour une raison de symétrie, les directrices de la surface tangentes à la courbe seront déterminées par l'équation $\mathrm{F}(x)=0$.

Quelle est l'équation générale des biquadratiques tangentes à quatre directrices données et pouvant être placées sur un cône dont le sommet est en O?

Il est clair que, pour résoudre cette question, il faut déterminer de la façon la plus générale le polynome U et la constante k de telle façon que le discriminant $\mathrm{F}(x)$ soit un polynome donné.

On voit aussi facilement que le problème est identique avec l'intégration de l'équation différentielle d'Euler, qui sert de point de départ à la théorie des fonctions elliptiques. En effet, l'équation (1), étant successivement ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et de y, peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\mathrm{M}x^2 + 2\mathrm{N}x + \mathrm{P} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{M}'y^2 + 2\mathrm{N}'y + \mathrm{P}' = 0,$$

d'où l'on déduit par la différentiation

$$(\mathrm{M}x + \mathrm{N})\,dx + (\mathrm{M}'y + \mathrm{N}')\,dy = 0;$$



évidemment

$$Mx + N = \sqrt{F(x)} \qquad \text{et} \qquad M'y + N' = \sqrt{F(y)},$$

l'équation devient donc

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{F(y)}};$$

et l'on voit que, pour intégrer cette équation, il faut (ce qui est précisément la méthode de Cauchy) déterminer le polynome U et la constante k de la façon que j'ai indiquée.

Comme le discriminant $F(x)$ est un covariant de la forme U, il suffit de calculer son premier terme; en ne conservant dans U que les termes du degré le plus élevé en x, il se réduit à $x^2(ay^2 + 2by + c + k)$, d'où l'on voit que le terme de $F(x)$ du degré le plus élevé en x est $(ac - b^2)x^4 + kax^4$; par suite on a $F(x) = H + kU$, H désignant le hessien de U.

8. Supposons maintenant que nous remplacions U par $\alpha U + 6\beta H$, α et β désignant des quantités numériques indéterminées. Sans faire de nouveau calcul, on sait, par les importantes formules dues à M. Cayley, que H devient $(\alpha\beta S + 9\beta^2 T)U + (\alpha^2 - 3\beta^2 S)H$ (1), S et T désignant les invariants fondamentaux de la forme U.

Par suite $F(x)$ devient $MU + (\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta)H$, M désignant un nombre dont il est inutile d'écrire la valeur.

Pour que le discriminant $F(x)$ prenne donc (à un facteur numérique près) une valeur donnée U, il suffit de choisir la constante k de façon que l'équation $\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta = 0$ soit satisfaite. D'où la proposition suivante :

Soit U *un polynome quelconque du quatrième degré; en désignant par* H *son hessien et par* S *son invariant quadratique, l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{U(y)}}$$

est

$$6\beta(\alpha U + 6\beta H)_2 + (3\beta^2 S - \alpha^2)(x - y)^2 = 0,$$

(1) Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 183.

le rapport $\alpha : \beta$ étant la constante arbitraire introduite par l'intégration.

La parenthèse affectée de l'indice 2 désigne ici l'émanant principal de la forme $\alpha U + 6\beta H$.

II. — *Équation d'une section plane ;*
système de coordonnées dans l'espace.

9. L'équation d'une conique tracée sur la surface est de la forme

$$y(Ax + B) + (Bx + C) + K(y - x) = 0; \tag{2}$$

je considérerai les quantités A, B, C, K, qui entrent dans cette équation, comme les coordonnées du point de l'espace dont le plan polaire par rapport à la surface est le plan de la conique.

On pourrait aussi les regarder comme les coordonnées tangentielles de ce plan, et je le ferai quelquefois ; mais généralement je les emploierai comme coordonnées ponctuelles.

Cela posé, étant données les équations de deux coniques

$$y(Ax + B) + (Bx + C) + K(y - x) \quad 0$$

et

$$y(A'x + B') + (B'x + C') + K'(y - x) = 0,$$

on voit, par un calcul facile, que la condition nécessaire et suffisante, pour que le plan d'une de ces coniques contienne le pôle du plan de l'autre, est contenue dans la relation suivante : $AC' + CA' - 2BB' + 2KK' = 0$. Par suite, l'équation du plan polaire (par rapport à la surface) du point de l'espace dont les coordonnées sont A', B', C', K' est

$$AC' + CA' - 2BB' + 2KK' = 0;$$

et, cette équation étant linéaire par rapport aux variables, il en résulte que le système de coordonnées employé est simplement un système particulier de coordonnées tétraédrales.

10. Dans tout ce qui suit, on voit que j'emploierai simultanément deux systèmes de coordonnées, dont l'un (en x et y) ne se rapporte qu'aux courbes tracées sur la surface, tandis que l'autre (en A, B, C, K) s'étend à tous les points de l'espace.



La même équation, suivant que l'on y considérera les x, y ou les A, B, C, K comme les coordonnées courantes, présentera un sens différent.

11. Cherchons les coordonnées rectilignes d'un point (x, y) de la surface. En désignant par X, Y les coordonnées courantes, la conique suivant laquelle la surface est coupée par le plan polaire du point (ici cette conique se réduit à deux droites) a pour équation

$$(X - x)(Y - y) = XY - yX - xY + xy = 0;$$

si l'on identifie cette équation avec l'équation (2), on en déduit les relations

$$\frac{A}{1} = \frac{B + K}{-x} = \frac{B - K}{-y} = \frac{C}{xy},$$

d'où encore

$$(3) \qquad \frac{A}{1} = \frac{B}{-\frac{x + y}{2}} = \frac{C}{xy} = \frac{K}{\frac{y - x}{2}}.$$

Ces formules serviront à trouver en coordonnées rectilignes l'équation d'une courbe donnée en *coordonnées de la surface*, et je ferai, à ce sujet, cette remarque importante que si, dans un invariant de la forme (A, B, C) et d'un nombre quelconque d'autres formes, on remplace respectivement A, B, C, K par les valeurs données ci-dessus, le résultat sera un covariant du système composé de ces formes.

12. En particulier, supposons que l'équation d'une courbe M soit de même degré p par rapport à x et à y; on sait que (n° 5), dans ce cas, son équation est homogène par rapport aux quantités $x - y$, $x + y$ et xy; en remplaçant ces quantités par les expressions données, on obtiendra l'équation d'une surface de degré p, qui contiendra la courbe et dont cette dernière constituera l'intersection complète avec la surface du second degré fondamentale [1]; et je ferai observer que cette équation sera un invariant du système de formes qui caractérisent la courbe.

---

[1] *Voir,* à ce sujet, la Note de M. Halphen, même Tome, p. 19.

Ainsi, l'équation d'une biquadratique étant

$$y^2(ax^2+2bx+c)+2y(bx^2+2cx+d)+cy^2+2dx+e+k(y-x)^2=0,$$

on pourra la mettre sous la forme

$$ax^2y^2+2bxy(x+y)+c[(y+x)^2+2xy]+2d(x+y)+e+k(y-x)^2=0,$$

d'où l'on déduira, en employant le tableau (3), l'équation en coordonnées rectilignes d'une des surfaces du second degré qui contient la biquadratique

$$a\mathrm{C}^2-4b\mathrm{BC}+c(4\mathrm{B}^2+2\mathrm{AC})-4d\mathrm{BA}+e\mathrm{A}^2+4k\mathrm{K}^2=0,$$

ou simplement $\mathrm{E}+2k\mathrm{K}^2=0$, en désignant par E l'invariant fondamental des formes (A, B, C) et (a, b, c, d, e)

$$\tfrac{1}{2}a\mathrm{C}^2-2b\mathrm{BC}+c(2\mathrm{B}^2+\mathrm{AC})-2d\mathrm{BA}+\tfrac{1}{2}e\mathrm{A}^2.$$

13. Si l'on élimine les variables x et y entre les équations (3), on obtient évidemment l'équation en coordonnées rectilignes de la surface du second degré S. Cette équation est $\mathrm{K}^2+\mathrm{D}=0$, en représentant, comme je le ferai constamment dans la suite de ces recherches, par D l'invariant $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2$ de la forme (A, B, C).

III. — *Recherche de la forme la plus simple que l'on peut donner à l'équation d'une courbe; groupes de courbes.*

14. On peut, en faisant varier la conique fondamentale, donner une infinité de formes à l'équation d'une courbe donnée M.

Les formules de transformation peuvent évidemment (sans nuire à leur généralité) être mises sous la forme

$$\mathrm{X}=x \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta},$$

α, β, γ et δ désignant des quantités numériques; en sorte que l'on dispose de trois constantes arbitraires.

La chose la plus importante est d'obtenir une équation de la courbe donnée dans laquelle entre le moins de formes possible.

A ce point de vue, on établit facilement que l'équation des cubiques gauches peut, d'une infinité de façons, être mise sous une forme qui ne contienne qu'une forme binaire cubique; sa forme générale est en effet

$$(ax^3+3bx^2+3cx+d)_1+(a'x+b'y)(y-x)=0,$$



et l'on peut, d'une infinité de manières, disposer des trois constantes arbitraires en sorte que a' et b' s'évanouissent.

L'équation de la biquadratique peut (comme on le sait déjà) être mise, de quatre façons différentes, sous une forme où n'apparaît qu'un polynome du quatrième degré.

L'équation générale de la quartique gauche, c'est-à-dire de la courbe du quatrième ordre par laquelle on ne peut faire passer qu'une surface du second ordre, est

$$(ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e)_1 + (a'x^2 + 2b'x + c')(y - x) = 0,$$

et un calcul simple fait voir que l'on peut, d'une seule façon, disposer des constantes arbitraires en sorte que a', b' et c' s'évanouissent; on peut donc mettre l'équation de la quartique (et cela d'une seule manière bien déterminée) sous une forme où n'apparaît qu'une seule forme biquadratique; ce sera pour nous l'équation réduite de la courbe.

15. Étant donné un système quelconque de formes, je classerai dans un même groupe toutes les courbes dont l'équation ne dépend que de ces formes et de leurs divers covariants, et je dirai que toutes ces courbes constituent les formes du groupe.

Ainsi, étant donnée une forme biquadratique U, les courbes qui appartiendront à son groupe seront toutes celles dont l'équation renferme seulement la forme U elle-même, son hessien H et son covariant du sixième degré J.

Si l'on s'en tient aux courbes dont le degré ne dépasse pas 4, on voit que ce groupe contient seulement des biquadratiques et des quartiques gauches.

Toutes les biquadratiques du groupe forment un système conjugué par rapport à un tétraèdre fixe qui caractérise le groupe; c'est-à-dire que les sommets de ce tétraèdre sont les sommets des quatre cônes qui contiennent chacune de ces courbes. Les quartiques jouissent de propriétés analogues par rapport à ce tétraèdre.

C'est le groupe dont je viens de parler que je veux étudier d'abord dans la suite de ces recherches.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1872 et 1873.

1. *Les coniques, inscrites dans un quadrilatère fixe, qui touchent une courbe de troisième classe donnée* K, *sont au nombre de douze. Les douze points de contact, les neuf points de rebroussement de* K *et les six sommets du quadrilatère circonscrit sont situés sur une même courbe du cinquième ordre.*

En effet, soient

$$(a, b, c, d)(\lambda, \mu)^2 = 0, \qquad (A, B, C)(\lambda, \mu)^2 = 0, \qquad (A', B', C')(\lambda, \mu)^2 = 0$$

les équations respectives d'une courbe de troisième classe K et de deux coniques C et C' inscrites dans le quadrilatère Q.

L'équation

$$J = \begin{vmatrix} ac - b^2 & ad - bc & bd - c^2 \\ A & B & C \\ A + \lambda A' & B + \lambda B' & C + \lambda C' \end{vmatrix} = 0$$

(qui est indépendante de λ) représente une courbe du cinquième ordre P [1].

L'invariant J s'annule :

1° Pour $ac - b^2 = ad - bc = bd - c^2 = 0$: donc P contient les neuf points de rebroussement de K;

2° Pour $a = b = A + \lambda A' = B + \lambda B' = 0$: donc P contient les douze points des coniques tangentes à K et inscrites dans Q;

3° Pour $A + \lambda A' = B + \lambda B' = C + \lambda C' = 0$: donc P contient les six sommets du quadrilatère Q.

2. *Étant donnés, sur l'ovale de Cassini dont les foyer ssont f et g, deux points a et b, désignons par* α *et* β *les points où les normales en a et b coupent l'axe de la courbe qui renferme les foyers, et par i le point où cet axe est coupé par la perpendi-*

---

[1] *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XVII, § II).

culaire élevée sur le milieu du segment ab, démontrer la relation

$$\frac{1}{i\beta} - \frac{1}{i\alpha} = \frac{1}{ig} - \frac{1}{if}.$$

3. *En un point* M *d'un tore, on mène une droite* MT, *située dans le plan tangent. Soient a et b les points où cette droite coupe la surface; menons les deux sphères qui, passant par* M, *touchent la surface aux points a et b; désignons par* α *et* β *les centres de ces sphères et par* I *le point milieu du segment* $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, *nous menons une droite parallèle à la droite qui joint le point* I *au centre du tore, dirigée dans le même sens et de longueur double, le point extrême de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans le tore par le plan normal passant par* MT.

SUR

LES CONES DU SECOND DEGRÉ

QUI PASSENT

PAR SIX POINTS DONNÉS DE L'ESPACE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

1. Un grand nombre de propriétés intéressantes des surfaces du second ordre (ou *quadriques*) qui passent par six points donnés de l'espace dépendent de la décomposition d'un polynome du sixième degré en la somme de quatre carrés.

Dans cette Note, je me restreindrai au cas le plus simple où on le met sous la forme d'une somme de trois carrés, ce qui correspond, au point de vue géométrique, à l'étude des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points [1].

2. Comme, dans tout ce qui suit, je m'appuie surtout sur quelques propriétés des cubiques gauches, je crois tout d'abord devoir les rappeler brièvement.

Soit $a\lambda^3+3b\lambda^2+3c\lambda+d=0$ l'équation d'un plan mobile, λ désignant une variable numérique arbitraire; ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre, dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche K, définie par le système d'équations

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d};$$

(1) *Voir*, à ce sujet : Hierholzer, *Sur une surface du quatrième ordre* (*Math. Ann.*, t. IV, p. 172).

à chaque valeur de λ correspond un plan osculateur de la cubique dont je désignerai le point de contact sous le nom de *point* (λ), en disant que λ est le paramètre de ce point. On voit facilement, d'ailleurs, que les coordonnées de ce point sont données par les formules

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{-\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} = \frac{d}{-\lambda^3}.$$

3. L'équation d'un plan quelconque étant

$$a\delta - 3b\gamma + 3c\beta - d\alpha = 0,$$

on voit que ce plan coupe la cubique K en trois points dont les paramètres sont les racines de l'équation $\alpha\lambda^3 + 3\beta\lambda^2 + 3\gamma\lambda + \delta = 0$; ces points définissent d'ailleurs complètement le plan, en sorte qu'on peut le considérer comme déterminé par le polynome du troisième degré qui forme le premier membre de cette équation.

Dans ce qui suit, si A représente d'une façon générale l'équation d'un plan, A' désignera le polynome qui a pour racines les paramètres des points où ce plan coupe la cubique. Le degré de ce polynome A' s'abaissera du reste, si le plan passe par le point de la cubique dont le paramètre est infini; l'équation $m = 0$, par exemple, où m désigne une constante, est l'équation du plan osculateur en ce point.

4. Étant donnés six points dans l'espace, on peut mener par ces six points une infinité de cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur une surface du quatrième ordre S. Les différentes génératrices de ces cônes forment un *complexe* de droites du sixième ordre; en effet, étant pris arbitrairement un point M de l'espace, pour qu'une droite passant par ce point soit une droite du complexe, il faut et il suffit que l'on puisse construire un cône du second ordre ayant son sommet sur cette droite, et passant par les six points donnés ainsi que par le point M.

Or, d'après un beau Mémoire de M. Hesse (*Crelle,* t. 49), le lieu des sommets des cônes du second ordre que l'on peut mener par sept points donnés est une courbe gauche du sixième ordre Q; le cône du complexe, qui est le cône projectif de cette courbe, est donc aussi du sixième ordre.

5. La surface S est le lieu des courbes Q. On peut, par les six points donnés, mener une cubique gauche bien déterminée K; soit $V = 0$ l'équation du sixième degré dont les racines sont les paramètres de ces points. Je ferai remarquer que le degré de cette équation peut s'abaisser au cinquième, si le système de coordonnées est tellement choisi que le paramètre d'un des points donnés soit égal à l'infini.

Considérons un des cônes du second ordre que l'on peut mener par les six points; son équation peut se mettre, d'une infinité de façons, sous la forme $AC - B^2 = 0$, où $A = 0$ et $C = 0$ désignent les équations de deux plans tangents quelconques à ce cône, et $B = 0$ l'équation du plan des génératrices de contact. Les paramètres des points de rencontre du cône avec la cubique sont évidemment les racines de l'équation $A'C' - B'^2 = 0$; on doit donc avoir $V = B'^2 - A'C'$. Et réciproquement, si l'on met le polynome du sixième degré V sous la forme précédente, on en déduira l'équation d'un cône du second ordre passant par les six points.

6. Étant donnée une droite quelconque du complexe, c'est-à-dire une génératrice d'un cône du second ordre passant par les six points, on peut la déterminer par l'équation $A = 0$ du plan tangent au cône le long de cette droite, et par l'équation $B = 0$ du plan mené par cette droite et par le point de la cubique dont le paramètre est l'infini.

De cette façon, on voit que le polynome B' sera simplement du second ordre, et l'on devra avoir $V = B'^2 - A'C'$. Soient p, q, r les racines de l'équation $A' = 0$; pour chacune de ces racines, on aura $B' = \sqrt{V}$; et, le polynome B' étant du second degré, on pourra le déterminer par la formule de Lagrange.

Si l'on pose pour un instant $A' = f(\lambda) = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r)$ et $B' = \varphi(\lambda)$, on aura

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) = {} & \sqrt{V(p)}\frac{(x-q)(x-r)}{f'(p)} \\ & + \sqrt{V(q)}\frac{(x-p)(x-r)}{f'(q)} + \sqrt{V(r)}\frac{(x-p)(x-q)}{f'(r)}.\end{aligned}$$

On déduirait facilement de là les équations $A = 0$ et $B = 0$ des plans qui déterminent la droite du complexe, et l'on voit que ses

quatre coordonnées s'exprimeront au moyen des variables p, q, r; l'élimination de ces variables entre les équations qui donnent ces coordonnées fournira l'équation elle-même du complexe.

7. Un plan quelconque est tangent à quatre cônes du complexe.

En effet, $A = 0$ étant l'équation de ce plan, si l'on pose

$$A' = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r),$$

on voit, par ce qui précède, que les génératrices de contact sont déterminées par l'expression $\varphi(\lambda) = 0$, expression qui, à cause des doubles signes, est susceptible de quatre valeurs.

Les équations de ces quatre droites (dans le plan donné) sont de la forme

$$M + N + P = 0, \quad M + N - P = 0, \quad M - N + P = 0, \quad M - N - P = 0,$$

$M = 0$, $N = 0$ et $P = 0$ étant les équations des côtés du triangle formé par les trois points où le plan donné coupe la cubique gauche K.

D'où cette conclusion :

Un plan pris arbitrairement est tangent à quatre cônes du complexe; les génératrices de contact forment un quadrilatère complet; les trois points de rencontre des diagonales de ce quadrilatère sont les points où le plan coupe la cubique gauche K.

8. Le lien intime qui existe, d'après les considérations précédentes, entre la décomposition en trois carrés d'un polynome du sixième degré et le problème qui consiste à construire les différents cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace, nous indique naturellement le rôle que jouent ces cônes dans la théorie des fonctions ultra-elliptiques du premier ordre.

Soit, en effet, $AC - B^2 = 0$ l'équation d'un de ces cônes; le plan mobile dont l'équation est $T = A\rho^2 + 2B\rho + C = 0$, ρ désignant une variable arbitraire, enveloppe ce cône; et les paramètres de ses points de rencontre avec la cubique K sont donnés par l'équation

$$T' = A'\rho^2 + 2B'\rho + C' = 0. \tag{1}$$

Le plan mobile se déplaçant, si l'on fait varier à la fois ρ et le

paramètre λ, on aura par la différentiation

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda + 2(A'\rho + B')\,d\rho = 0,$$

ou, comme $A'\rho + B' = \sqrt{B'^2 - A'C'} = \sqrt{V}$, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{dT'}{d\lambda}d\lambda + 2\sqrt{V}\,d\rho = 0, \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{V}} = -\frac{2\,d\rho}{\frac{dT'}{d\lambda}}.$$

En désignant par a et b deux constantes quelconques, on déduit de là

$$(2) \qquad \frac{(a+b\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{V}} = -\frac{2(a+b\lambda)}{\frac{dT'}{d\lambda}}\,d\rho;$$

or $\frac{dT'}{d\lambda}$ est un polynome du second degré en λ; par suite, d'après un théorème d'Euler bien connu, si l'on fait la somme, pour toutes les racines de l'équation (1), des valeurs que prend alors le second membre de l'équation (2), le résultat est identiquement nul. On a donc aussi, quels que soient a et b,

$$\frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{V(x)}} + \frac{(a+by)\,dy}{\sqrt{V(y)}} + \frac{(a+bz)\,dz}{\sqrt{V(z)}} = 0,$$

x, y et z désignant les paramètres des trois points où le plan qui enveloppe le cône coupe la cubique.

On déduit de là la proposition suivante :

Étant donnés, sur une cubique gauche, six points dont les paramètres sont les racines de l'équation du sixième degré $V = 0$, *si l'on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par ces six points et deux des plans tangents à ce cône, en désignant respectivement par* x_0, y_0 *et* z_0 *les paramètres des points où le premier de ces plans coupe la cubique, et par* x_1, y_1 *et* z_1 *les paramètres des points d'intersection relatifs au second plan, on a les deux relations*

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{V(x)}} + \int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{V(y)}} + \int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{V(z)}} = 0$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{\sqrt{\mathrm{V}(y)}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{V}(z)}} = 0.$$

9. Les équations transcendantes qui précèdent déterminent x_1 et y_1, quand x_0, y_0, z_0 et z_1 sont donnés; on peut aussi, d'après les considérations qui précèdent, les déterminer géométriquement.

Qu'on imagine, en effet, le plan passant par les points (x_0), (y_0) et (z_0), et l'un quelconque des quatre cônes du complexe qui lui sont tangents. On pourra, par le point (z_1), mener le plan tangent à ce cône, et l'un quelconque de ces plans, par son intersection avec la cubique, donnera les points (x_1) et (y_1). Comme il y a lieu de considérer quatre cônes, on voit par suite qu'on trouvera quatre systèmes de solutions.

10. En terminant ces brèves indications sur le problème géométrique que je me proposais de traiter, je ferai remarquer l'analogie complète des résultats obtenus avec ceux donnés par Jacobi relativement aux fonctions elliptiques.

Il obtient, comme on le sait, la construction géométrique de l'addition de ces fonctions, en faisant rouler une tangente sur l'une quelconque des coniques qui passent par quatre points fixes, dont la position détermine sur une conique un polynome du quatrième degré. Pour effectuer géométriquement l'addition des fonctions ultra-elliptiques de première espèce, il suffit de faire rouler un plan sur l'un quelconque des cônes du second ordre que l'on peut mener par six points de l'espace dont la position, sur la cubique gauche qui les renferme, détermine un polynome du sixième degré.

SUR

LA BIQUADRATIQUE SPHÉRIQUE

ET SUR

LA DÉTERMINATION DU PLAN OSCULATEUR

EN UN POINT DE CETTE COURBE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

---

1. J'appellerai simplement *biquadratique sphérique* la courbe qui résulte de l'intersection d'une sphère S et d'une surface du second ordre.

On peut aussi la considérer à un autre point de vue ([1]). Soit une conique quelconque K; la développable, circonscrite à cette conique et à la sphère S, touche cette sphère le long d'une courbe qui est, comme on le sait, la biquadratique sphérique. Cette développable a d'ailleurs, indépendamment de la conique K, trois autres lignes doubles K_1, K_2 et K_3, qui sont également des coniques et qui jouent, par rapport à la courbe, exactement le même rôle.

2. Une biquadratique sphérique a seize foyers ordinaires; c'est-à-dire qu'il y existe quatre génératrices de la sphère de chacun des systèmes (*droites isotropes*), qui sont tangentes à la courbe. Leurs intersections mutuelles déterminent ses seize foyers *ordinaires;* il est clair d'ailleurs que, la biquadratique étant supposée

---

([1]) Voir, *Bulletin de la Société philomathique,* mars 1867, ma Note *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du second ordre.*

réelle, quatre de ces foyers sont réels et déterminent complètement tous les autres.

Dans ce qui suit, je désignerai par F, F_1, F_2 et F_3 ces quatre foyers réels. Les seize foyers sont aussi, comme on le voit facilement, les points d'intersection de la sphère avec les coniques K, K_1, K_2 et K_3.

D'où il résulte que les foyers réels peuvent être situés tous les quatre sur l'une de ces coniques, ou être distribués deux par deux sur deux d'entre elles ; à ce point de vue, nous distinguerons donc deux classes de biquadratiques : celles de première classe où les foyers réels appartiennent à la même conique, celles de seconde classe où ils sont répartis entre deux coniques.

3. Soit M un point de la sphère S; on sait que par ce point passent deux biquadratiques ayant pour foyers les points F, F_1, F_2 et F_3, et que ces deux courbes se coupent à angle droit.

Pour construire les tangentes en ce point, je distinguerai deux cas :

1° Si la biquadratique est de première espèce, menons un plan par le point M et deux quelconques des foyers réels, et un second plan par ce même point et les deux autres foyers.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *et* Mt' *les traces de ces plans sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* $t'Mt$ *sont les tangentes aux biquadratiques qui se croisent au point* M.

2° Si la biquadratique est de seconde espèce, appelons F et F_1 les foyers qui se trouvent sur une des coniques, F_2 et F_3 ceux qui se trouvent sur une deuxième conique, et menons respectivement des plans par le point M et les droites FF_1, F_2F_3.

Cela posé, *si l'on désigne par* Mt *la trace du premier plan et par* Mt' *une droite perpendiculaire à la trace du second sur le plan tangent à la sphère au point* M, *les deux bissectrices de l'angle* $t'Mt$ *sont les tangentes aux deux biquadratiques qui se croisent au point* M.

4. Ayant ainsi déterminé les tangentes aux biquadratiques qui passent par un point de la sphère, proposons-nous de construire, pour l'une d'entre elles, le plan osculateur.

A cet effet, je rappellerai une notion géométrique dont je me suis déjà servi dans une Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes,* insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique,* en février 1867.

Soient M un point de l'espace, et A_1, A_2, ..., A_n, n autres points donnés; déterminons un second point N par la relation suivante

$$\frac{n}{MN} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MA_2} + \ldots + \frac{1}{MA_n},$$

où $\frac{1}{MN}$, $\frac{1}{MA_1}$, ... ne désignent pas les inverses des longueurs MN, MA_1, ..., mais bien des *quantités géométriques* égales à ces inverses en valeur absolue, et portées dans les directions des droites joignant M aux points N, A_1, ..., en sorte que ces quantités se composent comme des forces.

En donnant plus d'extension à la dénomination bien connue due à Maclaurin, nous dirons que le point N, déterminé comme je viens de le dire, est le centre harmonique du point M relativement aux points A_1, A_2, ..., A_n.

On peut remarquer, à ce sujet, que, si les points M, A_1, A_2, ... sont sur une même sphère, il en sera de même du point N.

Cette définition étant admise, on a ce théorème :

En un point quelconque M *d'une biquadratique sphérique, le plan osculateur passe par le centre harmonique du point* M *par rapport aux quatre foyers réels de la courbe.*

On en déduit la construction suivante :

La tangente au point M *ayant été déterminée, comme je l'ai dit précédemment, par* M *et les foyers* F *et* F_1, *faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point* φ *conjugué harmonique de* M *par rapport à* F *et* F_1 ; *par* M *et les deux autres foyers faisons passer un cercle sur lequel nous prendrons le point* φ' *conjugué harmonique de* M *par rapport à ces deux foyers. Faisons enfin passer un cercle par les trois points* M, φ *et* φ'; *le point* μ *de ce cercle, conjugué harmonique de* M *par rapport à* φ *et* φ', *déterminera, avec la tangente, le plan osculateur de la courbe au point* M.

5. La conique sphérique est un cas particulier de la biquadratique; les quatre foyers réels sont respectivement les points d'intersection F et F_1, F_2 et F_3 de la sphère avec les deux focales réelles du cône du second degré dont elle est la base.

La construction précédente se simplifie alors un peu; en effet, les points F et F_1 étant alors diamétralement opposés, le conjugué harmonique de M par rapport à ces deux points est le second point où la sphère est rencontrée par la perpendiculaire abaissée de M sur la focale FF_1. La même chose a lieu pour les deux autres foyers.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donné un point M *sur une conique sphérique, si de ce point on abaisse sur les deux focales réelles de la courbe des perpendiculaires rencontrant la sphère en m et m', le plan osculateur de la courbe au point* M *passe par le conjugué harmonique de ce point relativement aux points m et m'.*

6. Il est presque inutile de faire remarquer que les propositions précédentes s'appliquent aux coniques et aux courbes planes (*anallagmatiques du quatrième ordre*) qui sont les projections stéréographiques des biquadratiques sphériques.

Relativement à ces dernières courbes, on a le théorème suivant :

En un point quelconque M *d'une anallagmatique du quatrième ordre, le cercle osculateur passe par le centre harmonique du point* M *relativement aux quatre foyers réels de la courbe.*

7. J'ajouterai quelques mots sur le problème analogue relatif aux surfaces (*anallagmatiques du quatrième ordre*) qui, dans l'espace, correspondent aux biquadratiques sphériques.

Ces surfaces, d'après un beau théorème dû à M. Moutard, peuvent être considérées de cinq façons différentes comme l'enveloppe de sphères qui se déplacent en coupant orthogonalement une sphère fixe, tandis que leur centre décrit une surface du second ordre.

Les cinq surfaces du second ordre au moyen desquelles on peut décrire ainsi la surface sont homofocales. Une normale menée en

un point M de la surface anallagmatique rencontre chacune de ces surfaces en deux points dont l'un est conjugué au point M.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Quand une normale à une surface anallagmatique se déplace, le rapport anharmonique de quatre quelconques des cinq points conjugués où elle coupe les cinq surfaces homofocales demeure constant ([1]).

On déduit de là, comme on le voit facilement, une construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique, en s'appuyant sur cette propriété bien connue, que les normales en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure sont dans un même plan, et en employant le théorème de Brianchon.

Mais le problème est susceptible d'une solution plus élégante reposant sur des considérations très générales que j'ai données dans une Note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques, etc.*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique*, en décembre 1871.

Cette solution se déduit de la proposition très simple qui suit.

Appelons *centre d'une surface anallagmatique* le centre C commun aux cinq surfaces du second ordre homofocales qui permettent de la décrire.

Cela posé :

Étant donnée une droite quelconque MT *touchant une anallagmatique au point* M, *cette tangente rencontre de nouveau la surface en deux points; désignons par* I *le milieu de la droite joignant les centres des sphères qui touchent la surface en ces points et passent par* M. *Si, par le point* M, *on mène une droite parallèle à* IC, *dirigée dans le même sens et de longueur double, l'extrémité de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans la surface par le plan normal passant par* MT.

([1]) J'ai communiqué verbalement ce théorème à la Société philomathique en mai 1868, et précisément dans le but d'en déduire la construction des rayons de courbure principaux de l'anallagmatique. Depuis, M. Darboux l'a obtenu de son côté et en a développé les principales conséquences dans un *Mémoire sur la cyclide* inséré aux *Annales de l'Ecole normale supérieure,* 1872.



MÉMOIRE SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA SPHÈRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

I. — *Considérations préliminaires sur le rapport anharmonique dans le plan.*

1. Je rappellerai d'abord la signification de quelques termes et de quelques notations que j'emploierai constamment dans ce Mémoire.

On sait que tous les cercles tracés dans un plan se coupent en deux points fixes situés sur la droite de l'infini; je les désignerai sous le nom d'*ombilics du plan;* les droites du plan, qui convergent vers ces points, ont respectivement, si l'on suppose la figure rapportée à des axes rectangulaires, pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$.

Je désignerai les droites, dont le coefficient angulaire est $+i$, sous le nom de *droites isotropes du premier système;* l'ombilic par lequel elles passent, par la lettre I. Les *droites isotropes du second système* ont leur coefficient angulaire égal à $-i$; elles passent toutes par le second ombilic que je désignerai par la lettre J.

2. Soit un point imaginaire α d'un plan; par ce point passent une droite isotrope du premier système contenant un seul point réel A et une droite isotrope du second système contenant un seul point réel A'. Il est clair que ces deux points sont complètement déterminés par le point α, et que réciproquement ce dernier est déterminé sans ambiguïté par les points A et A'.

Je dirai [1] que AA' est le segment représentatif du point α, A étant l'origine et A' l'extrémité de ce segment.

[1] *Voir* ma Note *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouv. Ann. de Math.,* 2e série, t. IX).

Je rappellerai à ce sujet les deux propositions fondamentales suivantes :

Si les segments AA′, BB′, CC′, ... *représentent des points en ligne droite, le polygone* ABC... *formé par les origines des segments et le polygone* A′B′C′... *formé par leurs extrémités, sont semblables et inversement placés.*

Étant donnés deux points imaginaires représentés par les segments AA′ *et* BB′, *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire, dont le module est le produit des longueurs* AB *et* A′B′, *et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la droite* AB *autour du point* A, *le point* B *se mouvant sur un cercle dans le sens direct (c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre) jusqu'à ce que cette droite soit parallèle à* A′B′ *et dirigée dans le même sens.*

3. Étant données deux droites D et D′ situées dans un plan, j'appellerai *angle de la droite* D *avec la droite* D′, et je désignerai par la notation $\widehat{DD'}$, l'angle dont il faut faire tourner, *dans le sens direct,* la droite D pour qu'elle vienne coïncider avec D′. Il est clair que, cette coïncidence obtenue, une nouvelle rotation égale à π ramènera de nouveau la coïncidence. L'angle de deux droites est donc déterminé à un multiple près de π.

Supposons maintenant que, non seulement les droites D et D′ soient données, mais encore que, sur chacune d'elles, on donne le sens dans lequel on doit compter les longueurs positives; j'appellerai alors *angle de la droite* D *avec la droite* D′ l'angle dont il faut faire tourner la droite D dans le sens direct, jusqu'à ce qu'elles coïncident et que sur chacune d'elles les longueurs positives soient comptées dans le même sens.

Un tel angle est évidemment déterminé à un multiple près de 2π, et, par suite, toutes ses lignes trigonométriques sont parfaitement déterminées.

4. Étant donnés trois points A, B, D, je désignerai par la notation $\widehat{BAD}$ l'angle de la droite BA (BA étant considéré comme un segment positif) avec la droite DA (DA étant également considéré comme un segment positif).



C'est, par conséquent, l'angle dont il faut faire tourner (dans le sens des aiguilles d'une montre) le point B pour qu'il se rabatte, non seulement sur la droite AD, mais encore du même côté que le point D, par rapport au sommet de l'angle A.

Si deux arcs de courbe BA et DA se croisent, sur une sphère, au point A, j'appellerai *angle de l'arc* BA *avec l'arc* DA, et je désignerai par la notation $\widehat{BAD}$ l'angle dont il faut faire tourner la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AB et dirigée dans le même sens, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AD et dirigée dans le même sens, le mouvement ayant lieu dans le sens des aiguilles d'une montre pour un spectateur placé au-dessus de la sphère.

5. Soient trois points *réels* A, B, C. Menons par ces points trois droites isotropes du premier système; une droite quelconque D tracée dans le plan les rencontre en trois points α, β, γ, et il est clair que le rapport $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$ est indépendant de la direction de la droite D.

Pour évaluer ce rapport, on peut donc supposer cette droite réelle, et, en se reportant aux propositions données (n° 2), ou bien par une recherche directe très facile, on trouve

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{AB}{AC} e^{\widehat{BAC}.i}.$$

Il est important de remarquer que, dans cette formule, AB et AC sont des quantités essentiellement positives.

6. Considérons maintenant quatre points *réels* du plan A, B, C, D; les quatre droites isotropes du premier système passant par ces points forment un faisceau, dont le rapport anharmonique a généralement une valeur imaginaire $re^{\theta i}$. Je dirai que cette quantité est le *rapport anharmonique* des quatre points A, B, C, D, et je la désignerai, suivant l'usage habituel, par la notation (A, B, C, D); la quantité r, qui est essentiellement positive, sera dite le *module* du rapport anharmonique et l'angle θ l'*argument* de ce rapport.

Pour évaluer ces quantités, coupons le faisceau de droites isotropes par une droite quelconque qui les rencontre aux points α, β, γ et δ. On aura $(A, B, C, D) = \frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} : \frac{\gamma\beta}{\gamma\delta}$, ou, en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent,

$$(A, B, C, D) = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} e^{(\widehat{BAD} - \widehat{BCD})i}.$$

D'où les conclusions suivantes :

Étant donnés quatre points réels d'un plan A, B, C, D, *le module de leur rapport anharmonique* (quantité essentiellement positive) *est égal à* $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}$, *et l'argument de ce rapport est l'angle* $\widehat{BAD} - \widehat{BCD}$ *ou encore l'angle* $\widehat{ABC} - \widehat{ADC}$.

Remarque. — Il est évident que l'argument est déterminé à un multiple près de 2π.

7. Si l'on avait mené par les points A, B, C, D les droites isotropes du second système, le faisceau ainsi obtenu aurait eu pour rapport anharmonique $re^{-\theta i}$; je dirai, de deux rapports anharmoniques qui ont même module et qui ne diffèrent que par le signe de l'argument, qu'ils sont *improprement égaux*.

Si quatre points sont situés sur un cercle (ou sur une droite), les faisceaux, passant par ces points et chacun des ombilics, ont même rapport anharmonique; le rapport anharmonique de ces quatre points est donc réel. D'où cette conclusion :

Si quatre points d'un plan sont situés sur une même circonférence (ou sur une même droite), l'argument de leur rapport anharmonique est un multiple de π.

La réciproque est évidemment vraie.

Lorsque quatre points se trouvent ainsi sur une circonférence (ou sur une droite), le rapport anharmonique, tel que je l'ai défini dans le numéro précédent, a évidemment la même valeur que le rapport tel qu'on le définit habituellement. Il n'y a, par suite, aucune ambiguïté à craindre dans l'extension que j'ai donnée à la signification du mot *rapport anharmonique*.



8. Étant donnés quatre points α, β, γ, δ situés sur une droite réelle ou imaginaire, soient AA′, BB′, CC′, DD′ les segments représentatifs de ces points; de la définition que j'ai donnée ci-dessus, il résulte immédiatement que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ, δ est égal à celui des points A, B, C, D.

Il en est de même lorsque ces points sont situés sur une circonférence.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si quatre points sont situés sur une circonférence (ou une droite) réelle ou imaginaire, leur rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des quatre points réels qui sont les origines des segments représentatifs de ces droites, ou bien encore au rapport anharmonique des quatre points réels qui en sont les extrémités.

9. Pour faire une application simple de cette proposition, je prendrai pour point du départ la propriété suivante, fondamentale dans la théorie des sections coniques : *Étant donnée une conique tangente à quatre droites fixes, toute tangente à cette conique coupe les quatre tangentes fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant;* et je supposerai qu'une ou plusieurs de ces droites deviennent imaginaires.

Considérons, par exemple, un triangle circonscrit à une conique et la droite isotrope du premier système issue d'un de ses foyers F, cette droite et les trois côtés du triangle forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Une tangente mobile coupe les côtés du triangle aux points α, β, γ et la droite isotrope en un point imaginaire représenté par un segment dont l'origine est le point F. On en conclut que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ et F demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace. Par suite des formules données (n° 6), on a donc

$$\frac{F\alpha.\beta\gamma}{F\beta.\alpha\gamma} = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\alpha F\beta} - \widehat{\alpha\gamma\beta} = \text{const.},$$

d'où

$$\widehat{\alpha F\beta} = \text{const.} + \widehat{\alpha\gamma\beta}.$$

Au premier abord, on pourrait croire que l'angle $\widehat{\alpha F\beta}$ est con-

stant, puisque les points α, β, γ sont en ligne droite; mais il faut remarquer que, d'après nos conventions (n° 4), $\widehat{\alpha\gamma\beta}$ est égal à o ou à π, suivant que le point γ est en dehors du segment $\alpha\beta$ ou dans l'intérieur de ce segment; l'angle $\widehat{\alpha F \beta}$ peut donc varier d'une demi-circonférence.

Quant à l'angle des deux droites $F\alpha$ et $F\beta$ (ces droites étant considérées indépendamment de leur direction), il demeure constant.

Considérons encore une droite T tangente à une conique, les deux tangentes isotropes issues du foyer F, et la tangente isotrope du second système issue du foyer G; ces quatre droites forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Soit T′ une tangente quelconque à cette conique rencontrant la tangente fixe en α; elle coupe les droites isotropes du premier système issues des foyers en des points imaginaires dont les segments ont pour origine ces foyers eux-mêmes, et la droite isotrope du second système issue du foyer F en un point représenté par un segment dont l'extrémité est en F; l'origine de ce segment est donc le point F′ symétrique de F par rapport à la tangente mobile.

D'où l'on voit que le rapport anharmonique des quatre points α, F, F′ et G demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace.

On déduit de là les relations suivantes entre les divers éléments du quadrilatère $FF'\alpha G$:

$$\widehat{F\alpha G} - \widehat{FF'G} = \text{const.}, \qquad \widehat{F'\alpha G} - \widehat{F'FG} = \text{const.},$$
$$\widehat{F\alpha F'} - \widehat{FGF'} = \text{const.}, \qquad \widehat{FG\alpha} - \widehat{FF'\alpha} = \text{const.}, \qquad (^1),$$
$$\frac{G\alpha . FF'}{F\alpha . GF'} = \text{const.}, \qquad \frac{G\alpha . FF'}{GF . F'\alpha} = \text{const.}$$

Si l'on remarque que FG est constant et que $F'\alpha = F\alpha$, les deux dernières égalités donneront

$$FF' = \text{const.} \times \frac{F\alpha}{G\alpha} \qquad \text{et} \qquad GF' = \text{const.}$$

D'où l'on déduit, en particulier, cette propriété bien connue que

(1) Il est presque inutile de faire remarquer que ces diverses relations se réduisent à deux relations distinctes.

le lieu du point F′ est une circonférence de cercle ayant pour centre le foyer G.

10. Je ne m'étendrai pas davantage sur les nombreuses relations métriques que l'on peut déduire de la proposition fondamentale de la théorie des coniques et qu'elle renferme ainsi *comme cas particuliers*.

Je ferai seulement l'observation suivante : bien que, dans les théorèmes que nous obtenons ainsi, les éléments de la figure soient essentiellement supposés réels (en vertu même du mode de démonstration), ils n'en sont pas moins vrais dans toute leur généralité ; rien n'empêche donc, dans ces nouvelles propositions, de supposer que certains éléments deviennent imaginaires et d'en déduire de nouvelles relations (1).

---

(1) En général, quand dans une figure certains éléments deviennent imaginaires, toute relation relative à cette figure donne deux relations, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire. D'une proposition donnée on déduit donc deux autres propositions généralement distinctes.

Il peut arriver néanmoins qu'elles se confondent, ou que l'une des deux exprime une simple identité, ou bien encore que l'une d'entre elles serve seulement à lever une ambiguïté et à fixer le signe dont une quantité doit être affectée.

Comme exemple de ce dernier cas je prendrai la proposition suivante :

La somme des distances d'un point d'une ellipse aux deux foyers imaginaires situés sur le petit axe est constante et égale à $2bi$, *b désignant la longueur du petit axe.*

Au sujet de ce théorème je ferai observer que les distances dont il s'agit étant comptées sur des droites différentes, il est impossible *a priori* de fixer leur valeur. En désignant donc par φ et γ les deux foyers imaginaires de l'ellipse et par $M\varphi$ et $M\gamma$ deux quelconques des valeurs dont sont susceptibles les distances du point M de l'ellipse aux foyers φ et γ, le théorème précédent s'exprime par l'égalité suivante :

$$\varepsilon . M\varphi + \eta . M\gamma = 2bi,$$

ε et η étant des constantes dont la valeur est $+1$ ou -1.

F et G désignant les deux foyers réels de l'ellipse, on a $\varphi = (F, G)$ et $\gamma = (G, F)$; j'exprime ainsi que φ et γ ont respectivement pour segments représentatifs les segments FG et GF.

Le point M, *étant supposé réel,* d'après la formule donnée au n° 2, on a, λ désignant l'angle positif, inférieur à un droit, que fait avec la normale MN chacun des rayons vecteurs FM et GM,

$$M\gamma = \sqrt{MF . MG}\, e^{\lambda i} \quad \text{et} \quad M\varphi = \sqrt{MF . MG}\, e^{-\lambda i};$$

11. Soient deux faisceaux homographiques de droites isotropes du premier système; le premier de ces faisceaux est déterminé par le système S des points réels A, B, C, ... situés sur les rayons qui le composent; le second est également déterminé par un système S′ de points réels A′, B′, C′, ...

Cela posé, il résulte immédiatement de cette définition que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est proprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *proprement anharmoniques*.

Soient un faisceau de droites isotropes du premier système déterminé par un système S de points réels A, B, C, ..., et un faisceau homographique de droites isotropes du deuxième système déterminé par un système S′ de points réels A′, B′, C′, ...; on voit immédiatement que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est improprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *improprement anharmoniques*.

Lorsqu'on transforme une figure Σ par rayons vecteurs réciproques, la transformée est improprement anharmonique à Σ; en sorte que, quel que soit le nombre des transformations analogues que l'on opère, la figure transformée sera toujours proprement ou improprement anharmonique à la figure primitive, suivant que le nombre des transformations sera pair ou impair.

---

on déduit de là

$$\sqrt{\mathrm{MF}.\mathrm{MG}}\,(\varepsilon e^{-\lambda i}+\eta\varepsilon^{\lambda i}) = 2bi,$$

ou, en égalant de part et d'autre les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\sqrt{\mathrm{MF}.\mathrm{MG}}\,(\varepsilon+\eta)\;\cos\lambda = 0,$$
$$\sqrt{\mathrm{MF}.\mathrm{MG}}\,(\eta-\varepsilon)\,i\sin\lambda = 2bi.$$

La première équation montre que l'on a $\varepsilon = -\eta$; portant cette valeur dans la seconde équation et élevant au carré, après avoir supprimé le facteur -4, il vient :

$$\mathrm{MF}\sin\lambda.\mathrm{MG}\sin\lambda = b^2,$$

ou bien $\mathrm{FP}.\mathrm{GQ} = b^2$, en désignant par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente en M.



12. De la notion qui précède résulte immédiatement la proposition suivante :

Si, sur une droite (ou un cercle) réelle ou imaginaire, on a une série de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone P; *si, sur une autre droite (ou un autre cercle), on a une série homographique de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone* P′, *les deux polygones* P *et* P′ *sont proprement anharmoniques.*

Pour faire une application de cette proposition, considérons une conique réelle K et une droite imaginaire α tangente à cette courbe, que, par suite, touchera également la droite α' imaginairement conjuguée de la première. Une droite réelle mobile tangente à K rencontre α en un point (A, A′), et α' au point imaginairement conjugué (A′, A).

Pendant le déplacement de la tangente, le point (A, A′) se meut sur une droite; donc la figure (A), décrite par le point A, est semblable à la figure (A′), décrite par le point A′, et inversement placée, et les deux figures sont *improprement anharmoniques*. D'autre part, en vertu de cette propriété fondamentale des coniques que la tangente détermine sur α et α' des divisions homographiques, les figures (A) et (A′) sont *proprement anharmoniques;* il en résulte (n° 8) que les courbes (A) et (A′) sont toutes deux des cercles.

D'où les conclusions suivantes :

Quatre droites réelles tangentes à une conique réelle coupent une droite imaginaire quelconque tangente à cette conique en quatre points représentés par des segments dont les origines sont situées sur une même circonférence.

Si un point mobile M *décrit une circonférence, tandis qu'un autre point* M′ *décrit une autre circonférence en sens inverse et dans le même temps, le point milieu* I *de la corde* MM′ *décrit une conique et la droite menée en* I *perpendiculairement à la corde enveloppe une autre conique.*

13. Tous les théorèmes relatifs à la division homographique

sur une même droite ou sur des droites différentes donnent évidemment lieu à autant de théorèmes correspondants relatifs à deux systèmes de points *proprement anharmoniques;* pour les développer, je n'aurais qu'à transcrire ici plusieurs chapitres de la *Géométrie supérieure* et des *Sections coniques* de M. Chasles. J'éviterai au lecteur la peine de relire, sous une autre forme, des propositions bien connues et les emploierai, dans la suite de ce Mémoire, toutes les fois qu'elles me seront utiles, sans entrer dans plus de détails à ce sujet.

Je ferai cependant la remarque suivante, à cause de son fréquent emploi. On connaît (*Sections coniques,* p. 99) le théorème suivant :

Si l'on a, sur une droite, une série de points en involution, les conjugués harmoniques d'un point P *quelconque de cette droite, relatifs aux couples de points de l'involution, déterminent une série de points* (P); *à un autre point* P' *de la droite correspond une autre série* (P'); *les deux divisions* (P) *et* (P') *sont homographiques.*

D'où cette conséquence pour une figure plane :

Étant donnée dans un plan une figure en involution [1], *les conjugués harmoniques d'un point quelconque* P *du plan déterminant une figure* (P); *à un autre point* P' *correspond une autre figure* (P'); *les deux figures* (P) *et* (P') *sont proprement anharmoniques.*

J'appellerai *courbe en involution* une courbe dont les points peuvent se grouper deux à deux, de telle sorte que deux points conjugués M et M' fassent partie d'un système de points en involution. On déduit alors de ce qui précède la proposition suivante :

Si l'on prend successivement les points conjugués harmoniques de divers points du plan par rapport aux couples de

---

[1] Par la propriété fondamentale de l'involution, on voit que A et A' étant deux points conjugués, ces deux points et les deux points doubles P et Q sont situés sur un même cercle; de plus, les quatre points A, A', P et Q déterminent sur ce cercle une division harmonique.



points conjugués d'une courbe en involution, les diverses courbes ainsi obtenues sont proprement anharmoniques.

En particulier, si, pour un point du plan, la courbe est un cercle, elle sera également un cercle pour tout autre point; ainsi le lieu des points milieux des cordes joignant les points conjugués est un cercle. La courbe en involution qui jouit de cette propriété est par là même complètement définie, et je l'ai déjà étudiée dans une Note *Sur les cassiniennes* publiée dans le *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868). Ses nombreuses propriétés se déduisent du reste avec la plus grande facilité, en employant les considérations qui précèdent, des simples et élégantes relations données par M. Chasles dans sa *Géométrie supérieure*, relativement à un système de segments en involution et aux milieux de ces segments.

14. Soient (A) et (A′) deux systèmes de points improprement anharmoniques, le faisceau déterminé par le système (A) et l'ombilic I et le faisceau déterminé par le second système et l'ombilic J sont homographiques; par suite, tous les points imaginaires (A, A′) sont situés sur un même cercle. D'où cette conclusion :

Si deux systèmes de points (A) *et* (A′) *sont improprement anharmoniques, tous les points imaginaires* (A, A′) *sont situés sur un même cercle.*

Réciproquement :

Si un certain nombre de points (A, A′), (B, B′), ... *sont situés sur un même cercle, les deux systèmes de points* A, B, ... *et* A′, B′, ... *sont improprement anharmoniques.*

SUR UN GENRE PARTICULIER DE SURFACES

DONT ON PEUT INTÉGRER LES LIGNES GÉODÉSIQUES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1873.

Si l'on considère les surfaces pour lesquelles l'élément de longueur est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{v} + \frac{dv^2}{u},$$

on vérifie aisément que leurs lignes géodésiques sont données par l'équation

$$\frac{\cos^3 i}{\sqrt{v^3}} + \frac{\sin^3 i}{\sqrt{u^3}} = \text{const.},$$

i désignant l'angle que fait la ligne géodésique avec la courbe $v = \text{const.}$

SUR LES NORMALES

ABAISSÉES D'UN POINT DONNÉ

SUR UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1874.

1. Étant données une surface du second ordre et une conique située sur cette surface, il semble, au premier abord, que l'on puisse toujours déterminer trois points de cette conique, de telle façon que les normales, menées à la surface en ces points, se coupent en un même point; le nombre des équations de condition auxquelles on doit satisfaire est en effet égal au nombre des constantes arbitraires dont on peut disposer.

Il est remarquable que les coniques jouissant de la propriété que je viens d'énoncer ne puissent être arbitrairement choisies, et que leurs plans enveloppent une surface de quatrième classe Σ.

Réciproquement, étant donné un plan quelconque Π tangent à Σ, il lui correspond une droite Δ, dont voici la propriété principale :

Si d'un point M, *pris arbitrairement sur* Δ, *on mène des normales à la surface du second ordre, trois des pieds de ces normales décrivent la conique de cette surface située dans le plan* Π, *et les côtés du triangle dont ils constituent les sommets enveloppent une autre conique, les pieds des trois autres normales décrivant une conique située dans un second plan* Π' *tangent à* Σ.

Je dirai que les plans Π et Π' sont deux plans conjugués de la surface Σ, et que la droite Δ lui est associée.

2. Pour plus de commodité dans le langage, je considérerai aussi les deux pôles P et P′ des plans Π et Π′ relativement à la surface du second ordre; je dirai également que P et P′ sont deux points conjugués de la surface du quatrième ordre S, qui est la polaire réciproque de Σ par rapport à la surface du second ordre et que la droite Δ leur est associée.

Cela posé, si d'un point M de l'espace on mène les six normales à la surface du second ordre, les plans tangents en ces points forment un hexaèdre ayant dix couples de sommets opposés joints entre eux par dix diagonales.

Il est clair que ces dix couples de sommets sont dix couples de points conjugués de la surface S.

Je dirai que l'hexaèdre ainsi défini appartient à la surface du second ordre et a pour centre le point M.

3. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de la surface du second ordre; X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque M; ξ, η, ζ et ξ′, η′, ζ′ les coordonnées d'un couple quelconque de sommets opposés de l'hexaèdre ayant pour centre le point M.

En introduisant des quantités auxiliaires λ, μ, ν définies par les équations

$$(1) \qquad \lambda = \frac{\eta\zeta' + \zeta\eta'}{b^2 - c^2}, \qquad \mu = \frac{\zeta\xi' + \xi\zeta'}{c^2 - a^2}, \qquad \nu = \frac{\xi\eta' + \eta\xi'}{a^2 - b^2},$$

on établira facilement les six relations

$$(2) \qquad \xi\xi' = -a^2, \qquad \eta\eta' = -b^2, \qquad \zeta\zeta' = -c^2,$$

$$(3) \qquad \xi + \xi' = \mu Z - \nu Y, \qquad \eta + \eta' = \nu X - \lambda Z, \qquad \zeta + \zeta' = \lambda Y - \mu X.$$

4. Les équations (2), qui établissent une relation si simple entre deux sommets opposés de l'hexaèdre, ont déjà été données, sous une forme un peu différente, dans un beau Mémoire de Joachimstahl [1].

---

[1] *De æquationibus quarti et sexti gradus quæ in theoria linearum et superficierum secundi ordinis occurrunt* (*Journal de Crelle*, t. 53).

Des équations (3) on déduit les relations

$$\lambda(\xi+\xi')+\mu(\eta+\eta')+\nu(\zeta+\zeta')=0,$$
$$X(\xi+\xi')+Y(\eta+\eta')+Z(\zeta+\zeta')=0.$$

Entre la première et les équations (1) et (2) on peut éliminer ξ', η', ζ' ainsi que λ, μ, ν, et l'on obtient l'équation suivante de la surface S :

$$\begin{aligned} &c^2(a^2-b^2)^2x^2y^2+a^2(b^2-c^2)^2y^2z^2+b^2(c^2-a^2)^2z^2x^2 \\ &\quad -b^2c^2(b^2-c^2)^2x^2-c^2a^2(c^2-a^2)^2y^2-a^2b^2(a^2-b^2)z^2=0. \end{aligned}$$

De la seconde résulte la proposition suivante :

Étant donné un hexaèdre quelconque appartenant à une surface du second ordre, et ayant pour centre le point M, *le plan mené par le centre* O *de cette surface perpendiculairement au rayon* OM *passe par les milieux des dix diamètres de l'hexaèdre.*

5. Étant donné un couple de points conjugués (ξ, η, ξ', η') de la surface S, les équations (3), en y considérant X, Y, Z comme des coordonnées courantes, représentent la droite Δ associée aux deux points conjugués.

D'où les propositions suivantes :

La droite Δ *associée à un couple de points conjugués* (P, P′) *de la surface* S *est située dans le plan mené par le centre de la surface du second ordre perpendiculairement à la droite qui joint ce centre au milieu du segment* PP′.

Toutes les droites Δ *sont doublement tangentes à la surface* Θ *lieu des centres de courbure de la surface du second ordre.*

6. La surface polaire réciproque Θ étant du quatrième ordre, il en résulte que, par un point quelconque M de l'espace, on peut mener vingt-huit droites doublement tangentes à Θ ; ces vingt-huit droites se composent des trois groupes de droites suivantes :

1° Les six normales menées du point M à la surface ;

2° Les six droites Δ se croisant en ce point, et qui sont les

associées des dix couples de sommets opposés de l'hexaèdre ayant pour centre le point M;

3° Douze autres tangentes doubles situées sur un cône du troisième ordre et formant un groupe de Steiner.

7. Les surfaces réglées, formées par les normales que l'on peut élever aux différents points d'une conique située sur une surface du second ordre, constituent un groupe de surfaces remarquables, étudiées d'abord par M. Chasles et comprises comme cas particulier dans la famille des *quadrispinales;* il importe de distinguer parmi elles celles dont la base est située dans un plan tangent à la surface Σ; on voit, d'après ce qui précède, que ses génératrices se rencontrent trois à trois en un même point d'une droite fixe.

SUR LES DROITES

QUI SONT DOUBLEMENT TANGENTES

A LA SURFACE LIEU DES CENTRES DE COURBURE D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1874.

1. Quelques considérations géométriques très simples permettent d'établir et de compléter, sur certains points, les propositions que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie relativement aux *normales que l'on peut mener d'un point donné à une surface du second ordre.*

Étant donnée une surface du second ordre S, les droites perpendiculaires à leur polaire relativement à S forment un complexe remarquable du second ordre; elles rencontrent évidemment S en deux points tels que les normales se croisent en un même point.

Considérons un triangle ABC situé sur S, et tel que les trois normales en ces points se rencontrent en un même point M; les côtés du triangle sont circonscrits à la conique du complexe située dans son plan, et ses sommets sont situés sur la conique K suivant laquelle le plan coupe S; le plan doit par conséquent couper S suivant une conique dans laquelle on puisse inscrire un triangle circonscrit à la conique du complexe, et, par suite, il enveloppe une surface. Remarquons maintenant que, d'après le théorème de Poncelet, on peut construire, dans le plan, une infinité de triangles tels que ABC; par suite, la surface réglée formée par les normales menées aux différents points de K, ou, en me servant d'une expression déjà employée par M. Mannheim, la normalie ayant pour directrice K, a une ligne triple qui, puisque la normalie est du quatrième ordre, est nécessairement une droite Δ.

Il est bien clair que, puisque, des six pieds des normales que

l'on peut abaisser de chacun des points de Δ, trois décrivent la conique K, les trois autres décrivent une autre conique K', et l'on voit qu'une droite telle que Δ peut être définie par cette propriété, que le lieu des pieds des normales menées de chacun des points de la droite à la surface se décompose en deux coniques ([1]).

Je vais maintenant établir que toutes ces droites Δ sont doublement tangentes à la surface lieu des centres de courbure de S.

2. Considérons, en général, une surface quelconque Σ et sa développée Θ; a désignant un point quelconque de Θ, je représenterai par A le point correspondant de Σ, c'est-à-dire celui pour lequel une des sections principales a pour centre de courbure A.

Cela posé, soient D une droite quelconque et K le lieu des pieds des normales que l'on peut, de chacun des points de D, abaisser sur la surface. En laissant de côté, pour un instant, le cas où D serait normale à Σ, je ferai les remarques suivantes au sujet des points de rencontre de cette droite et de Θ.

Si, en un de ces points A, la droite traverse la développée, la courbe K ne présente aucune singularité au point correspondant a, et elle est tangente en ce point à l'une des lignes de courbure.

Si, en un de ces points B, la droite touche la développée, la courbe K présente un point double au point correspondant b, et les tangentes, menées aux deux branches en ce point, diffèrent généralement des tangentes aux lignes de courbure.

On sait enfin que, si la droite était l'une des normales de la surface Σ touchant la développée en C et C', la courbe K présenterait, au point correspondant c, un point double dont les deux branches toucheraient les deux lignes de courbure.

De là résulte une dépendance mutuelle entre les singularités de la courbe K et les particularités des divers points d'intersection de la droite D avec la développée : ainsi l'on peut, en particulier, énoncer les propositions suivantes :

Le complexe des droites tangentes à la développée se com-

([1]) Depuis que ma première Note a été écrite, j'ai reconnu que le théorème ci-dessus énoncé est dû à M. Desboves, qui a aussi étudié les droites Δ dans sa *Nouvelle théorie des normales à une surface du second degré*.

pose de toutes les droites pour lesquelles la courbe K *possède un point double.*

Si l'on fait abstraction des normales à la surface, la congruence formée par les droites doublement tangentes à la développée se compose de toutes les droites pour lesquelles la courbe K *possède deux points doubles.*

3. Pour faire l'application de ce qui précède à la surface du second ordre S, je remarquerai que la courbe K est alors une biquadratique gauche qui présentera deux points doubles dans deux cas différents.

1° En premier lieu, la courbe K peut se décomposer en deux coniques, et l'on obtient les droites Δ dont j'ai parlé plus haut.

Par chaque point de l'espace, comme je l'ai fait remarquer dans ma précédente Communication, passent dix droites Δ.

2° En second lieu, la courbe K peut se décomposer en une cubique gauche et une génératrice de S.

Si l'on considère le paraboloïde formé par les normales le long d'une de ces génératrices G, toutes les génératrices de ce paraboloïde de même système que G donneront des droites pour lesquelles cette décomposition a lieu, et on les obtiendra toutes en considérant l'ensemble de tous les paraboloïdes normaux le long des diverses génératrices.

La congruence qu'elles forment se compose donc de deux congruences distinctes : l'une composée des génératrices des paraboloïdes normaux le long de toutes les génératrices d'un même système de S; l'autre composée des génératrices des paraboloïdes normaux le long des génératrices de l'autre système.

Par chaque point de l'espace passent six droites appartenant à chacune de ces congruences et situées sur les paraboloïdes normaux le long des douze génératrices qui passent par les pieds des normales que l'on peut abaisser du point donné sur la surface.

4. En résumé, on voit que les vingt-huit droites doublement tangentes à la développée, que l'on peut mener par un point M de l'espace, se distribuent en quatre groupes :

1° Les six normales que l'on peut mener de ce point;

2° Les dix droites Δ;

3° Six droites situées sur des paraboloïdes normaux le long de six génératrices d'un même système de S;

4° Six droites situées sur des paraboloïdes normaux le long de six génératrices de l'autre système.

La détermination de ces vingt-huit droites dépend uniquement de la résolution de l'équation du sixième degré qui donne les pieds des normales.

5. Je ferai remarquer, en terminant, que les considérations qui précèdent s'appliquent à d'autres surfaces qu'à celles du second ordre.

On peut énoncer, en particulier, cette propriété des surfaces réglées :

Si l'on considère le paraboloïde formé par les normales d'une surface réglée le long d'une génératrice, non seulement toutes les normales sont doublement tangentes à la développée de la surface, mais encore il en est de même de toutes les génératrices de l'autre système de ce paraboloïde.



SUR L'APPLICATION

DE LA

THÉORIE DES FORMES BINAIRES

A LA GÉOMÉTRIE PLANE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1874.

1. Dans ce Mémoire, je considère, pour simplifier le langage, les figures comme rapportées à un système de coordonnées rectilignes x et y; la variable z est toujours supposée égale à l'unité, et je ne l'introduis que quand cela est utile pour la symétrie des formules.

Cela posé, $\omega = ux + vy + wz = 0$ étant l'équation d'une droite, si les coefficients u, v et w sont liés entre eux par une relation homogène et du degré n, $F(u, v, w) = 0$, la droite enveloppe une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe K.

Si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ donne, pour un système de valeurs de x et de y, les coefficients angulaires des diverses tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe. On peut la désigner sous le nom d'*équation mixte* de la courbe, et, dans un Mémoire (¹) antérieur, j'ai déjà exposé les conséquences les plus élémentaires qui résultent de cette notion.

(¹) *Mémoire de Géométrie analytique* (*Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XVII).

Mais, pour les développer utilement, plusieurs problèmes doivent être résolus, et en particulier le suivant : *Déterminer les équations mixtes des courbes que l'on obtient en égalant à zéro les divers covariants de* F.

Tout d'abord, on aura à considérer les diverses polaires des droites du plan relativement à K, tant à cause de leur simplicité que du rôle principal qu'elles jouent dans cette théorie, puis la hessienne de K.

En désignant respectivement par $W = 0$, $\Pi = 0$ et $\varpi = 0$ les équations mixtes de la hessienne, de la première et de la seconde polaire de la droite $\omega = 0$, on obtient la relation suivante

$$\omega^2 W = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix} \text{ (1)}.$$

Cette forme remarquable du polynome W est susceptible d'un grand nombre d'applications, et *même sans qu'il soit nécessaire de déterminer les coefficients de* Π *et de* ϖ. En particulier, je citerai les deux propositions suivantes, qui jouent un rôle important dans la théorie des courbes de troisième et de quatrième classe :

1° *Si deux courbes de troisième classe* K *et* K′, *ayant respectivement pour équation mixte*

$$(a, b, c, d)(\lambda, \mu)^3 = 0 \quad \text{et} \quad (a', b', c', d')(\lambda, \mu)^3 = 0,$$

ont les mêmes tangentes de rebroussement, le polynome

$$ad' - 3bc' + 3cb' - da'$$

est identiquement nul.

2° *Étant donnée une courbe de quatrième classe, dont l'équation mixte soit*

$$U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)^4 = 0,$$

désignons par $(A, B, C, D, E, F, G)(\lambda, \mu)^6$ *le covariant sextique*

---

(1) Suivant un usage habituel, étant donnée une fonction quelconque Z de λ et de μ, et de degré n, je pose $Z_1 = \frac{1}{n}\frac{dZ}{d\lambda}$, $Z_{11} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda^2}$, ...



de U, et considérons une courbe quelconque de sixième classe tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de la première courbe. L'équation mixte de la courbe de sixième classe étant

$$(a', b', c', d', e', f', g')(\lambda, \mu)^4 = 0,$$

le polynome $Ag' + 6Bf' + 15Ce - 20Dd' + 15Ec' - 6Fb' + Ga'$ *est identiquement nul.*

2. Il est néanmoins nécessaire d'obtenir la valeur des coefficients de Π; on pourrait les exprimer facilement, mais par des formules dénuées de symétrie, au moyen des dérivées partielles des coefficients de U.

Il est préférable de suivre une autre marche, et, à cet égard, je distinguerai deux cas suivant que la courbe est de classe paire $2n$ ou de classe impaire $2n+1$. Dans le premier cas, on considérera n couples de variables $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, ... fonctions de n invariants de U et de leurs dérivées partielles; en représentant par Δ le discriminant de U, et par V, V', V'', ... n de ses covariants du degré $2n$ convenablement choisis, W sera donné par une expression de la forme

$$\Delta W = (\mathfrak{x} V_1 + \mathfrak{y} V_2) + (\mathfrak{x}' V'_1 + \mathfrak{y}'_1 V'_2) + \ldots.$$

Si la courbe est de classe $(n+1)$, W s'exprimera également au moyen de n émanants et du produit d'un contrevariant de F par un de ses covariants du degré $2n+1$.

Pour éclaircir ce qui précède, je donne ici les résultats pour les courbes de troisième et de quatrième classe :

1° Soient $U = 0$ l'équation mixte d'une courbe de troisième classe; Δ son discriminant et H son hessien. Soit de plus Θ le cayleyen de F (c'est-à-dire le contrevariant de F qui, égalé à zéro, représente la cayleyenne de la courbe). En posant

$$\mathfrak{x} = -v\Delta + \frac{\omega}{6}\frac{d\Delta}{dy}, \qquad \mathfrak{y} = u\Delta - \frac{\omega}{6}\frac{d\Delta}{dx},$$

on aura

$$\Delta\Pi = \mathfrak{x} U_1 + \mathfrak{y} U_2 - 2\omega\Theta H.$$

2° Soient $U = 0$ l'équation mixte d'une courbe de quatrième

classe, Δ son discriminant, H son hessien, S son invariant quadratique et T son invariant cubique.

En posant

$$\mathfrak{x} = \frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dy} - v\Delta, \qquad \mathfrak{y} = -\frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dx} + u\Delta,$$

$$\mathfrak{x}' = 2\,\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dy} - 3\,\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dy}, \qquad \mathfrak{y}' = -2\frac{d\mathrm{T}}{dx} + 3\,\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dx},$$

on aura

$$\Delta\Pi = \mathfrak{x}\,\mathrm{U}_1 + \mathfrak{y}\,\mathrm{U}_2 + \frac{\omega}{3}(\mathfrak{x}'\mathrm{H}_1 + \mathfrak{y}'\mathrm{H}_2).$$

3. Le cayleyen Θ d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe se déduit facilement de la proposition suivante, dans l'énoncé de laquelle j'ai conservé toutes les notations précédentes :

Le résultant de H *et du jacobien de* U *et de* Π *est* $\omega^{2(n-2)}\Delta\Theta$.

En l'appliquant aux courbes de quatrième classe, on obtient cette relation remarquable

$$\Delta^5\Theta = p\,\mathrm{TU}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') + q\,\mathrm{H}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),$$

où p et q désignent des invariants de U de l'ordre 18 et de l'ordre 20, et T l'invariant du troisième ordre.

Une formule de M. Salmon indique que, dans ce cas, la cayleyenne a 126 points doubles ; l'équation précédente montre qu'ils se réduisent à 21 points quadruples. Ces points δ jouissent de la propriété que les tangentes, menées de chacun d'eux à la courbe, ont leurs points de contact en ligne droite. On peut remarquer aussi que l'équation $\mathrm{U}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = 0$ représente la courbe du trente-sixième ordre, jouissant de la propriété que, des tangentes menées d'un de ses points à la courbe, trois sont en ligne droite [1].

---

[1] En général, si la polaire d'une droite se décompose en un point P et une courbe résiduelle, le point P est un point $2(n-2)$*tuple* de la cayleyenne.

Si d'un point (x, y) on mène des tangentes à la courbe de quatrième classe K, l'équation de la tangente menée en ce point à la conique qui le contient, ainsi que les quatre points de contact, est

$$\xi\left(2\,\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dx} - 3\,\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dx}\right) + \eta\left(2\,\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dy} - 3\,\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dy}\right) + \zeta\left(2\,\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dz} - 3\,\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dz}\right) = 0;$$

cette même équation, si l'on y regarde ξ, η, ζ comme des paramètres arbitraires,

4. L'introduction des polynomes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, ... se justifie par cette considération importante, que l'on n'a jamais à traiter que des invariants ou covariants de U; on peut donc (quoique ce soit complètement fictif) supposer la forme U réduite à sa forme canonique.

Ainsi l'on pourra prendre pour équations mixtes des courbes de troisième et de quatrième classe les équations réduites

$$\lambda^3 + \mu^3 = 0, \qquad \lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4 = 0.$$

De même, pour la surface de troisième classe (car tout ce que j'ai dit dans cette Note s'applique aux surfaces algébriques), on pourra prendre pour équation mixte de la surface l'équation très simple

$$\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 + 6m\lambda\mu\nu = 0.$$

Dans le présent Mémoire, je n'ai exposé que les points principaux de la théorie; dans d'autres Mémoires spéciaux, j'en développerai les conséquences relativement aux courbes de troisième et de quatrième classe, ainsi que pour les surfaces de troisième classe.

---

et x, y, z comme les coordonnées courantes, représente la courbe la plus générale du neuvième ordre, que l'on peut mener par les 52 points singuliers de la courbe.

L'équation de la courbe la plus générale du huitième ordre, que l'on peut mener par les 28 points doubles et les 21 po nts δ, est

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{dS}{dx} & \frac{dS}{dy} & \frac{dS}{dz} \\ \frac{dT}{dx} & \frac{dT}{dy} & \frac{dT}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

SUR L'APPLICATION

DE LA

THÉORIE DES FORMES BINAIRES

A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1875.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

1. Dans ce Mémoire, je rapporterai les figures que j'aurai à considérer à un triangle de référence dont les côtés auront respectivement pour équations

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad z = 0.$$

Dans le but de simplifier le langage (ce qui ne diminue en rien la généralité des résultats obtenus), je supposerai que la droite $z = 0$ coïncide avec la droite de l'infini, en sorte que je supposerai toujours z égal à l'unité, ainsi que toutes les variables analogues z', ζ, ζ', ... que j'aurai occasion d'introduire; je les mettrai néanmoins en évidence toutes les fois que cela sera nécessaire pour la clarté ou la simplicité des formules.

Cela posé, $ux + vy + wz = 0$ désignant l'équation d'une droite mobile et $F(u, v, w)$ une forme ternaire, homogène et du degré n, si les paramètres u, v et w sont liés entre eux par la relation

$$F(u, v, w) = 0, \tag{1}$$

la droite enveloppe une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe K; dont l'équation (1) est l'équation tangentielle.

Soit (x, y) un point quelconque du plan et $\frac{\mu}{\lambda}$ le coefficient angulaire d'une quelconque des tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K; cette tangente, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes, a pour équation

$$\mu(X - x) - \lambda(Y - y) = 0,$$

ou encore

$$\mu X - \lambda Y + \lambda y - \mu x = 0;$$

on en déduit la relation

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = 0,$$

qui a pour racines les coefficients angulaires des n tangentes que l'on peut mener du point donné à la courbe.

Si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu), \tag{2}$$

U est une forme binaire du degré n par rapport aux variables λ et μ, dont les coefficients sont des polynomes du degré n en x et y; cette forme satisfait d'ailleurs évidemment à l'équation aux différences partielles

$$\lambda \frac{dU}{dx} + \mu \frac{dU}{dy} = 0.$$

Je dirai que l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ est l'*équation mixte* de la courbe K. J'ai déjà développé quelques-unes des conséquences les plus immédiates que l'on peut tirer de cette notion dans un Mémoire publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [1], et je rappellerai à ce sujet la proposition suivante, dont je ferai un usage continuel :

Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \qquad f_1(\lambda, \mu) = 0, \qquad f_2(\lambda, \mu) = 0, \qquad \ldots;$$

si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* f_0, f_1,

[1] *Mémoire de Géométrie analytique*, 2e série, t. XVII, 1872.

$f_2, \ldots,$ *l'équation* $\mathrm{I} = 0$ *représente une courbe dont le degré est égal au poids de l'invariant.*

Il est utile ici de remarquer que, si I était un polynome de degré inférieur au poids de l'invariant, relativement aux variables x et y, on devrait, en rendant le polynome homogène, introduire comme facteur une certaine puissance de z, en sorte que la courbe $\mathrm{I} = 0$ contiendrait un certain nombre de fois la droite de l'infini.

2. Le problème principal, que l'on doit résoudre pour employer utilement les équations mixtes dans les questions de Géométrie analytique, est le suivant :

Étant donnée une courbe K *ayant pour équation tangentielle* $\mathrm{F}(u, v, w) = 0$ *et pour équation mixte* $\mathrm{U}(\lambda, \mu) = 0$, *déduire de cette équation mixte, de ses invariants et des contrevariants de la forme* F, *les équations mixtes des courbes dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les divers covariants de* F.

Et tout d'abord je m'occuperai, tant à cause de leur simplicité qu'à cause de leur importance, des covariants doubles qui représentent les polaires des divers ordres des droites du plan par rapport à K.

3. Dans tout ce qui suit, en désignant par Z une fonction homogène quelconque, du degré n, des variables λ et μ, je représenterai, selon l'usage habituel, par Z_1 et Z_2 les quantités $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\lambda}$ et $\frac{1}{n}\frac{dZ}{d\mu}$, et de même par Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} les quantités $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\lambda\, d\mu}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2Z}{d\mu^2}$.

D'une façon analogue, je représenterai par F_1, F_2 et F_3 le résultat que l'on obtient en remplaçant dans $\frac{1}{n}\frac{dF}{du}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dv}$, $\frac{1}{n}\frac{dF}{dw}$ les variables u, v et w par μ, $-\lambda$ et $\lambda y - \mu x$.

F_{11}, F_{12}, ... représenteront de même le résultat que l'on obtient en faisant la même substitution dans $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du^2}$, $\frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2F}{du\, dv}$, ...

Cela posé, étant donnée une droite ayant pour équation

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

l'équation mixte de sa première polaire est

$$uF_1 + vF_2 + wF_3 = 0.$$

En différentiant successivement par rapport à λ, μ, x et y la relation (2), on obtient les relations suivantes :

$$(3)\qquad U_1 = -F_2 + yF_3, \qquad U_2 = F_1 - xF_3,$$

$$(4)\qquad F_3 = -\frac{1}{n\mu}\frac{dU}{dx} = \frac{1}{n\lambda}\frac{dU}{dy};$$

par suite, en désignant par $\Pi_\omega = 0$ l'équation de la polaire (¹) de la droite $\omega = 0$, on a

$$\Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega F_3.$$

La polaire de la droite de l'infini a évidemment pour équation $F_3 = 0$; en posant

$$(4')\qquad F_3 = \Pi,$$

on a donc

$$(5)\qquad \Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega\Pi.$$

4. Posons

$$U = (a, b, c, \ldots \between \lambda, \mu)^n$$

et

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \between \lambda, \mu)^{n-1},$$

la comparaison des formules (4) et (4′) donne immédiatement les relations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dy} = n\alpha, & \dfrac{db}{dy} = (n-1)\beta, & \dfrac{dc}{dy} = (n-2)\gamma, & \ldots, \\ \dfrac{da}{dx} = 0, & \dfrac{db}{dx} = -\alpha, & \dfrac{dc}{dx} = -2\beta, & \ldots, \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer les fonctions α, β, γ, ... au moyen des

(¹) Ici, comme dans toute la suite de ce Mémoire, je désigne simplement sous le nom de *polaire* de la droite sa *première* polaire, qui est de la $(n-1)^{\text{ième}}$ classe.

dérivées partielles des coefficients de U; mais, comme je le montrerai dans la suite de ce Mémoire, elles nous seront surtout utiles pour exprimer ces dérivées en fonction des coefficients de Π.

5. Soit une courbe K′ de classe n' et ayant pour équation mixte $V(\lambda, \mu) = 0$; étant menée une tangente à cette courbe, proposons-nous de trouver le lieu des points M où elle est coupée par sa polaire.

En désignant par $\omega = 0$ l'équation d'une de ces tangentes, je remarque d'abord qu'en désignant par λ' et μ' les coordonnées courantes, l'équation mixte de sa polaire est, en vertu de l'équation (5),

$$u U_2(\lambda', \mu') - v U_1(\lambda', \mu') + \omega \Pi(\lambda', \mu') = 0;$$

son équation en coordonnées cartésiennes est le discriminant (par rapport à λ' et μ') de l'équation précédente. Le point M, satisfaisant à l'équation $\omega = 0$, satisfera donc à l'équation $\Delta = 0$, Δ désignant le discriminant du polynome $u U_2(\lambda', \mu') - v U_1(\lambda', \mu')$.

Le coefficient angulaire de la tangente est d'ailleurs $\frac{u}{-v} = \frac{\mu}{\lambda}$; l'équation du lieu cherché s'obtiendra donc en éliminant λ et μ entre l'équation $V(\lambda, \mu) = 0$ et l'équation $\Delta = 0$, les variables u et v ayant été préalablement remplacées par μ et $-\lambda$ dans le polynome Δ.

D'où la proposition suivante :

Théorème I. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes de deux courbes* K *et* K′, *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K′ *sont coupées par leurs polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport à* λ' *et* μ' *du polynome* $\lambda \frac{dU}{d\lambda'} + \mu \frac{dU}{d\mu'}$.

Il est clair que les considérations précédentes s'appliquent également aux polaires des divers ordres relativement à la courbe K; on peut donc énoncer cette proposition plus générale :

Théorème II. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et* $V(\lambda, \mu) = 0$



les équations mixtes des deux courbes K *et* K′, *on obtiendra l'équation du lieu des points où les tangentes à* K′ *sont coupées par leurs* $m^{\text{ièmes}}$ *polaires relativement à* K, *en éliminant* λ *et* μ *entre l'équation* $V(\lambda, \mu) = 0$ *et l'équation* $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, Δ *désignant le discriminant pris par rapport à* λ' *et* μ' *de l'émanant*

$$\left(\lambda \frac{d}{d\lambda'} + \mu \frac{d}{d\mu'}\right)^m U.$$

6. Soit, pour faire une application simple du théorème précédent, une courbe de quatrième classe K^4, dont l'équation mixte est

$$U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)^4 = 0.$$

En considérant la première polaire, on voit que Δ est le discriminant du polynome $(a\lambda + b\mu)\lambda'^3 + 3(b\lambda + c\mu)\lambda'^2\mu' + \ldots$, discriminant qui est de la forme $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, en désignant par H le hessien de U, et par T et S son invariant cubique et son invariant quadratique.

Par suite, l'équation du lieu des points où les tangentes à K^4 rencontrent leurs polaires s'obtient en égalant à zéro le résultant de U et de $p\mathrm{TU} + q\mathrm{SH}$, c'est-à-dire $(S^3 - 27T^2)^2 S^4$.

On sait d'ailleurs que $S^3 - 27T^2 = 0$ est l'équation de K^4 en coordonnées cartésiennes et que $S = 0$ est l'équation de la courbe du quatrième ordre S, qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de K^4; de là la proposition suivante :

Théorème III. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K^4, *une quelconque de ses tangentes est coupée par sa polaire en six points, dont deux sont confondus au point de contact; les quatre autres points d'intersection décrivent, lorsque la tangente se déplace, la courbe de quatrième ordre* S, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K^4.

Réciproquement, si, par un point M *de* S, *on mène les quatre tangentes à* K^4, *leurs polaires relativement à cette courbe passent par* M.

7. L'application la plus importante du théorème II est relative

au cas de la polaire conique; Δ est alors le discriminant de

$$\lambda'^2 \frac{d^2 U}{d\lambda^2} + 2\lambda'\mu' \frac{d^2 U}{d\lambda\, d\mu} + \mu'^2 \frac{d^2 U}{d\mu^2},$$

c'est-à-dire le hessien de U; d'où la proposition suivante :

Théorème IV. — *En désignant par* $U(\lambda, \mu) = 0$ *et par* $V(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes de deux courbes* K *et* K', *par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* $U(\lambda, \mu)$, *l'équation du lieu des points, où les tangentes à* K' *sont coupées par leur conique polaire relativement à* K, *s'obtient en égalant à zéro le résultant des polynomes* $H(\lambda, \mu)$ *et* $V(\lambda, \mu)$.

En particulier, soit M un point du plan ayant pour coordonnées ξ et η; en posant pour abréger, comme je le ferai toujours par la suite,

$$X = x - \xi \quad \text{et} \quad Y = y - \eta,$$

l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y - \mu X = 0;$$

d'où cette conclusion :

Le lieu des points où les diverses droites qui passent par un point (ξ, η) *sont rencontrées par leurs coniques polaires, relativement à la courbe* $U(\lambda, \mu) = 0$, *a pour équation*

$$H(X, Y) = 0.$$

On a ainsi l'interprétation géométrique du hessien de la forme U; quant à l'équation $U(X, Y) = 0$, elle représente, comme on le sait, l'ensemble des tangentes que l'on peut mener du point (ξ, η) à la courbe.

8. Considérons la courbe K ayant pour équation mixte $U(\lambda, \mu) = 0$; si une droite se meut tangentiellement à la hessienne de cette courbe, sa conique polaire se compose de deux points, ou encore, si on la considère comme une courbe du second ordre, de la droite qui joint ces deux points, cette droite étant comptée deux fois. Le lieu des intersections des tangentes à la hessienne avec leurs coniques polaires est donc une courbe double, la cay-

leyenne de K; la proposition suivante permettra d'obtenir son équation :

Théorème V. — *Étant donnée une courbe* K *ayant pour équation mixte* $U(\lambda, \mu) = 0$, *en désignant par* $H(\lambda, \mu)$ *le hessien de* U *et par* $W(\lambda, \mu) = 0$ *l'équation mixte de la hessienne de* K, *si l'on forme le résultant de* $H(\lambda, \mu)$ *et de* $W(\lambda, \mu)$, *ce résultant est un carré parfait* R^2 *et* $R = 0$ *est l'équation cartésienne de la cayleyenne de* K.

CHAPITRE II.

ÉQUATION MIXTE DE LA HESSIENNE D'UNE COURBE, ÉQUATION DE LA CAYLEYENNE.

9. Étant données une courbe K de classe n, dont l'équation tangentielle est

$$F(u, v, w) = 0,$$

et l'équation mixte

$$U(\lambda, \mu) = F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = 0,$$

l'équation tangentielle de sa hessienne est, comme on le sait,

$$\frac{1}{n(n-1)}\begin{vmatrix} \dfrac{d^2F}{du^2} & \dfrac{d^2F}{du\,dv} & \dfrac{d^2F}{du\,dw} \\ \dfrac{d^2F}{du\,dv} & \dfrac{d^2F}{dv^2} & \dfrac{d^2F}{dv\,dw} \\ \dfrac{d^2F}{du\,dw} & \dfrac{d^2F}{dv\,dw} & \dfrac{d^2F}{dw^2} \end{vmatrix} = 0;$$

son équation mixte sera par suite

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Des équations (3) et (4) on déduit

$$\begin{aligned} U_{11} &= F_{22} - 2y F_{23} + y^2 F_{33}, \\ U_{12} &= -F_{12} + x F_{23} + y F_{13} - xy F_{33}, \\ U_{22} &= F_{11} - 2x F_{13} + x^2 F_{33}. \end{aligned}$$

En désignant par $\Pi = 0$ l'équation de la polaire de la droite de

l'infini, l'équation (4') donne $\Pi = F_3$; d'où les relations

$$\Pi_1 = -F_{23} + y F_{23}, \qquad \Pi_2 = F_{13} - x F_{33}.$$

En posant d'ailleurs $F_{33} = \varpi$, on sait que $\varpi = 0$ est l'équation mixte de la deuxième polaire de la droite de l'infini.

Des relations qui précèdent résulte l'identité

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} F_{22} - 2y F_{23} + y^2 F_{33} & -F_{12} + x F_{23} + y F_{13} - xy F_{33} & -F_{23} + y F_{33} \\ -F_{12} + x F_{23} + y F_{13} - xy F_{33} & F_{11} - 2x F_{13} + x^2 F_{33} & F_{13} - x F_{33} \\ -F_{23} + y F_{33} & F_{13} - x F_{33} & F_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & y \\ -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}.$$

L'équation mixte de la hessienne s'obtient en égalant à zéro le déterminant qui précède; d'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *En désignant respectivement par* $U(\lambda, \mu) = 0$, $\Pi(\lambda, \mu) = 0$ *et* $\varpi(\lambda, \mu) = 0$ *les équations mixtes d'une courbe, de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite de l'infini relativement à cette courbe, l'équation mixte de la hessienne de la courbe est* $W(\lambda, \mu) = 0$, W *désignant le polynome*

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix}.$$

10. Cette forme remarquable de l'équation mixte donne lieu à diverses conséquences importantes que l'on peut en déduire, sans que l'on ait même besoin de déterminer l'expression des coefficients de Π et ϖ.

En particulier, je citerai les deux propositions suivantes, relatives aux courbes de troisième et de quatrième classe :

Théorème. — *En désignant par* $(a, b, c, d) = 0$ [1] *l'équa-*

---

[1] Ici, comme je le ferai souvent dans la suite quand il n'y aura lieu de



tion mixte d'une courbe de troisième classe K *et par* $(a', b', c', d') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de même classe* K' *tangente aux neuf tangentes de rebroussement de la première, si l'on forme l'invariant*

$$I = ad' - 3bc' + 3cb' - da',$$

ce polynome est identiquement nul.

Démonstration. — Comme I est un *combinant* des deux formes (a, b, c, d) et (a', b', c', d'), il suffit de démontrer la proposition pour l'une quelconque des courbes du faisceau (K, K'), par exemple pour la hessienne. Supposons (a, b, c, d) réduite à la forme canonique $\lambda^3 + \mu^3$, on aura simplement $I = d' - a'$. Or, en posant

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) \qquad \text{et} \qquad \varpi = (A, B),$$

on déduit du théorème précédent :

$$(a', b', c', d') = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & \mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & A\lambda + B\mu \end{vmatrix};$$

d'où

$$a' = -\beta^2 \qquad \text{et} \qquad d' = -\beta^2;$$

par suite

$$I = \beta^2 - \beta^2 = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

THÉORÈME. — *En désignant par* $U = (a, b, c, d, e) = 0$ *l'équation mixte d'une courbe de quatrième classe* K *et par* (A, B, C, D, E, F, G) *le covariant sextique de* U, *par* $(a', b', c', d', e', f', g') = 0$ *l'équation mixte d'une courbe quelconque de sixième classe* K' *tangente aux vingt-quatre tangentes de rebroussement de* K; *si l'on forme l'invariant* $I = Ag' - 6Bf' + 15Ce' - 20Dd' + 15Ec' - 6Fb' + Ga'$, *ce polynome est identiquement nul.*

Démonstration. — La hessienne étant tangente aux vingt-quatre

---

craindre aucune ambiguïté, je pose, pour abréger,

$$(a, b, c, d \between \lambda, \mu)^4 = (a, b, c, d).$$

tangentes de rebroussement de K, l'équation mixte de K' sera de la forme $W(\lambda, \mu) + U(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu)$, $V(\lambda, \mu) = 0$ étant l'équation mixte d'une conique quelconque.

Si nous supposons U réduite à sa forme canonique

$$\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4,$$

on a simplement

$$I = (1 - 9m^2)(b' - f').$$

Or le théorème V donne la relation

$$\begin{aligned}(a', b', c', d', e', f', g')\\ = (\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4)(P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2)\\ + \begin{vmatrix} \lambda^2 + m\mu^2 & 2m\lambda\mu & \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 \\ 2m\lambda\mu & m\lambda^2 + \mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 \\ \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 & \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda\mu + \delta\mu^2 & P'\lambda^2 + 2Q'\lambda\mu + R'\mu^2 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \qquad \varpi = (P', Q', R') \qquad \text{et} \qquad V = (P, Q, R).$$

On déduit de là, après quelques réductions faciles,

$$6b' = 6f' = 2Q + 2mQ' - 4\beta\gamma$$

et, par suite,

$$I = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

11. On peut donner à la formule énoncée dans le théorème V une forme un peu plus générale et d'un usage plus commode pour les applications.

Soient $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations mixtes de la première polaire et de la deuxième polaire de la droite

$$\omega = ux + vy + wz = 0;$$

on aura, d'après la formule (5),

$$\Pi_\omega = uU_2 - vU_1 + \omega\Pi.$$

On en déduit, en désignant par $\Pi_{\omega,1}$, $\Pi_{\omega,2}$, ... les quantités analogues Π_1 et Π_2, mais relatives à Π_ω,

$$\begin{aligned}\Pi_{\omega,1} &= uU_{12} - vU_{11} + \omega\Pi_1,\\ \Pi_{\omega,2} &= uU_{22} - vU_{12} + \omega\Pi_2,\\ \varpi_\omega &= u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega\varpi',\end{aligned}$$

$\varpi' = 0$ étant l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini, relativement à la première polaire de la droite $\omega = 0$, ou, ce qui est la même chose, de la polaire de cette droite relativement à la première polaire de la droite de l'infini.

On a donc

$$\varpi' = u\Pi_2 - v\Pi_1 + \omega\varpi$$

et, par suite,

$$(5') \qquad \varpi_\omega = u\Pi_{\omega,2} - v\mathrm{H}_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi.$$

On déduit

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & uU_{12} - vU_{11} + \omega\Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & uU_{22} - vU_{12} + \omega\Pi_2 \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi \end{vmatrix}$$

$$= \omega \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ uU_{12} - vU_{11} + \omega\Pi_1 & uU_{22} - vU_{12} + \omega\Pi_2 & u\Pi_2 - v\Pi_1 + \omega\varpi \end{vmatrix}$$

$$= \omega^2 \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_1 \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 & \varpi \end{vmatrix} = \omega^2 W(\lambda, \mu);$$

d'où la formule suivante, qui permet d'exprimer le polynome $W(\lambda, \mu)$ au moyen des deux premières polaires d'une droite quelconque $\omega = ux + vy + wz = 0$:

$$(7) \qquad \omega^2 W(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \Pi_{\omega,1} \\ U_{12} & U_{22} & \Pi_{\omega,2} \\ \Pi_{\omega,1} & \Pi_{\omega,2} & \varpi_\omega \end{vmatrix} = \varpi_\omega H - \Omega,$$

en posant

$$\Omega = U_{11}\Pi^2_{\omega,2} - 2U_{12}\Pi_{\omega,1}\Pi_{\omega,2} + U_{22}\Pi_{\omega,1}$$

et en désignant par H le hessien de U.

12. J'ai montré (théorème IV) que le résultant de H et de W était égal à Θ^2, Θ désignant le contrevariant de la forme primitive $F(u, v, w)$ qui, égale à zéro, donne l'équation de la cayleyenne;

on déduit de ce qui précède

$$W = \frac{\varpi H - \Omega}{\omega};$$

le résultant Θ^2 est donc le résultant de H et de $\frac{-\Omega}{\omega}$; d'où la proposition suivante :

Théorème. — *Si l'on forme le résultant du polynome* H *et* $-\Omega$, *ce résultant est un carré parfait dont la racine est égale à* $\omega^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque I. — Le premier terme de Ω est d'un poids égal à 2, le dernier terme de H d'un poids égal à $2(n-1)$: leur résultant est donc d'un poids égal à $4(n-2)+6(n-1)(n-2)$, et, en vertu de la proposition fondamentale donnée (1), Θ est du degré

$$2(n-2)+3(n-1)(n-2)-2(n-2) = 3(n-1)(n-2).$$

C'est en effet, comme on le sait, le degré de la cayleyenne.

Remarque II. — La proposition précédente donne une infinité de formes pour Θ, puisque u, v et w sont arbitraires; on peut, par exemple, remplacer ces quantités par les dérivées partielles d'un contrevariant quelconque Φ de F, et la proposition précédente donnera une expression de $\Phi^{2(n-2)}\Theta$.

Remarque III. — On peut trouver d'autres expressions de Θ souvent plus faciles à calculer. On a, par exemple, identiquement

$$\Omega U = [\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12}+\mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11}+\mu U_{12})]^2 - H(\lambda\Pi_{\omega,1}+\mu\Pi_{\omega,2})^2.$$

Le résultant de H et de ΩU, c'est-à-dire $(\omega^{2(n-2)}\Theta\Delta)^2$, en désignant par Δ le discriminant de U [1], est donc égal au résultant de H et de

$$[\Pi_{\omega,1}(\lambda U_{12}+\mu U_{22}) - \Pi_{\omega,2}(\lambda U_{11}+\mu U_{12})]^2.$$

D'où cette conséquence :

Si l'on forme le résultant de H *et de* $\Pi_{\omega,1}U_2 - \Pi_{\omega,2}U_1$, *ce résultant est égal à* $\omega^{2(n-2)}\Delta\Theta$.

---

[1] Δ est le *réciprocant* de F; l'équation $\Delta = 0$ représente en coordonnées cartésiennes la courbe K.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION MIXTE DE LA POLAIRE D'UNE DROITE.

13. Les formules (6) données précédemment (4) permettent d'exprimer les coefficients de l'équation mixte de la polaire de la droite de l'infini (et par suite de la polaire d'une droite quelconque) au moyen des dérivées partielles des coefficients de U; mais il est préférable d'introduire les dérivées partielles d'un certain nombre d'invariants de cette forme.

Je m'appuierai sur la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donné un invariant quelconque* I *de la forme* U, *en désignant son poids par i, on a les deux équations*

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc} + 3\gamma\frac{dI}{dd} + \ldots = \mathfrak{y}_1,\\ &n\alpha\frac{dI}{da}(n-1)\beta\frac{dI}{db} + (n-2)\gamma\frac{dI}{dc} - \ldots = \mathfrak{x}_1,\end{aligned}\right.$$

où $(a, b, c, \ldots) = 0$ *est l'équation mixte de* K *et* $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ *l'équation mixte de la polaire de la droite* $\omega = 0$ *et où j'ai posé, pour abréger,*

$$\mathfrak{x}_1 = -ivI + \omega\frac{dI}{dy}, \qquad \mathfrak{y}_1 = uiI - \omega\frac{dI}{dx}.$$

Démonstration. — Des formules (5) et (6) on déduit facilement les relations suivantes :

$$(6')\qquad \left\{\begin{aligned} &n\alpha = \omega\frac{da}{dy} + n(ub - va),\\ &(n-1)\beta = \omega\frac{db}{dy} + (n-1)(uc - vb),\\ &(n-2)\gamma = \omega\frac{dc}{dy} + (n-2)(ud - vc) + \ldots,\\ &0 = \frac{du}{dx}, \quad \alpha = -\omega\frac{db}{dx} + ub - v\ .\quad 2\beta = -\omega\frac{dc}{dx} + 2(uc - vb)\ldots;\end{aligned}\right.$$

par suite, on a

$$\omega\frac{dI}{dx}=\frac{dI}{db}(-\alpha+ub-va)+\frac{dI}{dc}(-2\beta+2uc-2vb)+\ldots$$
$$=-\alpha\frac{dI}{db}-2\beta\frac{dI}{dc}-3\gamma\frac{dI}{dd}+u\left(b\frac{dI}{db}+2c\frac{dI}{dc}+\ldots\right)$$
$$-v\left(a\frac{dI}{db}+2b\frac{dI}{dc}+\ldots\right)$$

ou encore, d'après les propriétés bien connues des invariants,

$$\omega\frac{dI}{dx}=-\left(\alpha\frac{dI}{db}+2\beta\frac{dI}{dc}+3\gamma\frac{dI}{dd}+\ldots\right)+uiI;$$

d'où enfin

$$\alpha\frac{dI}{db}+2\beta\frac{dI}{dc}+3\gamma\frac{dI}{dd}+\ldots=+uiI-\omega\frac{dI}{dx}.$$

L'autre formule se démontrerait de la même manière.

14. Dans l'application des formules précédentes, je considérerai deux cas suivant que la courbe K est de classe paire ou de classe impaire.

Dans le premier cas, le nombre des coefficients α, β, ... inconnus est pair; considérons $\frac{n}{2}$ invariants I, I′, I″, ... de la forme U et désignons par $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_{1'}$, $\mathfrak{y}_{1'}$, ... les polynomes formés de la façon indiquée au moyen des dérivées partielles de ces invariants : nous obtiendrons n équations linéaires de la forme (8), qui permettront d'exprimer les coefficients inconnus en fonction des coefficients de U et des polynomes $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_{1'}$, ...

L'introduction de ces polynomes se trouve justifiée par le fait important que le polynome Π_ω devient alors un covariant multiple de U, les divers couples de variables étant λ, μ; $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$; ....

15. Si la courbe est de classe impaire, nous choisirons $\frac{n-1}{2}$ invariants qui fourniront $(n-1)$ relations linéaires entre les inconnues; une dernière relation linéaire peut être obtenue de la façon suivante. La méthode est évidemment générale, mais je ne l'exposerai que pour le cas d'une courbe de cinquième classe.

Soient $U=(a, b, c, d, e, f)=0$ l'équation mixte d'une courbe de cinquième classe et (A, B, C, D) un covariant quelconque du



troisième ordre de U; en désignant, pour un instant, par $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \varepsilon_0) = 0$ l'équation de la polaire de la droite de l'infini, posons

$$\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha_0 & A & 0 \\ 4b & 4c & 4\beta_0 & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma_0 & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta & D & 3C \\ e & f & \varepsilon_0 & 0 & D \end{vmatrix};$$

en appelant $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 0$ l'équation mixte de la polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, on déduira de la formule (5)

$$\omega\Upsilon = \begin{vmatrix} a & b & \alpha & A & 0 \\ 4\beta & 4c & 4\beta & 3B & A \\ 6c & 6d & 6\gamma & 3C & 3B \\ 4d & 4e & 4\delta & D & 3C \\ e & f & \varepsilon & 0 & D \end{vmatrix};$$

d'où l'on conclut que V est un contrevariant de la forme fondamentale F (1).

En développant cette égalité, on obtiendra une équation linéaire qui, avec les $n-1$ autres précédemment obtenues, permettra d'exprimer les coefficients de Π_ω.

16. Des relations établies plus haut, n° 13, on peut déduire une proposition générale, dont se déduisent un grand nombre de propriétés des courbes algébriques.

Soit I un invariant quelconque de U, en sorte que l'on ait les relations

$$\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc} + 3\gamma\frac{dI}{dd} + \ldots = uiI - \omega\frac{dI}{dx},$$

$$n\alpha\frac{dI}{da} + (n-1)\beta\frac{dI}{db} + (n-2)\gamma\frac{dI}{dc} + \ldots = -viI + \omega\frac{dI}{dy}.$$

Considérons la courbe K′ composée de la polaire de la droite

---

(1) Il est bien clair que ce procédé peut être varié de bien des manières et que (si n est > 4) il peut être aussi employé quand n est pair.

Cette équation, ainsi que beaucoup de celles établies dans ce Mémoire, est susceptible de diverses interprétations géométriques; mais leur développement m'écarterait trop de mon sujet principal.

$\omega = 0$ et d'un point ξ, η; en posant $X = x - \xi$ et $Y = y - \eta$, l'équation mixte de ce point est

$$\lambda Y - \mu X = 0;$$

par suite, l'équation mixte de K′ est

$$n\left[\alpha\lambda^{n-1} + (n-1)\beta\lambda^{n-2}\mu + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\gamma\lambda^{n-3}\mu^2 + \ldots\right](\lambda Y - \mu X) = 0,$$

ou bien encore

$$[n\alpha Y,\ (n-1)\beta Y - \alpha X,\ (n-2)\gamma Y - 2\alpha X,\ \ldots](\lambda, \mu)^n = 0.$$

En représentant le premier membre de cette équation par $(a', b', c', \ldots)$, on trouvera, par la valeur de l'invariant,

$$\mathfrak{J} = a'\frac{dI}{da} + b'\frac{dI}{db} + c'\frac{dI}{dc} + \ldots,$$

$$\mathfrak{J} = Y\left[n\alpha\frac{dI}{da} + (n-1)\beta\frac{dI}{db}\cdots\right] - X\left(\alpha\frac{dI}{db} + 2\beta\frac{dI}{dc}\cdots\right),$$

ou encore, en vertu des relations transcrites ci-dessus,

$$\mathfrak{J} = \omega\left(X\frac{dI}{dx} + Y\frac{dI}{dy}\right) - iI(uX + vY).$$

Posons

$$u\xi + v\eta + z\zeta = \omega',$$

on aura

$$uX + vY = \omega - \omega'$$

et

$$\mathfrak{J} = \omega\left[(x-\xi)\frac{dI}{dx} + (y-\eta)\frac{dI}{dy} - iI\right] + i\omega' I.$$

Remarquons maintenant que le poids i de l'invariant I est précisément le degré de ce polynome en x, y, z; d'après le théorème des fonctions homogènes, on aura donc

(9) $$\omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = i\omega' I - \mathfrak{J}$$

et, par suite, si le point ξ, η est sur la droite $\omega = 0$,

(10) $$\omega\left(\xi\frac{dI}{dx} + \eta\frac{dI}{dy} + \zeta\frac{dI}{dz}\right) = -\mathfrak{J}.$$

Je ferai remarquer que la quantité entre parenthèses dans le

premier membre de cette équation représente, quand on l'égale à zéro, la polaire du point (ξ, η) relativement à la courbe $I = 0$.

17. Le cas particulier le plus intéressant à considérer est celui où, K étant de classe paire, on considère l'invariant quadratique I de U.

En convenant d'appeler *faisceaux harmoniques* deux faisceaux de n droites, tels que les équations du degré n qui les déterminent aient leur invariant quadratique nul, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Étant donnée une courbe* K *de classe* $2n$, *si l'on considère la courbe* C *du degré* $2n$, *dont l'équation s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique de l'équation mixte de* K *et le lieu des points d'où l'on voit suivant deux faisceaux harmoniques :* 1° *la polaire d'une droite quelconque* D, *prise par rapport à* K, *et un point* M *de cette droite;* 2° *la courbe* K, *ce lieu se compose de la droite* D *elle-même et de la courbe du* $(2n-1)$ *ordre qui est la polaire du point* M *relativement à* C.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX COURBES DE TROISIÈME ET DE QUATRIÈME CLASSE.

18. Considérons une courbe de troisième classe K, dont l'équation mixte soit

$$U = (a, b, c, d) = 0;$$

soit Δ son discriminant, en sorte que $\Delta = 0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. En appelant H et J le hessien et le covariant cubique de U, je poserai, pour abréger,

$$H = (A, B, C) \qquad \text{et} \qquad J = (a', b', c', d').$$

Cela posé, en considérant l'invariant Δ, les équations (8) donnent les relations

$$\alpha \frac{d\Delta}{db} + 2\beta \frac{d\Delta}{dc} + 3\gamma \frac{d\Delta}{dd} = \quad 6u\Delta - \omega \frac{d\Delta}{dx},$$

$$3\alpha \frac{d\Delta}{da} + 2\beta \frac{d\Delta}{db} + \quad \gamma \frac{d\Delta}{dc} = -6v\Delta + \omega \frac{d\Delta}{dy},$$

que l'on peut écrire

$$-d'\alpha + 2c'\beta - b'\gamma = -v\Delta + \frac{1}{6}\omega\frac{d\Delta}{dy} = \mathfrak{x},$$

$$c'\alpha - 2b'\beta + a'\gamma = \quad u\Delta - \frac{1}{6}\omega\frac{d\Delta}{dx} = \mathfrak{y}.$$

Posons en outre (*voir* n° 15)

$$\omega\Theta = \begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ c & d & \gamma \end{vmatrix};$$

Θ est un contrevariant de la forme $F(u, v, w)$ qui, égalé à zéro, donne l'équation tangentielle de K; dans le cas actuel, l'équation $\Theta = 0$ représente, comme il est facile de le voir, la cayleyenne de K (¹).

Le déterminant développé donne l'égalité

$$\alpha C - 2\beta B + \gamma A = \omega\Theta,$$

qui, jointe aux égalités précédentes, permet d'obtenir α, β et γ par les formules

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta\alpha = a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} - 2A\omega\Theta, \\ \Delta\beta = b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} - 2B\omega\Theta, \\ \Delta\gamma = c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} - 2C\omega\Theta, \end{cases}$$

qui, quand on réduit U à sa forme canonique $a\lambda^3 + d\mu^3$, prennent la forme très simple suivante :

$$(11')\qquad \begin{cases} \Delta\alpha = \quad a\mathfrak{x}, \\ \Delta\beta = -ad\omega\Theta, \\ \Delta\gamma = \quad d\mathfrak{y}. \end{cases}$$

En désignant, comme je l'ai fait jusqu'ici, par $\Pi_\omega = 0$ l'équation de la polaire de la droite $\omega = 0$, relativement à la courbe K, on aura

$$(12)\qquad \Delta\Pi_\omega = \mathfrak{x}U_1 + \mathfrak{y}U_2 - 2\omega\Theta H.$$

L'équation en coordonnées cartésiennes de cette polaire est

$$\alpha\gamma - \beta^2 = 0;$$

(¹) *Voir* mon *Mémoire de Géométrie analytique,* déjà cité, n° 14.

en nous servant de la forme canonique de la forme U, on trouve immédiatement

$$\Delta^2(\alpha\gamma - \beta^2) = ad\mathfrak{x}\mathfrak{y} - a^2 d^2 \omega^2 \Theta^2;$$

d'où, généralement,

$$\Delta^2(\alpha\gamma - \beta^2) = \mathrm{H}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \omega^2 \Delta \Theta^2.$$

19. Considérons maintenant une courbe de quatrième classe K ayant pour équation mixte $\mathrm{U} = (a, b, c, d, e) = 0$; soient S et T les invariants quadratique et cubique de U; son discriminant Δ est égal à $\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2$, et l'on sait d'ailleurs que $\Delta = 0$ est l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes. Je représenterai, pour abréger, le hessien H de U par la notation (a', b', c', d', e').

Cela posé, en considérant les invariants S et T, les formules (8) donnent les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha e - 3\beta d - 3\gamma c - \delta b &= - \quad v\mathrm{S} + \frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{S}}{dy} = -\mathrm{S}_1,\\
-\alpha d + 3\beta c - 3\gamma b + \delta a &= \quad u\mathrm{S} - \frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{S}}{dx} = -\mathrm{S}_2,\\
\alpha e' - 3\beta d' + 3\gamma c' - \delta b' &= -\frac{3}{2}v\mathrm{T} + \frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{T}}{dy} = -\mathrm{T}_1,\\
-\alpha d' + 3\beta c' - 3\gamma b' + \delta a' &= \quad \frac{3}{2}u\mathrm{T} - \frac{\omega}{4}\frac{d\mathrm{T}}{dx} = -\mathrm{T}_2,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a(18\mathrm{TT}_1 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_1) + b(18\mathrm{TT}_2 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad + a'(18\mathrm{TS}_1 - 12\mathrm{ST}_1) + b'(18\mathrm{TS}_2 - 12\mathrm{ST}_2),\\
\Delta\beta &= b(18\mathrm{TT}_1 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_1) + c(18\mathrm{TT}_2 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad + b'(18\mathrm{TS}_1 - 12\mathrm{ST}_1) + c'(18\mathrm{TS}_2 - 12\mathrm{ST}_2),\\
\Delta\gamma &= c(18\mathrm{TT}_1 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_1) + d(18\mathrm{TT}_2 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad + c'(18\mathrm{TS}_1 - 12\mathrm{ST}_1) + d'(18\mathrm{TS}_2 - 12\mathrm{ST}_2 ,\\
\Delta\delta &= d(18\mathrm{TT}_1 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_1) + d(18\mathrm{TT}_2 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_2)\\
&\quad + d'(18\mathrm{TS}_1 - 12\mathrm{ST}_1) + e'(18\mathrm{TS}_2 - 12\mathrm{ST}_2).
\end{aligned}$$

Posons enfin, pour abréger,

$$\mathfrak{x} = 18\mathrm{TT}_1 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_1 = \quad \frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dy} - v\Delta,$$

$$\mathfrak{y} = 18\mathrm{TT}_2 - \mathrm{S}^2\mathrm{S}_2 = -\frac{\omega}{12}\frac{d\Delta}{dx} + u\Delta,$$

$$\mathfrak{x}' = 2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dy} - 3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dy}, \qquad \mathfrak{y}' = -2\mathrm{S}\frac{d\mathrm{T}}{dx} + 3\mathrm{T}\frac{d\mathrm{S}}{dx};$$

on aura enfin

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(a'\mathfrak{x}' + b'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\beta &= b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(b'\mathfrak{x}' + c'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\gamma &= c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(c'\mathfrak{x}' + d'\mathfrak{y}'),\\ \Delta\delta &= d\mathfrak{x} + e\mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}(d'\mathfrak{x}' + e'\mathfrak{y}'); \end{aligned}\right.$$

d'où encore

$$(14)\qquad \Delta\Pi_\omega = \mathfrak{x}U_1 + \mathfrak{y}U_2 + \frac{3\omega}{2}(\mathfrak{x}'H_1 + \mathfrak{y}'H_2).$$

20. J'ai montré (n° 12, *Remarque III*) qu'en désignant par Θ l'équation de la cayleyenne de K, $\omega^4\Delta\Theta$ était le résultant de H et du polynome $\Pi_{\omega,1}U_2 - \Pi_{\omega,2}U_1$; dans le cas actuel, ce polynome se compose de deux parties : la première

$$\mathfrak{x}(U_{11}U_2 - U_{12}U_1) + \mathfrak{y}(U_{21}U_2 - U_{22}U_1)$$

est exactement divisible par H : il n'y a donc pas à en tenir compte; la seconde

$$Z = \frac{\omega}{4} \times \frac{\mathfrak{x}'(H_{11}U_2 - H_{12}U_1) + \mathfrak{y}'(H_{12}U_2 - H_{22}U_1)}{\Delta};$$

le résultant de Z et de H est donc égal à $\omega^4\Delta\Theta$. Sans faire de calcul, on voit que ce résultat est le produit par $\frac{\omega^4}{\Delta^4}$ d'un covariant du quatrième degré et du vingtième ordre; on a donc

$$\Delta^5\Theta = p\,TU(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') + q\,H(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),$$

p et q désignant des invariants de U (fonctions entières, par conséquent, de S et de T) du seizième et du dix-huitième ordre.

SUR LES

SINGULARITÉS DES COURBES DE QUATRIÈME CLASSE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1875.

1. Une courbe de quatrième classe K possède vingt-huit points doubles δ et vingt-quatre points de rebroussement ρ. Il existe en outre dans son plan vingt et une droites P telles que la première polaire de chacune d'elles, relativement à K, se décompose en un point p et une conique résiduelle; aux vingt et une droites P correspondront donc vingt et un points remarquables p, que nous aurons à considérer en même temps que les points singuliers.

Je rappellerai à ce sujet que les soixante-treize points δ, ρ et p sont les points communs aux trois courbes

$$2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0, \quad 2S\frac{dT}{dz} - 3T\frac{dS}{dz} = 0,$$

où S et T désignent respectivement l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme $U = (a, b, c, d, e)(\lambda, \mu)$ qui, égalée à zéro, donne l'équation mixte de la courbe K [1].

2. Étant données deux équations à une inconnue, de degré m, $F = 0$ et $F' = 0$ déterminant par leurs racines deux systèmes de points situés sur une même droite (*ou deux faisceaux de droites passant par un même point*), je dirai que ces systèmes (*ou ces faisceaux*) sont *harmoniques,* si l'invariant quadratique des deux

[1] Voir (*Comptes rendus,* 16 mars 1874) la Note accompagnant la présentation de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie plane.*

formes F et F′ est nul; cette notion est, on le voit, une simple extension de la notion bien connue relative à deux systèmes de deux points (*ou à deux faisceaux de deux droites*).

Cela posé,

$$(1) \qquad (a, b, c, \ldots, h, k, l) = 0$$

et

$$(2) \qquad (a', b', c', \ldots, h', k', l') = 0$$

étant les équations mixtes de deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe K^n et K'^n, il est clair que le lieu des points d'où l'on voit ces courbes suivant deux faisceaux harmoniques s'obtient en égalant à zéro l'invariant quadratique des deux formes (1) et (2); ce lieu est donc une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré ayant pour équation

$$(3) \qquad (I) = al' - nbK' + \frac{n(n-1)}{1.2}ch' + \ldots + la' = 0,$$

et je la désignerai sous le nom de *courbe harmonique* des deux courbes K^n et K'^n.

A ce sujet, je ferai remarquer que, si n est impair, I ne change pas quand on remplace respectivement a par $a + \lambda a'$, b par $b + \lambda b'$, ...; si donc C^n est la courbe harmonique de K^n et de K'^n, ce sera également la courbe harmonique de deux quelconques des courbes du faisceau déterminé par K^n et K'^n, et je dirai que c'est la courbe harmonique de ce faisceau.

3. Cela posé, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Étant donnée une courbe de quatrième classe* K, *si l'on considère les différentes droites que l'on peut mener par un point* M, *leurs premières polaires, relativement à* K, *forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la* courbe harmonique *est la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{H}$ *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

Démonstration. — Soient, comme ci-dessus,

$$U = (a, b, c, d, e) = 0$$



l'équation mixte de la courbe K; S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U. On sait que la courbe $\mathfrak{S}$ a pour équation $S = 0$.

Pour simplifier les calculs, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en sorte que l'on aura simplement

$$U = \lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4,$$
$$H = m\lambda^4 + (1 - 3m^2)\lambda^2\mu^2 + m\mu^4,$$
$$S = 1 + 3m^2 \quad \text{et} \quad T = m - m^3.$$

En appelant ξ, η, ζ les coordonnées du point M, désignons par

$$\omega = ux + vy + w = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = u_0x + v_0y + w_0z = 0$$

les équations de deux quelconques des droites qui se croisent au point M.

Désignons de plus par $\Delta = S^2 - 27T^2$ le discriminant de la forme U, et par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ les équations mixtes des premières polaires des deux droites précédentes relativement à K; d'après la formule (13) donnée dans mon *Mémoire sur l'application des formes binaires* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 120), on aura les équations suivantes :

$$\Delta\alpha = \mathfrak{x} + \frac{3\omega}{2}m\mathfrak{x}', \qquad \Delta\alpha_0 = \mathfrak{x}_0 + \frac{3\omega_0}{2}m\mathfrak{x}',$$

$$\Delta\beta = m\mathfrak{y} + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{y}', \qquad \Delta\beta_0 = m\mathfrak{y}_0 + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{y}',$$

$$\Delta\gamma = m\mathfrak{x} + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{x}', \qquad \Delta\varphi_0 = m\mathfrak{x}_0 + \frac{\omega}{4}(1 - 3m^2)\mathfrak{x}',$$

$$\Delta\delta = \mathfrak{y} + \frac{3\omega}{2}m\mathfrak{y}', \qquad \Delta\delta_0 = \mathfrak{y}_0 + \frac{3\omega}{2}m\mathfrak{y}',$$

où $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ ont la même signification que dans le Mémoire précité (p. 119), et $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$ représentent les quantités analogues à $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, dans lesquelles u, v, w ont été remplacés par u_0, v_0 et w_0.

Cela posé, en désignant par $I = 0$ l'équation de la courbe harmonique du faisceau formé par les polaires des droites qui se croisent au point M, on aura

$$I = \alpha\delta_0 - 3\beta\gamma_0 + 3\gamma\beta_0 - \delta\alpha_0,$$

et

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^2 \mathrm{I} &= (1+3m^2)(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_0) \\ &\quad + \frac{9}{4}(m-m^3)\left[\mathfrak{x}'(\omega\,\mathfrak{y}_0 - \omega_0\,\mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'(\omega\,\mathfrak{x}_0 - \omega_0\,\mathfrak{x})\right]; \end{aligned}\right.$$

on a d'ailleurs

$$1+3m^2 = \mathrm{S}, \qquad m - m^3 = \mathrm{T},$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{y}_0 = \frac{\Delta}{12}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right),$$

ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{S}_0 = \xi\frac{d\mathrm{S}}{dx} + \eta\frac{d\mathrm{S}}{dy} + \zeta\frac{d\mathrm{S}}{dz},$$

$$\mathrm{T}_0 = \xi\frac{d\mathrm{T}}{dx} + \eta\frac{d\mathrm{T}}{dy} + \zeta\frac{d\mathrm{T}}{dz},$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_0 = \frac{\Delta}{12}(3\mathrm{S}^2\mathrm{S}_0 - \mathrm{S}\,4\mathrm{T}\mathrm{T}_0),$$

puis

$$\mathfrak{x}'(\omega\,\mathfrak{y}_0 - \omega\,\mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'(\omega\,\mathfrak{x}_0 - \omega_0\,\mathfrak{x}) = \Delta(2\mathrm{S}\mathrm{T}_0 - 3\mathrm{T}\mathrm{S}_0).$$

En substituant ces valeurs dans (4), on obtiendra

$$\Delta^2\mathrm{I} = \frac{\mathrm{S}\Delta}{12}(3\mathrm{S}^2\mathrm{S}_0 - \mathrm{S}^4\mathrm{T}\mathrm{T}_0) + \frac{9\,\mathrm{T}\Delta}{4}(2\mathrm{S}\mathrm{T}_0 - 3\mathrm{T}\mathrm{S}_0),$$

d'où, réductions faites,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{S}_0}{4} = \frac{1}{4}\left(\xi\frac{d\mathrm{S}}{dx} + \eta\frac{d\mathrm{S}}{dy} + \zeta\frac{d\mathrm{S}}{dz}\right).$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

4. En particulier, considérons une droite P, telle que sa première polaire, relativement à K, se décompose en un point p et une conique. Si l'on prend un point quelconque M de cette droite, le réseau formé par les premières polaires des droites qui se croisent en M comprend en particulier le point p et la conique résiduelle; on en conclut que la courbe harmonique du faisceau passe par le point p. D'ailleurs cette courbe est la première polaire de M relativement à $\mathfrak{S}$; donc, réciproquement, d'après un théorème connu, la droite polaire de p, relativement à $\mathfrak{S}$, passe par le point M, et, comme ce point a été pris arbitrairement sur la droite P, cette droite n'est autre que la polaire de p.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si la première polaire d'une droite* P, *relativement à la courbe de quatrième classe* K, *se décompose en un point p et une conique résiduelle, la droite* P *est la droite polaire de p, relativement à la courbe du quatrième ordre* $\mathfrak{H}$, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

D'où encore cette conséquence :

Les vingt et une droites P *sont les droites polaires relativement à* $\mathfrak{H}$ *des vingt et un points p.*

La proposition précédente peut se démontrer directement ainsi qu'il suit :

En désignant par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ l'équation mixte de la première polaire de la droite $\omega = ux + vy + wz = 0$, je remarque que, si cette polaire se décompose en une conique et un point p, pour les coordonnées de ce point, on devra avoir $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, la tangente à la polaire étant en ce point entièrement indéterminée.

On a d'ailleurs, pour un tel point (n° 1), $\mathfrak{x}' = 0$ et $\mathfrak{y}' = 0$; d'après la formule (13) déjà citée de mon précédent Mémoire, on aura donc

$$a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0, \qquad b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} = 0, \qquad c\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} = 0, \qquad d\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} = 0.$$

Il en résulte que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ sont nuls; autrement (a, b, c, d, e) serait une puissance exacte, c'est-à-dire que les quatre tangentes menées du point p à K se confondraient en une seule, ce qui est impossible.

Les coordonnées du point p satisfont donc aux quatre équations

$$\mathfrak{x}' = 0, \qquad \mathfrak{y}' = 0, \qquad \mathfrak{x} = 0, \qquad \mathfrak{y} = 0,$$

ou bien

$$2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \qquad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0,$$

$$\omega\frac{d\Delta}{dx} - 12u\Delta = 0, \qquad \omega\frac{d\Delta}{dy} - 12v\Delta = 0.$$

Remplaçons, dans les deux dernières relations, Δ par sa valeur $S^3 - 27T^2$, puis $\frac{dT}{dx}$ et $\frac{dT}{dy}$ par leurs valeurs tirées des deux pre-

mières; il viendra simplement, après avoir supprimé le facteur Δ,

$$\omega \frac{dS}{dx} = 4Su, \qquad \omega \frac{dS}{dy} = 4Sv,$$

d'où encore, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes,

$$\omega \frac{dS}{dz} = 4Sw.$$

La droite polaire du point p, relativement à S, a pour équation

$$X\frac{dS}{dx} + Y\frac{dS}{dy} + Z\frac{dS}{dz} = 0$$

ou, en vertu des relations précédentes,

$$uX + vY + wZ = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

5. Étant données deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe K^n et K'^n, désignons par I l'invariant quadratique qui, égalé à zéro, donne l'équation de la courbe harmonique des courbes données; si le polynome I est identiquement nul, K^n et K'^n jouissent de la propriété d'être vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques. Je dirai alors qu'elles forment un *couple harmonique;* si, de plus, n est impair, deux quelconques des courbes du faisceau (K^n, K'^n) formeront un couple harmonique, et je dirai que le *faisceau est harmonique*.

Étant donnée une courbe K^n, dont l'équation mixte est

$$(a, b, \ldots, k, l) = 0,$$

on peut rechercher s'il est possible de lui adjoindre une autre courbe de même classe K'^n, qui constitue avec elle un couple harmonique.

En désignant par $(a', b', \ldots, k', l') = 0$ l'équation mixte de K'^n, il faut déterminer les polynomes $a', b', \ldots,$ de telle sorte que l'on ait identiquement

$$I = al' - nbk' + \ldots = 0.$$

Nous disposons, à cet effet, des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients de l'équation de K'^n; la courbe représentée par $I = 0$ étant de degré n,



il en résulte que les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients inconnus doivent satisfaire à un nombre égal d'équations linéaires sans second membre; j'appellerai Δ le déterminant de ce système d'équations.

6. Il est important maintenant de distinguer le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Si n est impair, le système d'équations est toujours satisfait pour

$$a = a', \qquad b = b', \qquad \ldots;$$

par conséquent on a toujours $\Delta = 0$. De plus, on sait que, si l'on a une solution qui diffère de celle-là, il y en a une infinité; en d'autres termes, comme je l'ai déjà fait observer, les diverses courbes qui constituent avec la courbe donnée un couple harmonique forment un faisceau.

On pourra donc supposer que l'un des coefficients inconnus est nul, et l'on aura à trouver $\frac{(n+1)(n+2)-1}{2}$ inconnues satisfaisant à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations linéaires sans second membre, ce qui, en général, exige que deux relations entre les coefficients soient satisfaites.

On peut donc énoncer cette proposition :

Étant donnée une courbe de classe impaire, deux conditions doivent être satisfaites pour que cette courbe fasse partie d'un réseau harmonique.

On voit facilement, d'après cela, qu'un système de deux points ne peut former un couple harmonique, ce qui, géométriquement, était évident *a priori*.

Relativement aux courbes de troisième classe, il est très remarquable que les conditions nécessaires soient toujours satisfaites et que toute courbe de troisième classe fasse partie d'un faisceau harmonique. Cela résulte de la proposition suivante, que j'ai démontrée dans le *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires*, etc., déjà cité (*Journal de Mathématiques*, p. 108) :

Une courbe quelconque de troisième classe et sa hessienne

sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques.

7. Si la courbe K^n est de classe paire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle fasse partie d'un couple harmonique est que $\Delta = 0$; et je vais d'abord chercher comment on peut facilement former ce déterminant.

Représentons symboliquement, comme l'ont fait MM. Aronhold et Clebsch, par $(au + bv + cw)^2 = 0$ l'équation tangentielle de K^n, en convenant, dans le développement du trinome, de remplacer le produit $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ par le coefficient $a_{\alpha\beta\gamma}$; l'équation mixte de cette courbe sera

$$[a\mu - b\lambda + c(\lambda y - \mu x)]^n = 0 \qquad \text{ou} \qquad [(cy - b)\lambda + (a - cx)\mu]^n = 0.$$

Semblablement, l'équation mixte d'une seconde courbe K'^n sera symboliquement

$$[(\gamma y - \beta)\lambda + (\alpha - \gamma x)\mu]^n = 0.$$

L'équation symbolique de la courbe harmonique des deux courbes données sera, par suite,

$$[(cy - b)(\alpha - \gamma x) - (\gamma y - \beta)(a - cx)]^n = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$[x(b\gamma - c\beta) + y(c\alpha - a\gamma) + z(a\beta - b\alpha)]^n = 0.$$

Si l'on suppose que K^n et K'^n constituent un couple harmonique, les divers coefficients du développement de ce trinome doivent être nuls.

On aura, par suite, les diverses équations

$$\begin{array}{lll}
(a\beta - b\alpha)^n = 0, & (a\beta - b\alpha)^{n-1}(c\gamma - c\beta) = 0, & \ldots, \\
(b\gamma - c\beta)^n = 0, & (b\gamma - c\beta)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, & \ldots, \\
(c\alpha - a\gamma)^n = 0, & (c\alpha - a\gamma)^{n-1}(a\beta - b\alpha) = 0, & \ldots;
\end{array}$$

et Δ sera le déterminant de ces $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations, si l'on y considère comme inconnues les diverses puissances de α, β et γ.

J'ai calculé par ce procédé la valeur de Δ, relative à la courbe générale de quatrième classe; je transcris ici l'expression de cet invariant, qui, comme je le ferai voir tout à l'heure, présente



quelque intérêt dans l'étude des points de rebroussement de la courbe.

Pour simplifier l'écriture, j'ai adopté les notations de M. Salmon (*Higher curves*, p. 251), et pris pour équation de la courbe K l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &au^4 + bv^4 + cw^4 + 6fv^2w^2 + 6gw^2u^2 + 6hu^2v^2 \\ &\quad + 12lu^2vw + 12mv^2wu + 12nw^2uv + 4a_2u^3v \\ &\quad + 4a_3u^3w + 4b_1v^3u + 4b_3v^3w + 4c_1w^3u + 4c_2w^3v = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & c & b & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\
c & 0 & a_1 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & -c_1 & 0 & 0 \\
b & a & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\
6f & 0 & 0 & a & h & g & 2l & -a_3 & -a_2 & -3n & 0 & 0 & -3m & 0 & 0 \\
0 & 6g & 0 & h & b & f & -b_3 & 2m & -b_1 & 0 & -3l & 0 & 0 & -3n & 0 \\
0 & 0 & 6h & g & f & c & -c_2 & -c_1 & 2n & 0 & -a & -3m & 0 & 0 & -3l \\
0 & 0 & 0 & -2a_3 & 4m & -2c_1 & -n & 2g & -l & 3c_2 & 0 & -3h & -3f & 0 & 3a_2 \\
0 & 0 & 0 & -2a_2 & -2b_1 & 4n & -m & -l & 2h & -3f & 3a_3 & 0 & 3b_3 & -3g & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4l & -2b_3 & -2c_2 & 2f & -n & -m & 0 & 3g & 3b_1 & 0 & 3c_1 & -3h \\
0 & 0 & -4b_1 & -2n & 0 & 0 & 0 & c_2 & -f & 0 & c_1 & b_3 & 0 & -c & 3m \\
-4c_2 & 0 & 0 & 0 & 2l & 0 & -g & 0 & a_3 & c_1 & 0 & a_2 & 3n & 0 & -b \\
0 & -4a_3 & 0 & 0 & 0 & -2m & b_1 & -h & 0 & b_3 & a_2 & 0 & -a & 3l & 0 \\
0 & -4c_1 & 0 & -2m & 0 & 0 & 0 & -f & b_3 & 0 & 3n & -b & 0 & c_2 & b_1 \\
0 & 0 & -4a_2 & 0 & -2n & 0 & c_1 & 0 & -g & -c & 0 & 3l & c_2 & 0 & a^3 \\
-4b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2l & -h & a_2 & 0 & 3m & -a & 0 & b_1 & a_3 & 0
\end{vmatrix}$$

8. Une courbe du sixième ordre étant déterminée par vingt-sept points, on ne peut pas, en général, faire passer une telle courbe par les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K; mais on peut, à cet égard, énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe soient situés sur une courbe du sixième ordre est que l'invariant* Δ' *soit nul.*

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition suivante :

Si les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K *sont situés sur une courbe du sixième ordre, elle fait partie d'un couple harmonique; la réciproque est également vraie.*

Démonstration. — Soit $U = (a, b, c, d, e) = 0$ l'équation mixte de K; supposons que cette courbe constitue un couple harmonique avec la courbe K' dont l'équation mixte est

$$(a', b', c', d', e') = 0.$$

En désignant respectivement par S, T, I et J l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U, l'invariant quadratique de U et de U', et l'expression $a'\frac{dT}{da} + b'\frac{dT}{db}, \ldots,$ j'ai démontré [*Mémoire de Géométrie analytique,* n° 37 (*Journal de Mathématiques,* 2[e] série, t. XVII)], que la courbe du dixième ordre, représentée par l'équation

$$2SJ - 3TI = 0,$$

passait par les vingt-quatre points de rebroussement et les vingt-huit points doubles de K. Les deux courbes K et K' constituant un couple harmonique, on a identiquement $I = 0$; la courbe du dixième ordre se décompose donc en deux courbes du quatrième et du sixième ordre $S = 0$ et $J = 0$. D'ailleurs $\mathfrak{S}$ ne rencontre K qu'en ses points de rebroussement; les vingt-huit points doubles se trouvent donc sur la courbe du sixième ordre $J = 0$.

Réciproquement, si les vingt-huit points doubles sont situés sur une courbe du sixième ordre C dont l'équation soit $W = 0$, je dis que K fait partie d'un couple harmonique. Pour le démontrer,

je m'appuierai sur la proposition suivante (*Mémoire de Géométrie analytique,* n° 38) :

Si, par les cinquante-deux points singuliers d'une courbe de quatrième classe K, *on fait passer une courbe quelconque du dixième ordre, cette courbe rencontre* K *en seize points distincts des points singuliers; les tangentes menées à* K *en ces seize points touchent une courbe de quatrième classe.*

Puisque les vingt-huit points δ sont une courbe du sixième ordre C, l'ensemble des courbes $\mathfrak{S}$ et C détermine une courbe du dixième ordre passant par les cinquante-deux points singuliers; $\mathfrak{S}$ ne rencontre d'ailleurs K qu'en ses points de rebroussement; par suite, en vertu du théorème précédent, les tangentes menées à K aux points où cette courbe est coupée par C (abstraction faite des points doubles) forment un polygone Q dans lequel on peut inscrire une infinité de courbes de quatrième classe.

$U' = 0$ désignant l'équation mixte d'une quelconque des courbes inscrites dans ce polygone, on aura nécessairement

$$2SJ - 3TI = SW,$$

d'où

$$S(2J - W) = 3TI,$$

et par suite, en désignant par μ un facteur numérique,

$$S = 3\mu I \qquad \text{et} \qquad T = \mu(2J - W).$$

Considérons maintenant la courbe de quatrième classe

$$U - 3\mu U' = 0,$$

inscrite évidemment dans le polygone Q; l'invariant I relatif à cette courbe et à K est égal à $S - 3\mu I$ et, par suite des relations précédentes, il est identiquement nul.

Les courbes déterminées par les équations

$$U = 0 \qquad \text{et} \qquad U = 3\mu U' = 0$$

constituent donc un couple harmonique et la proposition est complètement démontrée.

SUR LES POLAIRES D'UNE DROITE

RELATIVEMENT

AUX COURBES ET AUX SURFACES ALGÉBRIQUES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1875.

I.

1. Je m'appuierai, dans tout ce qui suit, sur la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Étant donnés un nombre quelconque de courbes* K, K′, K″, ... *et un lieu* C *défini par la condition qu'il existe une relation, du reste arbitraire, entre les directions d'un certain nombre des tangentes que l'on peut mener aux courbes données par un point de ce lieu; appelons* C_0 *le lieu que l'on obtient en remplaçant, dans la définition de la courbe C, la courbe* K *par les points de contact des tangentes qu'on peut lui mener par un point* M *du plan : cela posé, la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe* C, *se confond avec la droite polaire du même point relativement à la courbe* C_0 (¹).

Démonstration. — Soient

$$(1) \qquad U = (a, b, c, \ldots) = 0, \qquad U' = (a', b', c', \ldots) = 0, \qquad \ldots$$

les équations mixtes des courbes K, K′, ..., et

$$V(a, b, \ldots;\; a', b', \ldots) = 0$$

(¹) J'emploie ici les notations de mon *Mémoire sur l'application des formes binaires à la Géométrie* (*Journ. de Math.*, 3ᵉ série, t. I).

l'équation cartésienne de la courbe C; cherchons d'abord ce que devient cette équation quand on substitue à la courbe K les points de contact des tangentes menées à cette courbe par un point (x, y) du plan. Soit $\omega = ux + vy + wz = 0$ l'équation d'une droite quelconque; l'équation mixte de la première polaire relativement à K est

$$(2) \qquad u\,U_2 - v\,U_1 + \omega\Pi = 0,$$

$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ étant l'équation de la première polaire de la droite de l'infini; si nous éliminons λ et μ entre les équations (1) et (2), nous obtiendrons l'équation cartésienne des tangentes menées à K aux points de rencontre de cette courbe avec la droite donnée; si ensuite, en faisant pour abréger $X = \xi - x$, $Y = \eta - y$, et en considérant ξ et η comme les coordonnées courantes, nous remplaçons respectivement dans l'équation ainsi obtenue u, v et ω par μ', $-\lambda'$ et $\lambda' Y - \mu' X$, nous aurons l'équation mixte des points de contact des tangentes menées du point (x, y) à la courbe K. Faisant d'abord la substitution indiquée dans l'équation (2), il vient

$$(2') \qquad \lambda' \frac{dU}{dx}\mu' + \frac{dU}{dy} + n(\lambda' Y - \mu' X)\,\Pi(\lambda, \mu) = 0,$$

et c'est entre cette équation et l'équation (1) que nous devons éliminer λ et μ; comme nous avons à déterminer la droite polaire du point (ξ, η) relativement à C_0, j'observe d'abord que l'on peut négliger les puissances de X et de Y supérieures à la première. L'équation mixte des points de contact devient alors simplement, en supprimant les accents,

$$(3) \qquad U(\lambda, \mu) + n(\lambda Y - \mu X)\,\Pi(\lambda, \mu) = 0,$$

ou encore

$$(a, b, c) + [n\alpha Y, (n-1)\beta Y - \alpha X, (n-2)\gamma Y - 2\beta X, \ldots].$$

Il résulte de là que l'équation de la courbe C_0 s'obtiendra (en négligeant toujours les puissances de X et de Y supérieures à la première) en y remplaçant respectivement a, b, c, ... par $a + n\alpha Y$, $b + (n-1)\beta Y - \alpha X$, $c + (n-2)\gamma Y - 2\beta X$, ...,

et en substituant aux lettres x et y les lettres ξ, η dans les polynomes a', b', ..., a'', b'', ..., ...

Désignant, pour un instant, les résultats de cette substitution par A', B', ..., A'', B'', ..., ..., l'équation de la courbe C_0 sera

$$V_1 = V(a + n\alpha Y, \ldots;\ A', B', \ldots;\ A'', B'', \ldots) = 0,$$

et l'équation de la droite polaire du point (x, y) relativement à C_0

$$\xi\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right) + \eta\left(\frac{dV_1}{d\eta}\right) + \rho\left(\frac{dV_1}{d\rho}\right) = 0,$$

les lettres ξ et η étant de nouveau remplacées par les lettres x et y dans les dérivées partielles.

On a évidemment

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right) = -\alpha\frac{dV}{db} - 2\beta\frac{dV}{dx} - \ldots + \frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx} + \ldots + \frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx} + \ldots,$$

ou, en vertu de formules que j'ai données dans le Mémoire déjà cité,

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right) = \frac{dV}{da}\frac{da}{dx} + \frac{dV}{db}\frac{dV}{dx} + \ldots + \frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx} + \ldots + \frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx} + \ldots = \frac{dV}{dx}.$$

On démontrerait de même que $\left(\frac{dV_1}{d\eta}\right) = \frac{dV}{dy}$ et $\left(\frac{dV_1}{d\zeta}\right) = \frac{dV}{dz}$.

La proposition est donc complètement établie.

Remarque. — Dans la définition de la courbe C_0, on voit que la courbe K a été remplacée par un système de points ; il est clair que l'on pourrait faire de même pour chacune des autres courbes K', K'', ..., et même pour toutes ces courbes.

2. La proposition précédente permet de résoudre dans un grand nombre de cas intéressants le problème suivant qui comprend, en particulier, le problème de la construction de la tangente :

Étant donnée une courbe, construire la droite polaire d'un point du plan relativement à cette courbe.

Ainsi, la podaire d'une courbe K étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle droit cette courbe et un point fixe P, on a immédiatement la proposition suivante :

Étant donnée la podaire C *d'un point* P *relativement à une*

courbe K, *la polaire* [1] *d'un point* M *du plan relativement à la podaire est la polaire du même point relativement aux divers cercles ayant pour diamètres les droites qui joignent le point* P *aux points de contact des tangentes menées du point* M *à la courbe* K.

Semblablement, une spirique A étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle donné α une conique B, on peut énoncer ce théorème :

La polaire d'un point M *relativement à la spirique* A *est la polaire de ce même point relativement aux deux cercles capables de l'angle donné et ayant pour corde commune la droite qui joint les points de contact des tangentes menées de* M *à la conique* B.

3. Les conséquences les plus importantes du théorème I sont contenues dans les propositions suivantes que j'ai déjà données dans une Note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* [2] :

Théorème II. — *Étant données deux courbes quelconques* K^m *et* K^n, *de classe respectivement égale à* m *et à* n, *la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux* mn *tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux* mn *droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

Théorème III (corrélatif du précédent). — *Étant données deux courbes quelconques* C^m *et* C^n, *d'ordre respectivement égal à* m *et à* n, *le pôle d'une droite quelconque, relativement aux* mn *points d'intersection de ces courbes, est le pôle de la même droite relativement aux* mn *points d'intersection des tangentes menées à* C^m *aux points où cette courbe rencontre la droite avec les tangentes menées à* C^n *en ses points de rencontre avec la droite.*

---

(1) Ici, comme dans la suite de cette Note, j'appelle simplement *polaire* d'un point la *droite polaire* de ce point.

(2) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, mai 1875.

Théorème IV. — *La polaire d'un point quelconque relativement à une courbe de $n^{ième}$ classe est la polaire du même point relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point à la courbe.*

Remarque. — Si la courbe a des tangentes d'inflexion et des tangentes doubles, ces droites doivent être considérées comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque tangente double et trois fois chaque tangente d'inflexion.

Théorème V (corrélatif du précédent). — *Le pôle d'une droite quelconque relativement à une courbe du $n^{ième}$ ordre est le pôle de la même droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection des tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par la droite.*

Remarque. — Si la courbe a des points doubles et des points de rebroussement, ces points doivent être considérés comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque point double et trois fois chaque point de rebroussement.

II.

4. Considérons une courbe gauche quelconque K et une droite de l'espace Δ; par cette droite, menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement aux points d'intersection du plan et de la courbe; lorsque le plan tourne autour de la droite, le lieu du pôle est une droite que j'appellerai la *polaire de* Δ relativement à la courbe gauche et que je désignerai par la notation $\Delta(K)$.

Poncelet a donné de belles propriétés de ces polaires [1]; on voit immédiatement, par exemple, que la polaire d'une droite relativement à une courbe gauche est la polaire de cette droite

---

[1] *Propriétés projectives des figures,* Section IV. Poncelet, au lieu du mot *polaire,* emploie l'expression d'*axe des moyennes harmoniques.*

relativement aux tangentes menées à cette courbe aux points où elle est coupée par un plan quelconque mené par la droite. Je ne crois pas que, jusqu'ici, on ait indiqué comment on peut déterminer la polaire d'une droite relativement à une courbe, lorsque au lieu de donner cette courbe on la définit comme l'intersection de deux surfaces. Je m'occuperai simplement ici du cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces, les autres cas se ramenant évidemment à celui-là.

Du théorème III on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème VI. — *Une courbe gauche étant l'intersection complète de deux surfaces* S *et* S′, *la polaire d'une droite relativement à cette courbe est la polaire de cette même droite relativement aux diverses droites d'intersection des plans menés tangentiellement à* S *aux points où cette surface rencontre la droite avec les plans menés tangentiellement à* S′ *aux points où la droite coupe cette surface.*

5. Considérons une surface quelconque Σ et une droite de l'espace Δ; par cette droite menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement à la courbe d'intersection de la surface et du plan (la courbe étant considérée comme étant d'une classe donnée); lorsque le plan tourne autour de la droite, le pôle décrit une droite que j'appellerai la *polaire de* Δ, relativement à la surface et que je représenterai par la notation $\Delta(\Sigma)$.

Cette polaire peut être évidemment encore définie comme l'enveloppe des plans polaires des différents points de Δ relativement aux cônes circonscrits à Σ et ayant ces points pour sommets (ces cônes étant considérés comme d'un ordre donné).

Par suite, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à son ordre, c'est-à-dire n'a ni ligne double ni ligne de rebroussement, on déduit immédiatement du théorème V la proposition suivante :

Théorème VII. — *Si une surface du* $n^{\text{ième}}$ *ordre n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de cette droite relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$

droites suivant lesquelles se coupent les plans qui touchent la surface aux points où elle rencontre la droite.

De même, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à sa classe, le théorème IV donne la proposition suivante corrélative de la précédente :

Théorème VIII. — *Si une surface de $n^{ième}$ classe n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de la droite relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites qui joignent deux à deux les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite donnée.*

6. En particulier, si l'on considère une surface développable G ayant pour arête de rebroussement une courbe gauche K et un point quelconque M de la droite Δ, le plan polaire de M, relativement à l'ensemble des plans osculateurs de la courbe qui passent par ce point, enveloppe, quand le point M se déplace sur la droite, la polaire de cette droite relativement à G.

Si la développable G est définie au moyen de deux surfaces inscrites S et S', on a le théorème suivant corrélatif du théorème VI :

Théorème IX. — *Une surface développable* G *étant la développable complète circonscrite à deux surfaces* S *et* S', *la polaire d'une droite relativement à cette développable est la polaire de cette droite relativement aux droites qui joignent chacun des points de contact des plans menés par la droite tangentiellement à* S *à chacun des points de contact des plans menés par la même droite tangentiellement à* S'.

7. En particulier, considérons une suite de surfaces homofocales du second ordre (Σ) inscrite dans la développable isotrope Γ.

Soient Σ et Σ' deux quelconques de ces surfaces ; d'une droite Δ on peut leur mener quatre plans tangents, les droites qui joignent les points de contact sur l'une des surfaces avec les points de contact sur l'autre forment un quadrilatère gauche Q.

De ce qui précède, il résulte que :

La polaire de la droite Δ par rapport au quadrilatère Q [1] *est la même, quelles que soient les deux surfaces homofocales considérées, et se confond avec la polaire de cette même droite relativement à la développable isotrope circonscrite.*

En particulier, si la surface Σ' se réduit à l'ombilicale, la polaire de Δ se réduit à la polaire de cette droite relativement aux normales que l'on peut mener à Σ aux deux points où cette surface est touchée par les plans tangents qu'on peut lui mener par Δ. D'où cette conséquence :

Étant donnés un système de surfaces homofocales du second ordre (Σ) *et une droite fixe* Δ, *si par* Δ *on mène les plans tangents à une surface quelconque* Σ *du système et si l'on prend la polaire de* Δ *relativement aux normales qu'on peut mener à* Σ *aux deux points de contact, la polaire de* Δ *relativement à ces normales est la même quelle que soit la surface du système que l'on considère et elle se confond avec la polaire relativement à la développable isotrope circonscrite au système* [2].

III.

8. Les deux théorèmes généraux VII et VIII s'appliquent, avec quelques modifications, à toute surface donnée, en sorte qu'ils fournissent en réalité deux moyens distincts de construire la polaire d'une droite donnée relativement à cette surface. Il serait facile d'énoncer à ce sujet les propositions générales, mais je crois

---

[1] Ce quadrilatère Q jouit encore de plusieurs autres propriétés intéressantes; ainsi *la somme de deux de ses côtés contigus est égale à la somme des deux autres* [*Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace* (*Nouv. Ann. de Math.*, 1872)].

[2] Cette proposition s'étend évidemment à un système de surfaces homofocales quelconques; on peut la considérer comme l'extension à l'espace de ce théorème que j'ai donné depuis longtemps :

Le centre harmonique d'un point, par rapport aux points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à une courbe de $n^{\text{ième}}$ *classe, est le centre harmonique du même point relativement aux* n *foyers de la courbe.*

inutile de le faire et je me contenterai d'énoncer les résultats relatifs à deux surfaces particulières des plus simples.

Considérons, en premier lieu, une cubique gauche K et la développable du quatrième ordre G dont elle est l'arête de rebroussement; soient $\Delta(K)$ et $\Delta(G)$ les polaires d'une même droite Δ relativement à la courbe gauche et à la développable (*Cf.* n°s 4 et 6).

Si, d'un point quelconque M de la droite Δ, on mène le cône contenant la courbe K, ce cône est du troisième degré et de la quatrième classe; il a trois plans d'inflexion, qui sont les plans osculateurs que l'on peut mener à K par le point M. Le plan polaire de M relativement à ce cône contient la polaire $\Delta(K)$; du théorème IV et des considérations ci-dessus développées (n° 6) résulte la proposition suivante :

Théorème X. — *En désignant par* t *l'ensemble des six droites qui joignent deux à deux les quatre points de la courbe* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a la relation*

$$2\Delta(t) = \Delta(K) + 3\Delta(G).$$

9. Concevons maintenant que, par la droite Δ, on mène un plan quelconque; il coupe la surface G suivant une courbe du quatrième ordre et de la troisième classe ayant pour point de rebroussement ses trois points de rebroussement sur K. Le pôle de Δ relativement à cette courbe est sur $\Delta(G)$; du théorème V résulte la proposition suivante :

Théorème XI. — *En désignant par* T *l'ensemble des six droites suivant lesquelles se coupent les plans osculateurs menés aux points de* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(G) + 3\Delta(K).$$

Remarque. — On déduit de là

$$4\Delta(G) = 3\Delta(t) - \Delta(T)$$

et

$$4\Delta(K) = 3\Delta(T) - \Delta(t);$$

on voit que les polaires d'une droite relativement à K et à G sont déterminées quand on connaît les quatre tangentes à la courbe qui la rencontrent. Par suite :

Deux droites Δ *et* Δ', *conjuguées par rapport à la cubique gauche* K, *ont mêmes polaires relativement à cette cubique, et relativement à la développable dont elle est l'arête de rebroussement.*

Ces deux polaires sont également conjuguées par rapport à la cubique.

10. Considérons en second lieu une surface réglée S du troisième ordre (et par conséquent de troisième classe); appelons D la directrice double de cette surface et D' la seconde directrice rectiligne; on sait que tout plan passant par D' est doublement tangent à la surface.

Cela posé, soient Δ une droite quelconque de l'espace et $\Delta(S)$ sa polaire relativement à S; si l'on mène par Δ un plan quelconque, il coupe S suivant une courbe du troisième ordre et de la quatrième classe ayant pour point double le point de rencontre de ce plan avec D. Du théorème IV, on déduit la proposition suivante :

Théorème XII. — *En désignant par t le triangle formé par les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à* S *par la droite* Δ, *on a*

$$2\Delta(t) = \Delta(S) + 2\Delta(D).$$

11. Prenons maintenant un point quelconque M sur la droite Δ et imaginons le cône circonscrit à la surface et ayant ce point pour sommet; ce cône est de la troisième classe et du quatrième ordre; il a pour plan double le plan mené par le point M et par la droite D'.

Du théorème V résulte donc la proposition suivante :

Théorème XIII. — *En désignant par* T *les arêtes du trièdre formé par les plans menés tangentiellement à* S *en ses points de rencontre avec* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(S) + 2\Delta(D').$$

Des deux relations précédentes, on déduit

$$\Delta(T) + \Delta(D) = \Delta(t) + \Delta(D'),$$

identité sur laquelle je reviendrai plus tard.



SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1875.

Dans l'avant-dernier numéro des *Comptes rendus*, M. Ribaucour a donné cette élégante proposition, démontrée depuis géométriquement par M. Mannheim :

Le rayon de courbure géodésique d'une courbe Σ à courbure normale constante est les $\frac{2}{3}$ du rayon de courbure géodésique de la section plane Σ', ayant même tangente et surosculée par un cercle.

Considérons sur une surface quelconque deux courbes Σ et Σ' se touchant au point M. Soient ρ et r le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe Σ au point M; ϖ l'angle que fait en ce point le plan osculateur à la courbe avec la normale à la surface; désignons par des lettres accentuées les valeurs des mêmes quantités relatives à la courbe Σ'.

Portons enfin sur chacune des deux courbes, à partir du point M, une même longueur infiniment petite ds.

On aura d'abord, en vertu d'une expression donnée par M. Ossian Bonnet de la torsion géodésique,

$$(1)\qquad d\varpi - \frac{ds}{r} = d\varpi' - \frac{ds}{r'};$$

puis, en vertu d'une relation que j'ai donnée (*Bulletin de la Société philomathique,* t. VII, p. 51),

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{2}{3}\frac{ds}{r}\right) + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tang}\varpi'\left(d\varpi' - \frac{2}{3}\frac{ds}{r'}\right) + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho'},$$

ou encore, en introduisant, relativement à la première courbe, le

rayon R de la section normale à la surface et tangente en M à Σ,

$$(2\,bis)\quad -\frac{1}{3}\frac{dR}{R}\frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi-\frac{ds}{r}\right)=\operatorname{tang}\varpi'\left(d\varpi'-\frac{2}{3}\frac{ds}{r'}\right)+\frac{1}{3}\frac{d\rho'}{\rho'}.$$

Supposons maintenant que Σ soit une courbe à courbure normale constante et Σ' la courbe plane ayant même tangente et surosculée par un cercle; on aura évidemment $dR=0$, $d\rho'=0$ et $r'=\infty$.

Les équations (1) et ($2\,bis$) deviennent alors

$$d\varpi-\frac{ds}{r}=d\varpi' \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi-\frac{ds}{r}\right)=\operatorname{tang}\varpi'\,d\varpi';$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varpi'=\tfrac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi,$$

formule qui est l'expression analytique du théorème ci-dessus énoncé.

SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1875-1876.

1. Soit une cubique fondamentale $U = 0$; en adoptant les notations de M. Salmon (*Higher plane curves,* p. 183 et suiv.), je désignerai par S et T les deux invariants de U, par H son hessien et par F, P et Q ses contrevariants principaux. La hessienne de la courbe aura donc pour équation $H = 0$; l'équation tangentielle de la courbe elle-même sera $F = 0$; et l'équation tangentielle de la cayleyenne $P = 0$.

La cubique fondamentale et sa hessienne déterminent un faisceau (U); une courbe quelconque de ce faisceau a pour équation $U + 6\rho H = 0$; je la désignerai par la notation U_ρ.

Je considérerai en même temps le faisceau tangentiel des courbes déterminées par l'équation $F - 6\rho P^2 = 0$, et je désignerai par la notation F_ρ la courbe de ce faisceau qui correspond à une valeur déterminée de ρ.

2. Un système de trois points étant déterminé sur une droite par les racines d'une équation obtenue en égalant à zéro un polynome du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

j'appellerai *points covariants du système* les points déterminés sur la droite par les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynome du second degré

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)x + (bd - c^2)$$

covariant du précédent.

3. Cela posé, on a les propositions suivantes :

I. *Une droite quelconque* D *du plan de* U *rencontrant cette courbe en un système de trois points, les deux points covariants de ce système sont situés sur une même cubique du faisceau* (U).

Cette cubique rencontre D en un troisième point que j'appellerai le *centre de la droite*.

II. *Par tout point* M *du plan passent quatre droites ayant le point* M *pour centre; je les appellerai les* rayons *du point* M.

III. *Si, d'un point quelconque* M *de la cubique* U_ρ, *on mène des tangentes à la conique polaire de* M *par rapport à* U, *ces tangentes enveloppent la surface de sixième classe* F_ρ.

IV. *Des six tangentes que l'on peut mener d'un point* M *de* U *à la courbe* F_ρ, *deux sont les tangentes menées du point* M *à sa conique polaire relativement à* U, *les quatre autres sont les rayons du point* M.

V. *Si une droite se meut tangentiellement à* F_ρ, *son centre décrit la cubique* U_ρ.

VI. *Si une droite touche* F_ρ *au point* A *et rencontre* U_ρ *aux points* a, b, c, *les quatre points* A, a, b, c *forment un système harmonique*.

4. Voici quelques conséquences de cette dernière proposition :

Étant donnée une cubique U, si l'on cherche les courbes jouissant de la propriété qu'une quelconque de leurs tangentes est partagée harmoniquement par leur point de contact et les trois points où elle rencontre la cubique U, on trouve que ces courbes sont algébriques, et il est facile d'en obtenir une construction géométrique [1].

A toute cubique U se rattache en effet une intégrale elliptique $\int dV$ qui jouit de la propriété suivante : désignons, en général, par (M) la valeur de cette intégrale prise depuis un point convenablement choisi jusqu'à un point M pris arbitrairement sur cette

(1) *Voir*, sur ce sujet, ma Note *Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre*, 22 (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XV).

courbe; la condition nécessaire et suffisante pour que trois points A, B, C de la courbe soient en ligne droite peut s'exprimer par la relation

$$(A) + (B) + (C) \equiv 0,$$

le signe de la congruence indiquant que la somme, qui se trouve dans le premier membre, est de la forme $mp + nq$, m et n désignant des nombres entiers, p et q les deux périodes de l'intégrale.

Si une droite tourne autour d'un point A de la courbe, en désignant par B et C les deux points variables où cette droite mobile coupe la courbe, on aura, en vertu de ce qui précède,

$$(A) = 0,$$

et, par suite,

$$(B) + (C) \equiv 0,$$

ce qui donne géométriquement l'intégrale de l'équation

$$dV + dV' = 0.$$

Si maintenant on désigne par A′ le point conjugué harmonique de A relativement à B et à C, on voit que la droite, en tournant infiniment peu autour du point A′, décrit sur la courbe deux segments infiniment petits égaux à ceux qu'elle décrivait en tournant autour du point A, l'un de ces segments étant décrit dans un sens contraire.

On a donc, dans ce cas,

$$dV - dV' = 0,$$

équation dont l'intégrale est $(B) - (C) \equiv 0$.

D'où cette conclusion :

Si une courbe est telle, qu'une quelconque de ses tangentes rencontrant la cubique U *en trois points* A, B, C, *son point de contact soit le conjugué harmonique du point* A *relativement à* B *et à* C, *les points variables* B *et* C *sont reliés par la relation*

$$(B) - (C) \equiv 0.$$

De là encore une construction géométrique simple de ces courbes.

Soient, en effet, b et c deux points fixes pris sur la courbe et M

un point mobile décrivant cette courbe. Menons les droites M*b* et M*c* et appelons B et C les points où elles coupent respectivement U; je dis que la droite BC enveloppe une courbe jouissant de la propriété énoncée. Les trois points M, *b*, B étant en effet en ligne droite, ainsi que les points M, *c*, C, on a

$$(M) + (b) + (B) \equiv 0,$$
$$(M) + (c) + (C) \equiv 0;$$

d'où

$$(B) - (C) \equiv (c) - (b) \equiv \text{const.}$$

Il est clair, d'ailleurs, que, pour obtenir toutes les courbes cherchées, il suffit, un des points *b* étant choisi arbitrairement et restant fixe, de faire varier le point C.

5. Quelque simple que soit la construction géométrique que je viens de donner, elle se prêterait peut-être difficilement à la recherche de l'équation générale des courbes elles-mêmes.

Le théorème VI donné ci-dessus (3) permet d'y arriver facilement.

On voit, en effet, qu'étant donnée une cubique U_ρ, la courbe de sixième classe F_ρ est une solution de la question; or, U_ρ étant une courbe déterminée, comme on peut prendre pour cubique fondamentale une quelconque des cubiques du faisceau (U), on voit qu'il lui correspond une infinité de courbes F_ρ dont l'ensemble donne la solution complète du problème.

Pour achever la solution, changeons U en $U + 6\lambda H$, λ étant un nombre indéterminé; H, P et F deviennent alors respectivement (Salmon, *loc. cit.*, p. 189 et suiv.)

$$(-2S\lambda - T\lambda^2 + 8S^2\lambda^3)U + (1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)H,$$
$$P + Q\lambda - 12SP\lambda^2 + 4(SQ - TP)\lambda^3$$

et

$$(1 + 24S\lambda^2 + 8T\lambda^3 - 48S^2\lambda^4)F$$
$$- 24(\lambda + 2T\lambda^4)P^2 - 24(\lambda^2 - 4S\lambda^4)PQ - 8\lambda^3Q^2;$$

par suite, U_ρ devient

$$U[1 - 2S\lambda - T\lambda^2 + 8S^2\lambda^3] + 6H[\lambda + \rho(1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)],$$

ou simplement U, si l'on détermine ρ par la condition

$$\rho = \frac{-\lambda}{1 + 12 S\lambda^2 + 2 T\lambda^3}.$$

En effectuant la même transformation dans F_ρ, cette expression devient, réductions faites,

$$(1 + 24 S\lambda^2 + 8 T\lambda^3 - 48 S^2\lambda^4) \\ \times [(1 + 12 S\lambda^2 + 2 T\lambda^3) F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2];$$

l'équation générale des courbes considérées est donc

$$(1 + 12 S\lambda^2 + 2 T\lambda^3) F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2 = 0.$$

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES ALGÉBRIQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1875.

1. Une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe peut être considérée comme une courbe d'ordre $n(n-1)$. Étant donnée une telle courbe $K^n = C^{n(n-1)}$, les polaires des divers ordres d'un point M du plan relativement à $C^{n(n-1)}$ dépendent, en général, non seulement des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe, mais encore des singularités de la courbe. Il est remarquable que *la droite polaire* du point M ne dépende que des points de contact; on a en effet la proposition suivante :

Théorème I. — *Si, d'un point* M *pris dans le plan d'une courbe de* $n^{\text{ième}}$ *classe* $K^n = C^{n(n-1)}$, *on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on considère les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites qui joignent deux à deux les points de contact, la droite polaire de* M *relativement à* $C^{n(n-1)}$ *est la droite polaire du même point relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites considérées.*

Démonstration [1]. — Soient $\omega = ux + vy + wz = 0$ l'équation d'une droite D du plan ;

$$U = (a, b, c, \ldots) = 0$$

l'équation mixte de K^n et $\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ l'équation mixte de

[1] J'emploie ici les notations dont je me suis servi dans mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I).

la polaire de la droite de l'infini relativement à K^n. L'équation mixte de la polaire de D relativement à K^n est (*F. B.*, n° 4) $uU_2 - vU_1 + \omega\Pi = 0$; si l'on élimine λ et μ entre cette équation et l'équation (1), on obtient l'équation $T = 0$ des $n(n-1)$ tangentes menées à K^n aux points de rencontre de cette courbe et de D. Si, en posant pour abréger $X = \xi - x$ et $Y = \eta - y$ (ξ et η désignant les coordonnées courantes), on remplace, dans le résultant T, u, v et ω respectivement par μ, $-\lambda$ et $\lambda Y - \mu X$, l'expression T' ainsi obtenue étant égalée à zéro donne l'équation mixte des points de contact des n tangentes menées du point (x, y) à la courbe. Enfin, si l'on forme le discriminant de T', ce discriminant sera un carré parfait R^2 et l'équation $R = 0$ représentera les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites mentionnées dans l'énoncé du théorème. Il faut maintenant former l'équation de la droite polaire du point (x, y) relativement à la courbe $R = 0$, ou, ce qui est la même chose, relativement à la courbe $R^2 = 0$; et je remarque d'abord qu'il suffit de calculer dans le discriminant R^2 le terme constant et les termes du premier degré en X et en Y, en négligeant les termes du second degré.

Le résultant T, quand on y néglige les termes en ω d'un degré supérieur au premier, est simplement $U(-v, u) + n\omega\Pi(-v, u)$, comme on le voit facilement en se servant de la formule élémentaire qui donne la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples; on déduit de là

$$T' = U(\lambda, \mu) + n(\lambda Y - \mu X)\,\Pi(\lambda, \mu),$$

ou

$$T' = (a, b, c, \ldots) + [n\alpha Y, (n-1)\beta Y - \alpha X, (n-2)\gamma X - 2\beta X], \ldots;$$

d'où, en négligeant toujours les puissances de X et de Y supérieures à la première et en appelant Δ le discriminant de U (égalé à zéro il donne l'équation de $C^{n(n-1)}$)

$$R^2 = \Delta + n\alpha Y \frac{d\Delta}{da} + [(n-1)\beta Y - \alpha X]\frac{d\Delta}{db} + \ldots;$$

d'où encore, en se rappelant que $\Pi = 0$ représente la polaire de la droite de l'infini et en employant une formule donnée dans le Mémoire déjà cité (*F. B.*, n° 13),

$$R^2 = \Delta + X\frac{d\Delta}{dx} + Y\frac{d\Delta}{dy},$$

la polaire du point (x, y) relativement à R^2 est

$$n(n-1)\Delta + (\xi - x)\frac{d\Delta}{dx} + (\eta - y)\frac{d\Delta}{dy} = 0,$$

ou, en vertu du théorème connu sur les fonctions homogènes,

$$\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz} = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

2. Si la courbe de $n^{\text{ième}}$ classe K^n est une courbe C^m d'ordre inférieur à $n(n-1)$, le théorème précédent lui est applicable en la considérant comme une courbe d'ordre $n(n-1)$ obtenue en adjoignant à C^m ses t tangentes doubles (chacune d'elles étant comptée deux fois) et ses i tangentes d'inflexion (chacune d'elles étant comptée trois fois).

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe et du même ordre* $K^n = C^m$, *possédant t tangentes doubles et i tangentes d'inflexion, si l'on désigne respectivement par* D, I, T *et* Δ *les droites polaires d'un point* M *du plan relativement à la courbe* C^m, *à l'ensemble des tangentes doubles, à l'ensemble des tangentes d'inflexion et à l'ensemble des droites qui joignent, deux à deux, les points de contact des tangentes menées du point* M *à* K^n, *la droite* Δ *est la polaire du point* M *relativement au triangle formé par les droites* D, T *et* I, *ces droites étant supposées de poids proportionnel aux nombres m,* 2*t et* 3*i.*

En d'autres termes, si par le point M on mène une sécante quelconque rencontrant respectivement les droites D, T, I et Δ aux points d', t', i' et δ', on a la relation

$$\frac{u(n-1)}{M\delta'} = \frac{m}{M d'} + \frac{2t}{M t'} + \frac{3i'}{M i'}.$$

3. En particulier, si la courbe considérée se décompose en deux courbes distinctes, on obtient la proposition suivante :

Théorème III. — *Étant données deux courbes quelconques de*



classe n et n', K^n et $K^{n'}$, la droite polaire d'un point quelconque M du plan, relativement à leurs nn' tangentes communes, est la droite polaire du même point relativement aux nn' droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de M à K^n aux points de contact des tangentes menées de M à $K^{n'}$.

Si la courbe $K^{n'}$ se réduit à un point P, on obtient le théorème suivant :

Si l'on considère les tangentes menées d'un point P à une courbe de $n^{ième}$ classe K^n, la droite polaire d'un point quelconque M du plan, relativement à l'ensemble de ces tangentes, est la droite polaire du même point relativement aux droites qui joignent au point P les points de contact des tangentes à K^n issues du point M.

Si, en particulier, on suppose que les droites issues du point P soient *isotropes*, on retrouve ce théorème que j'ai déjà donné dans ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bull. de la Société phil.*, 1867).

Si, d'un point M, on mène les n tangentes à une courbe de classe n, le centre harmonique du point M, relativement aux n points de contact, est le même que le centre harmonique du même point relativement aux n foyers réels de la courbe.

4. Si la courbe donnée est une courbe de troisième classe $K^3 = C^6$, on voit que la polaire d'un point M, relativement à C^6, est la polaire de ce point relativement au triangle formé par les points de contact des tangentes issues de M.

Si M est sur la cayleyenne de K^3, ces points sont en ligne droite; donc cette droite est la polaire de M relativement à C^6, d'où ces conséquences :

La hessienne de K^3 est l'enveloppe des droites polaires, relativement à C^6, des points de la cayleyenne de K^3.

Une droite, tangente en M à K^3, coupe C^6 en quatre points distincts de M; les trois pôles de M, relativement à ces quatre points, sont les points où la droite coupe la cayleyenne.

5. On déduit de la théorie des polaires réciproques une série de théorèmes analogues aux précédents et relatifs aux pôles d'une droite par rapport à une courbe donnée. Il est inutile de les énoncer; leur considération, néanmoins, est indispensable, notamment dans l'application des propositions précédentes à la théorie des surfaces algébriques.

SUR UNE SURFACE DE QUATRIÈME CLASSE

DONT ON PEUT DÉTERMINER

LES LIGNES DE COURBURE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1876.

1. Les propriétés générales des surfaces du quatrième ordre ayant une ligne double du second ordre et des surfaces de quatrième classe, corrélatives des précédentes, qui sont doublement inscrites dans un cône du second ordre, sont actuellement bien connues. L'étude des variétés de ces surfaces peut néanmoins offrir quelque intérêt à l'égard de leurs propriétés métriques; la surface qui fait l'objet de cette Note peut être considérée comme une des corrélatives de l'anallagmatique du quatrième ordre à centre ou comme une transformée homographique de la surface parallèle à l'ellipsoïde : on peut construire ses lignes de courbure, et sa définition géométrique très simple la rattache étroitement aux surfaces du second ordre; on peut la définir ainsi qu'il suit :

2. Soient S et s deux surfaces homofocales du second ordre, et P un de leurs plans principaux communs; par une droite D prise arbitrairement dans le plan P, menons un plan touchant la surface S au point M, et un plan touchant la surface S au point m. D'après un théorème connu, dû à M. Chasles, la droite Mm est perpendiculaire à D : on peut donc par D mener un plan perpendiculaire à Mm; appelons μ le point d'intersection de ces deux plans.

Lorsque D se déplace dans le plan P, le point μ décrit une surface Σ, et c'est cette surface dont je veux étudier les propriétés; je dirai, pour simplifier le langage, qu'à la droite D du plan P

correspondent respectivement les points M, m et μ des surfaces S, s et Σ; en sorte qu'à chaque droite du plan correspondent deux points sur chacune des surfaces du second ordre, et quatre points sur la surface Σ.

3. En premier lieu, j'établirai la proposition suivante :

En un point quelconque μ *de la surface* Σ, *la normale à la surface est la droite* μmM *qui joint les points correspondants sur les surfaces du second ordre homofocales.*

A cet effet, considérons un point quelconque A situé sur la droite D, correspondant au point μ; le cône Θ, ayant pour sommet le point A et circonscrit à la surface Σ, touchera cette dernière au point μ, et, si l'on remarque que M$m\mu$ est dans l'espace perpendiculaire au plan μD, on pourra définir ainsi qu'il suit le cône Θ, ou plutôt la courbe sphérique Θ' suivant laquelle ce cône est coupé par une sphère Q ayant pour centre le point A.

D'après un théorème connu, les traces sur la sphère Q des cônes circonscrits à S et s, et ayant pour sommet le point A, sont deux coniques sphériques homofocales S′ et s'; le plan principal P coupe cette sphère suivant un arc sphérique P′ commun à S′ et à s'. Par un point quelconque d' de P′, menons un arc de grand cercle touchant S′ en M′, et un arc de grand cercle touchant S′ en m'; puis, par d', menons un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc de grand cercle qui joint M′ et m'. En appelant μ' leur point d'intersection, on voit que, quand d' se déplacera sur P′, μ' décrira la courbe de contour apparent Θ'.

Si la proposition que je veux démontrer est vraie, la tangente menée à Θ' au point μ' sera l'arc de grand cercle $\mu' d'$; et réciproquement cette proposition sera démontrée si la tangente sphérique au contour apparent est déterminée comme je viens de l'indiquer, quand l'œil est placé en un point quelconque de D, ou encore comme un plan est déterminé par deux des droites qu'il contient quand l'œil est placé en deux points distincts de D. Or, comme je vais le faire voir, cette construction de la tangente sphérique est facile à vérifier quand l'œil est placé en un des deux points où la droite D rencontre S.

4. Soit H un de ces deux points : la surface S est vue de ce

point, suivant une ellipse sphérique S', et la surface s suivant les deux foyers f et φ de cette ellipse située sur l'arc de grand cercle perpendiculaire à P'.

Il s'agit donc de vérifier le théorème suivant :

Si d'un point d' de l'axe P' *d'une ellipse sphérique* S' *on mène un arc de grand cercle touchant cette ellipse en* M', *et si par d' on mène un arc de grand cercle perpendiculaire à f*M', *f désignant l'un des deux foyers de f et φ de* S' *situés sur un arc de grand cercle perpendiculaire à* P', *leur point d'intersection μ décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle $\mu d'$; ou, en d'autres termes, le lieu du point μ est un cercle ayant pour centre le point f.*

Ce théorème s'établit facilement dans le cas plus général où le point d', au lieu de décrire l'axe $f\varphi$, décrit un arc de grand cercle quelconque perpendiculaire à P'.

A cet effet, je ferai remarquer qu'il est évident lorsqu'on remplace l'ellipse sphérique par une ellipse plane et que le point M' se meut parallèlement à l'un des axes; cela résulte immédiatement de ce qu'une conique plane et un cercle ayant pour centre l'un de ses foyers sont deux courbes homologiques; si maintenant on projette cette conique et les axes sur une sphère ayant pour centre un point de la droite menée par le foyer, perpendiculairement au plan de la conique, on obtient le lemme sur lequel je viens de m'appuyer.

La construction de la normale à la surface Σ, que j'ai donnée ci-dessus, est donc entièrement démontrée.

5. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles. En premier lieu, on voit que les courbes sphériques de contour apparent de la surface Σ, quand l'œil est placé en un point de P, sont susceptibles d'une définition entièrement analogue à celle de la surface Σ, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant données deux ellipses sphériques homofocales, si, par un point quelconque D, *on mène des arcs de grand cercle tangents aux deux ellipses, et si l'on projette orthogonalement le point* D *sur l'arc de grand cercle qui joint le point de con-*

tact des tangentes avec les ellipses, le pied μ *de l'arc projetant décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle* μD.

Il est à peine utile d'indiquer qu'un théorème analogue a lieu pour les coniques homofocales planes.

6. Les surfaces S et s sont respectivement coupées par le plan P, suivant des ellipses E et e qui sont des coniques doubles de Σ.

Des résultats précédents (n° 4) il résulte immédiatement que :

Le cône circonscrit à la surface Σ *et ayant pour sommet un point* H *de la conique* E *se compose de deux cônes de révolution coupant le plan* P *suivant les tangentes que l'on peut mener du point* H *à la conique* e, *et ayant pour axes les génératrices de* S *qui se croisent au même point.*

Ces quatre cônes ont en commun quatre plans tangents; deux d'entre eux se coupent suivant la tangente menée au point H à la conique E : ce sont les plans tangents à la surface en ce point; les deux autres, qui sont doublement tangents à Σ, se coupent suivant une perpendiculaire au plan P.

Il est facile de déterminer le degré de leur enveloppe. La surface Σ est de quatrième classe; en effet, le plan P ne touche évidemment pas la surface et à une droite quelconque de ce plan correspondent quatre points de la surface, et par conséquent quatre plans tangents.

Par suite, le cylindre doublement circonscrit dont je viens de parler est du second ordre, et il est facile de voir que sa trace sur le plan P est une conique homofocale à E et e.

D'où cette proposition :

La surface corrélative de la surface Σ *est une surface du quatrième ordre ayant une conique double.*

De là se déduiraient facilement diverses conséquences relatives aux coniques doubles de Σ et aux cônes du second degré qui lui sont circonscrits, mais je crois inutile de m'étendre à ce sujet.

7. D'après ce qui précède, on voit que toutes les droites telles que Mm sont normales à une même surface. Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant, que j'ai donné, il y a déjà quelques années ([1]) :

Étant données deux surfaces du second degré homofocales, si, par une droite D *située dans un plan fixe* P, *on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces en* M *et en* m, *toutes les cordes telles que* Mm *sont normales à une série de surfaces.*

Dans le cas général, cette série de surfaces comprend une surface anallagmatique du quatrième ordre; mais, comme je l'ai fait remarquer dans un des Mémoires cités ci-dessus, lorsque le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces du second ordre, cette anallagmatique disparaît et est rejetée entièrement à l'infini.

Il importait, dans ce cas, de définir géométriquement et d'une façon simple une surface particulière coupant orthogonalement le système des rayons; d'après ce qui précède, on voit que la surface Σ précédemment définie donne la solution de la question. Cette surface se comporte relativement aux anallagmatiques du quatrième ordre comme l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement relativement au cercle. Dans le cas général, on sait, comme je l'ai montré, déterminer les groupes de rayons qui forment des surfaces développables; il en résulte que l'on saura déterminer les lignes de courbure de Σ; mais, bien que cette détermination soit comprise comme cas particulier dans les propositions que j'ai données antérieurement sur ce sujet, je crois cependant utile de la faire directement.

8. *Étant donnée une conique quelconque* K *passant par les points d'intersection des coniques* E *et* e, *si la droite* D *se déplace tangentiellement à* K, *le point* μ *correspondant décrit une ligne de courbure de* Σ.

([1]) *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique,* 1868). — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1872).

Démonstration. — Soient D une tangente quelconque à K touchant cette courbe au point A; M, m et μ les points qui correspondent respectivement à D sur les surfaces S, s et Σ. Si la droite D, par un déplacement infiniment petit, tourne autour du point A, les points M, m et μ viennent respectivement en M′, m' et μ'. Les plans polaires de A relativement aux surfaces S et s étant perpendiculaires à P, on voit que les droites MM′ et mm' se projettent sur ce plan suivant les polaires de A relativement aux coniques E et e; d'où il suit, puisque les coniques E, e et K ont quatre points communs, que ces projections se coupent sur la tangente en A à la conique K; en d'autres termes, les droites MM′ et mm' se coupent dans l'espace, les normales en μ et μ' sont donc dans un même plan et $\mu\mu'$ est tangente à une des lignes de courbure qui se croisent au point μ.

Corollaire. — *Étant donné le plan tangent à la surface* Σ *au point* μ, *si l'on désigne par* D *la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan* P *et par* A *et* B *les points où la droite* D *touche les deux coniques du faisceau* (E, e) *qui lui sont tangentes, les droites* μA *et* μB *sont les directions des axes de l'indicatrice au point* μ.

Connaissant, comme je l'ai montré plus haut, huit cônes de révolution circonscrits à la surface et la touchant au point μ, on pourrait construire sans peine les grandeurs de ces axes; mais les constructions que l'on déduit immédiatement de cette considération ne me paraissent pas assez simples pour être rapportées ici.

9. Examinons, dans quelques cas particuliers remarquables, ce que devient la surface Σ.

Si la surface s se réduit à la focale de S située dans le plan P, Σ se confond avec S, et l'on retrouverait ainsi, si on le voulait, les lignes de courbure de cette dernière surface.

Si s se réduit à une focale de S située dans un plan perpendiculaire à P, Σ est une *cyclide de Dupin*. Supposons enfin que les surfaces S et s se confondent; soient M un point quelconque de S et MQ la perpendiculaire abaissée de ce point sur P, il est facile de voir que la droite Mm est alors la symétrique de MQ relativement au plan tangent mené en M à la surface S; en d'autres

termes, Mm provient de la réflexion du rayon MP sur cette surface, et l'on voit, conformément au théorème de Dupin, que tous les rayons réfléchis sont normaux à Σ. De la construction donnée par le point μ on déduit d'ailleurs que $M\mu = MP$; la surface Σ est donc, dans ce cas, une *anticaustique par réflexion de la surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un de ses axes*.

10. De la construction que j'ai donnée des lignes de courbure de Σ on déduit facilement que les développables, lieu des normales le long d'une de ces lignes de courbure, coupent les surfaces du second ordre S et s suivant un système de lignes conjuguées : je veux dire qu'en chaque point de l'une de ces surfaces les tangentes aux courbes du système qui s'y croisent forment un système de droites conjuguées relativement à l'indicatrice en ce point.

De là diverses conséquences intéressantes découlant immédiatement de cette proposition due à M. Ribaucour : « Si les développables lieu des normales à une surface découpent un réseau conjugué sur une surface du second ordre S, elles y découpent un second réseau également conjugué; elles tracent deux réseaux conjugués sur chacune des surfaces homofocales à S. Chacune des développables est elle-même circonscrite à une surface du second ordre homofocale à S (1) ».

11. Il est facile de démontrer que la surface Σ la plus générale est *une anticaustique par réfraction d'une surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un des axes de cette surface*.

A cet effet, par une droite D du plan P menons un plan touchant la surface S en M et les deux plans tangents à s; en appelant m et m' les points de contact de ces derniers plans, si l'on mène par D des plans respectivement perpendiculaires à Mm et à Mm', ils couperont ces droites en deux points μ et μ' situés sur la surface Σ, et que je désignerai sous le nom de *points associés* de cette surface relativement à S. D'une proposition que j'ai donnée

(1) *Notice sur les travaux mathématiques de M. Ribaucour*, 1873.

antérieurement (¹) il résulte que les droites $M\mu$ et $M\mu'$ sont également inclinées sur le plan MD, et que, par suite, les longueurs $M\mu$ et $M\mu'$ sont égales.

Imaginons maintenant la sphère ayant pour centre le point M et pour rayon $M\mu$; cette sphère, d'après les propositions précédentes, touche la surface Σ aux points μ et μ'; les plans tangents menés à Σ en ces points se coupent d'ailleurs sur le plan P suivant la droite D qui est située dans le plan mené en M tangentiellement à S. On en conclut immédiatement que le rayon de la sphère varie proportionnellement à la distance de son centre au plan P. La surface Σ, qui est l'enveloppe de cette sphère, est donc, pour un indice de réfraction convenablement déterminé, une anticaustique de S, les rayons incidents étant perpendiculaires au plan P.

12. Une partie des résultats précédents peut facilement être généralisée. En se reportant, en effet, à la proposition que j'ai rappelée ci-dessus (nº 7), on voit que l'anallagmatique, trajectoire orthogonale du système de rayons qu'elle définit, est rejetée à l'infini, non seulement quand le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces homofocales, mais encore dès qu'il passe par leur centre; les surfaces trajectoires de ces rayons doivent donc être considérées comme des surfaces parallèles à une anallagmatique rejetée à l'infini.

Pour étudier directement ces surfaces, considérons d'abord une anallagmatique Σ_0 déterminée par une surface du second ordre S et une sphère Θ d'un rayon donné arbitrairement; étant donné un point quelconque M sur la surface S, en désignant par D la distance de M à la sphère (distance comptée sur une tangente) et par δ la distance constante du centre de la sphère à un plan quelconque P passant par le centre de S, si l'on considère une sphère ayant pour

---

(¹) *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique,* 18 janvier 1868).

Étant données deux surfaces homofocales A *et* B *et une droite* D, *menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces, et soient b et b' les points de contact relatifs à la surface* B, *à l'un des points de contact relatif à la surface* A; *les droites ab, ab' sont dans un même plan avec la normale au point a et également inclinées sur cette normale.*



centre le point M et pour rayon la longueur $(D - \delta)$, l'enveloppe de ces sphères est une surface parallèle à l'anallagmatique Σ_0.

Si maintenant on imagine que le centre de la sphère Θ s'éloigne indéfiniment suivant une direction perpendiculaire au plan P, son rayon conservant toujours du reste une valeur finie, l'anallagmatique Σ_0 est alors rejetée à l'infini : la longueur $(D - \delta)$ devient la distance du point M au plan P et la surface Σ parallèle à Σ_0 une anticaustique par réflexion de S, les rayons incidents étant perpendiculaires à P.

Pour déterminer les lignes de courbure de cette anticaustique, je rappellerai les propositions suivantes, que j'ai données dans ma Note *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* déjà citée.

Étant donnée une surface anallagmatique Σ_0 *définie au moyen d'une surface de second ordre* S *et d'une sphère directrice* Θ, *imaginons la surface développable qui leur est circonscrite : elle a pour lignes doubles quatre coniques planes;* H *désignant l'une quelconque de ces coniques et* Q *son plan,* H *est situé sur une surface du second ordre* s *homofocale à* S. *Si par une droite* D, *prise arbitrairement dans le plan* Q, *on mène un plan tangent à* S *et un plan tangent à* s, *la droite qui joint les points de contact est normale à* Σ_0.

Imaginons une quelconque des coniques passant par les quatre points communs au plan Q *et aux surfaces* S *et* s; *lorsque la droite* D *roulera sur cette conique, les normales à* Σ_0 *correspondantes formeront une surface développable et traceront une ligne de courbure sur cette surface et sur toutes celles qui lui sont parallèles.*

13. Appliquons cette proposition au cas où la sphère Θ s'éloigne à l'infini dans une direction Π perpendiculaire au plan P, son rayon demeurant fini. La surface développable circonscrite se réduit alors sensiblement à deux cylindres infiniment peu différents l'un de l'autre et dont les génératrices sont sensiblement parallèles à Π. Une seule de ses lignes doubles est à distance finie : c'est une conique différant infiniment peu de la section de la surface S par le plan conjugué à la direction Π; la surface homofo-

cale qui la renferme diffère elle-même infiniment peu de S; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Considérons des rayons lumineux parallèles à une direction Π *et venant se réfléchir sur une surface de second ordre* S; *soit* Ω *la courbe de contact de cette surface avec la développable* (¹) *isotrope qui lui est circonscrite. Le plan conjugué à la direction* Π *rencontre* Ω *en quatre points; considérons l'une quelconque des coniques qui passe par ces quatre points; sa polaire, relativement à* S, *est un cylindre du second ordre coupant* S *suivant une biquadratique. Les rayons réfléchis le long de cette biquadratique forment une surface développable, et par conséquent déterminent sur l'anticaustique une ligne de courbure.*

14. Les mêmes considérations s'appliquent au cas de la réfraction, en supposant que la sphère Θ, en s'éloignant à l'infini, demeure toujours inscrite dans un cône de révolution donné.

On obtient ainsi le théorème suivant :

Étant données deux surfaces homofocales du second ordre S *et* s *et un plan fixe* P *passant par leur centre commun, si, par une droite* D *prise arbitrairement dans le plan* P, *on mène un plan tangent à* S *et un plan tangent à* s, *la droite qui joint les points de contact engendre, lorsque* D *se déplace, un système de rayons.*

Tous ces rayons peuvent être considérés comme provenant de rayons incidents parallèles et se réfractant sur S *avec un indice de réfraction convenablement choisi; ils peuvent être également considérés comme provenant des rayons incidents parallèles et se réfractant sur* s, *la direction de ces seconds rayons et leur indice de réfraction étant généralement différents de la première direction et du premier indice de réfraction.*

Ces rayons sont normaux à deux anticaustiques par réfrac-

(¹) J'appelle ainsi la développable dans laquelle sont inscrites toutes les surfaces homofocales à S.



tion, la première relative à la surface S *et la deuxième à la surface* s, *et l'on peut déterminer les lignes de courbure de ces anticaustiques.*

Je ne sais si l'on avait remarqué les rapports étroits qui relient entre elles la théorie des anticaustiques des surfaces du second ordre et la théorie des surfaces homofocales, non plus que la détermination simple qui en résulte de leurs lignes de courbure.

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES

DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Annales de Mathématiques, 1876.

En désignant, en un point d'une ellipse, par ρ le rayon de courbure de cette ellipse, et par $\frac{d\rho}{ds}$ la dérivée de ce rayon par rapport à l'arc, Maclaurin a montré comment la valeur de cette dérivée pouvait se déduire de l'angle que fait la normale à l'ellipse au point considéré avec le diamètre qui passe en ce point. On peut, si l'on veut, énoncer de la façon suivante le théorème de Maclaurin :

En un point M *d'une ellipse, portons sur la tangente une longueur égale à* $\frac{1}{\rho}$ *et sur la normale une longueur égale à* $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$, *la résultante de ces deux longueurs, composées comme des forces, est perpendiculaire au diamètre* OM.

Les lignes géodésiques des surfaces du second ordre jouissent d'une propriété semblable :

Si, en un point M *d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, nous portons sur la tangente* MT *à cette courbe une longueur égale à* $\frac{1}{\rho}$, *sur la normale principale une longueur égale à* $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$, *et sur la normale au plan osculateur une longueur égale à* $\frac{1}{r}$ (r désignant le rayon de torsion au point considéré), *la résultante de ces trois longueurs composées comme des forces est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la direction* MT.

J'ai considéré ici, pour simplifier l'énoncé, les composantes $\frac{1}{\rho}$, $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{r}$; mais il est plus convenable, dans d'autres applications, de considérer les composantes proportionnelles $\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}$ et $\frac{\sqrt[3]{\rho}}{r}$, ces composantes conservant d'ailleurs les directions que j'ai indiquées.

Pour abréger, appelons, si l'on veut, pour un instant, *axe de courbure* au point M la composante ainsi définie; on pourra énoncer la proposition suivante :

Si MT *et* M'T' *désignent deux droites quelconques touchant une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre aux points* M *et* M', *la projection de l'axe de courbure en* M *sur la tangente en* M' *est égale à la projection de l'axe de courbure en* M' *sur la tangente en* M.

Si MT et M'T' étaient tangentes à deux lignes géodésiques différentes, tracées sur une même surface du second ordre, le rapport des deux projections dont je viens de parler demeurerait constant lorsque les droites se déplaceraient tangentiellement aux lignes géodésiques; à quoi j'ajouterai que les projections sont encore égales si les deux lignes géodésiques sont tangentes à une même ligne de courbure.

SUR LES COURBES GAUCHES

ET

SUR LA VALEUR DE LA TORSION EN UN POINT D'UNE LIGNE GÉODÉSIQUE

TRACÉE SUR UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1875-1876.

1. Considérons une courbe gauche quelconque rapportée à trois axes rectangulaires et dont les équations soient $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, X, Y et Z étant trois fonctions données d'une même variable indépendante t. En chaque point m de cette ligne, menons une droite $m\mu$ normale à cette courbe et dont la longueur, ainsi que la direction, soient fixées à chaque instant par la valeur de la variable t correspondant au point m. Projetons ensuite sur la corde mm' les segments normaux $m\mu$ et $m'\mu$ menés respectivement par les extrémités de cette corde; je me propose d'abord d'évaluer la somme algébrique de ces projections.

En désignant par ω cette somme, par A, B, C les dérivées de X, Y, Z par rapport à t et par L, M, N les projections sur les axes du segment $m\mu$, on a évidemment

$$\begin{aligned} \text{MM}'.\omega &= \sum \left(dx + \frac{d^2 x}{1.2} + \frac{d^3 x}{1.2.3} \cdots \right) \left(2\text{L} + d\text{L} + \frac{d^2 \text{L}}{1.2} \cdots \right) \\ &= \sum \left(\text{A}\, dt + \frac{\text{A}' dt^2}{1.2} + \frac{\text{A}'' dt^3}{1.2.3} \cdots \right) \left(2\text{L} + d\text{L} + \frac{d^2 \text{L}}{1.2} \cdots \right). \end{aligned}$$

Je poserai, pour abréger,

$$(1) \qquad \text{MM}'.\omega = \text{P}_1 \frac{dt^2}{1.2} + \text{P}_2 \frac{dt^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\text{P}_n dt^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots,$$

le coefficient de dt étant nul dans ce développement, en vertu de

l'équation $\Sigma AL = 0$, qui exprime que le segment est normal à la courbe.

2. Des considérations très simples montrent immédiatement que chaque coefficient d'ordre pair P_{2n} s'exprime linéairement au moyen des coefficients d'ordre inférieur et de leurs dérivées; il s'annule donc en même temps que ces derniers; par suite, la formule (1) montre que ω ne peut être qu'un infiniment petit d'*ordre impair*.

P_1 et P_2 étant identiquement nuls, on voit que généralement la quantité ω sera du troisième ordre; si elle est d'un ordre supérieur, elle sera du cinquième ordre et l'équation suivante devra être satisfaite :

$$\Sigma A''L + 3\Sigma A'L' = 0. \tag{2}$$

Si elle est d'un ordre supérieur au cinquième, elle sera du septième, avec la condition suivante :

$$\Sigma A^{\text{IV}}L + 5\Sigma A'''L' + 10\Sigma A''L'' = 0. \tag{3}$$

Enfin, si elle est d'un ordre supérieur au septième, elle sera *identiquement nulle,* avec la condition

$$\Sigma A^{\text{VI}}L + 7\Sigma A^{\text{V}}L' + 21\Sigma A^{\text{IV}}L'' + 35\Sigma A'''L''' = 0, \tag{4}$$

et alors la courbe *pourra être placée sur une surface du second ordre*.

3. Si l'on se propose, étant donnée une courbe, de trouver un système de segments normaux ayant cette courbe pour base et tels que ω soit une quantité infiniment petite du septième ordre, on devra déterminer les segments par les équations (2) et (3).

Je les transformerai d'abord en définissant, en chaque point de la courbe, le segment normal par ses deux projections U et W sur la normale principale et sur la binormale en ce point. En désignant, suivant l'usage habituel, par ρ et par r le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe au point considéré, et en prenant l'arc s comme variable indépendante, les formules (2) et (3) se mettront facilement, au moyen des formules de M. Serret, sous la

forme suivante :

$$(2') \qquad U\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) + 3\,\frac{dU}{\rho}\,\frac{2}{r\rho}\,W\,ds = 0,$$

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} & 10\,d^2U\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) - 10\,\frac{d^2W\,ds}{r\rho} + 5\,dU\left[d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)ds^2\right] \\ & + 5\,dW\,ds\left[\frac{2}{r}\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\,d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ & + U\left[d^3\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{9}{\rho^2} - \frac{3}{r^2}\right)ds^2\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{12\,ds^2}{r\rho}\,d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ & + W\,ds\left[\frac{2}{r}\,d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\,d^2\left(\frac{1}{r}\right)\right. \\ & \qquad \left. + 7\,d\left(\frac{1}{r}\right)d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{6}{r\rho}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)ds^2\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

En éliminant W entre les deux équations précédentes, on obtiendra une équation linéaire et du troisième ordre pour déterminer U; on voit donc que, la courbe étant donnée, le problème que je m'étais proposé a une infinité de solutions, qui toutes peuvent se déduire de trois solutions indépendantes, conséquence à laquelle quelques propositions géométriques très simples conduiraient directement.

4. Laissant de côté ces considérations générales, ainsi que les conséquences qui en découlent relativement aux équations différentielles (entre r, ρ et s) qui définissent les courbes que l'on peut tracer sur une surface de second ordre, les biquadratiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité simple de surfaces du second ordre), et les cubiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité double de surfaces du second ordre), je vais rechercher quelles sont les courbes que l'on peut prendre comme base de segments normaux dirigés suivant *les normales principales de la courbe* et jouissant de la propriété que ω soit du septième ordre.

On devra, dans les équations précédentes, poser $W = 0$; l'équation $(2')$ s'intègre alors immédiatement et donne

$$U = \alpha\rho^{\frac{1}{3}},$$

α désignant une constante arbitraire. Portons cette valeur de U

dans l'équation (3'); il vient, toutes réductions faites,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &9\,d^3\left(\frac{1}{\rho}\right) - 45\,\rho\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{36}{\rho^2}\, ds^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ &\quad + 40\,\rho^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + 18\, ds^2 \left[\frac{6}{r\rho}\, d\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{4}{r^2}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est remarquable que cette équation puisse s'intégrer sans établir aucune relation entre ρ et r; si on l'intègre en effet en considérant $\frac{1}{r}$ comme la fonction inconnue (ce qui ne présente aucune difficulté), on trouve que la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, et l'on obtient l'intégrale suivante :

$$(6)\qquad 1\,\rho\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) = C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{4}{3}} - 3\,\rho\,\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds^2} + 4\,\rho^2\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)^2}{ds^2},$$

C désignant une constante arbitraire.

Telle est la relation qui doit exister entre la torsion et la courbure d'une courbe pour qu'elle jouisse de la propriété énoncée ci-dessus.

5. En particulier, on peut remarquer que, si une ligne géodésique est tracée sur une surface du second ordre quelconque, en portant en chaque point de la courbe sur la normale principale une longueur proportionnelle à $\sqrt[3]{\rho}$, les segments ainsi obtenus jouissent de la propriété que la somme algébrique des projections de deux d'entre eux, sur la corde qui joint leurs pieds, est identiquement nulle; la quantité que j'ai appelée ω étant nulle, on voit qu'en chaque point d'une telle ligne géodésique la torsion est donnée par la relation (6), la constante C ayant une valeur convenablement déterminée.

SUR LES LIGNES DE COURBURE

DES

SURFACES DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1876.

1. Soient A une surface du second ordre et K l'une quelconque de ses lignes de courbure. On peut faire passer par K une infinité de surfaces du second ordre; soit A′ l'une quelconque d'entre elles.

Cela posé :

La surface développable, circonscrite à A *et* A′, *touche* A *suivant une de ses lignes de courbure.*

En d'autres termes :

Étant donné un plan tangent quelconque à la surface A *qui la touche au point* M, *on peut, par* K, *mener deux autres surfaces du second ordre qui touchent le plan; si l'on désigne par* A *et* B *leurs points de contact, les droites* MA *et* MB *sont les tangentes aux lignes de courbure de* A *qui se croisent au point* M.

2. Les *surfaces quadricuspidales*, étudiées par M. de la Gournerie, jouissent de propriétés analogues à celles des surfaces du second ordre A′.

Si, par la biquadratique K, *on mène une quadricuspidale quelconque, la surface développable circonscrite à* A *et à la quadricuspidale touche* A *suivant une de ses lignes de courbure.*



SUR LE LIEU DES POINTS TELS, QUE LES TANGENTES MENÉES DE CES POINTS A DEUX COURBES PLANES SOIENT ÉGALES ENTRE ELLES.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1877.

1. Soient S et S′ deux courbes planes, m et m' deux points situés respectivement sur ces courbes et tels que, les tangentes menées en ces points se coupant en t, on ait $mt = m't$.

Pour déterminer le lieu du point t, je m'appuierai sur le lemme suivant, dont l'évidence est immédiate :

Si l'on fait la perspective stéréographique des courbes S *et* S′ *sur une sphère, en appelant* O *le centre de la projection,* Σ *et* Σ' *les courbes perspectives de* S *et de* S′, μ *et* μ' *les points correspondant à* m *et* m', *les tangentes menées en* μ *et* μ' *aux courbes* Σ *et* Σ' *se rencontrent en un point de l'espace* Θ *qui est situé sur le rayon* Ot.

La réciproque est évidemment vraie.

2. De ce lemme résulte immédiatement la construction suivante du lieu des points t.

Faisons, sur une sphère quelconque, la perspective stéréographique des courbes données S et S′ et imaginons les deux surfaces développables qui ont pour arêtes de rebroussement les deux courbes perspectives Σ et Σ'. Ces deux surfaces se coupent suivant une courbe gauche K; imaginons maintenant le cône ayant pour base K et pour sommet le centre O de la perspective : *ce cône coupera le plan de* S *et de* S′ *suivant le lieu cherché*.

3. Étant donnée une courbe plane S, on peut se proposer de déterminer une courbe T telle que deux des tangentes que l'on

peut mener de chacun des points de cette courbe à S soient égales entre elles.

Pour résoudre ce problème, faisons sur une sphère quelconque la projection stéréographique de S. La courbe perspective Σ est l'arête de rebroussement d'une surface développable; soit K la ligne nodale de cette surface.

Si l'on imagine le cône ayant pour base K et pour sommet le centre O de la perspective, *ce cône coupe le plan de* S *suivant la courbe* T.

SUR LES NORMALES

QUE L'ON PEUT MENER

D'UN POINT DONNÉ A UNE CONIQUE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1877

1. Je m'appuierai sur les deux propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'on considère trois des normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, la droite qui joint le point* M *au centre du cercle circonscrit aux trois pieds de ces normales a pour conjuguée harmonique, relativement à ces trois normales, la quatrième normale, que l'on peut mener du point* M *à la courbe.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par a, b, c, d les pieds des normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, et par* A, B, C, D *les centres des cercles circonscrits aux triangles bcd, cda, dab et abc, les droites menées respectivement par ces points parallèlement aux normales* Ma, Mb, Mc *et* Md *se coupent en un même point* μ.

Ce point est situé sur la droite qui joint le point M *au centre de la conique, de l'autre côté de ce centre et à une distance moitié moindre.*

En conservant les notations précédentes, on déduit du théorème I que la droite MA est l'une des deux droites qui constituent la polaire conique de Ma relativement aux droites Mb, Mc et Md.

Déterminons les directions des quatre normales par des paramètres qui soient les racines de l'équation du quatrième degré

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4;$$

en désignant par H et S le hessien et l'invariant quadratique de U, on obtiendra la proposition suivante :

Les directions des quatre droites MA, MB, MC, MD *sont déterminées par les racines de l'une des équations suivantes :*

$$\mathrm{H}+\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}=0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}-\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}=0,$$

2. Théorème III. — *Si l'on mène par le point* M *deux parallèles aux axes de la conique et si l'on joint ce point au centre de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété suivante : la conjuguée harmonique de l'une quelconque d'entre elles, relativement aux deux autres, se confond avec la conjuguée harmonique de la même droite relativement au faisceau des normales passant par le point* M.

Analytiquement, si $\frac{\xi}{\eta}$ est le paramètre définissant une quelconque des directions dont je viens de parler, les directions des deux autres sont déterminées par les racines de l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi^2(ax^2+2bxy+cy^2)+2\xi\eta(bx^2+2cxy+dy^2)\\ &\qquad+\eta^2(cx^2+2dxy+ey^2)\pm\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}(x\eta-y\xi)^2=0,\end{aligned}\right.$$

le radical étant pris avec un signe convenable.

3. Étant données quatre droites passant par un même point M, on peut se proposer de déterminer les coniques qui coupent orthogonalement ces quatre droites. Laissant de côté les cercles ayant pour centre le point M, on voit qu'il y a encore une infinité de solutions; le problème sera complètement déterminé, si l'on assujettit les coniques à passer par un point donné sur l'une des droites ou à toute autre condition analogue.

On trouve alors quatre solutions, et le problème peut se résoudre au moyen de la règle et du compas.

Si l'on veut, en effet, chercher le lieu des centres des coniques satisfaisant à la question, on voit qu'il se compose de droites dont les directions sont déterminées par les valeurs de $\frac{x}{y}$, pour les-



quelles les racines de l'équation (1) en (ξ, η) correspondent à deux directions rectangulaires. Si l'on représente par

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$$

l'équation correspondant aux directions parallèles aux asymptotes du cercle, les directions des droites, qui joignent M aux centres des coniques satisfaisant à la question, correspondront aux racines de l'équation

$$[(a\gamma - 2b\beta + c\alpha)x^2 + 2(b\gamma - 2c\beta + d\alpha)xy + (c\gamma - 2d\beta + e\alpha)y^2]^2 - \frac{S}{3}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)^2 = 0,$$

équation du quatrième degré, résoluble par l'extraction de simples racines carrées.

4. Géométriquement, le problème proposé peut se résoudre de la façon suivante : menons un cercle quelconque passant par M et coupant les normales données en a, b, c, d; appelons A, B, C, D les tangentes menées au cercle par ces points. On peut construire deux coniques tangentes à ces quatre droites, et telles qu'on puisse circonscrire à chacune d'elles un triangle ayant ses sommets sur la conique donnée. Soit K l'une de ces coniques; on la déterminera de la façon suivante : construisons les deux droites qui constituent la conique polaire de Oa par rapport au faisceau Ob, Oc, Od; choisissons arbitrairement l'une de ces droites, et soit α le point où elle coupe le cercle. Cela posé, la conique K sera déterminée par cinq tangentes, qui seront A, B, C, D et la droite αa.

Par le centre du cercle, nous pourrons mener deux tangentes à la conique ainsi définie. Soient p et q les points où l'une de ces tangentes coupe le cercle; construisons le troisième sommet r du triangle circonscrit à K, inscrit dans le cercle et ayant pour côté le segment pq. Ces constructions peuvent évidemment s'effectuer sans tracer la conique K.

Si alors, par le point r, on mène des parallèles aux droites rectangulaires Mp et Mq, on pourra construire une conique ayant pour axes ces parallèles et normale aux quatre droites.

On obtiendra ainsi, au moyen de la règle et du compas, les quatre solutions du problème.

Je ferai observer, en terminant, que les quatre droites, qui joignent au point M les points d'intersection du cercle et de K, contiennent les centres des cercles circonscrits aux divers triangles déterminés par les pieds des quatre normales.

SUR LES NORMALES

QUE L'ON PEUT MENER

D'UN POINT DONNÉ A UNE CONIQUE.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1877.

1. Je m'appuierai sur le beau théorème suivant, dû à M. Liouville [1] :

Si, aux quatre points d'intersection d'un cercle et d'une conique, on mène des normales à la conique, et si, par le centre du cercle, on mène une sécante quelconque, le centre harmonique du centre du cercle, par rapport aux quatre points où la sécante coupe les normales, est situé à l'infini.

Considérons maintenant [2] les quatre normales Ma, Mb, Mc et Md, que d'un point M on peut abaisser sur une conique donnée. Désignons par A le centre du cercle qui passe par les pieds b, c, d de trois de ces normales, déterminons le point M' symétrique du point M par rapport au centre O de la conique, et par ce point menons une parallèle Ma' à la normale Ma. Puisque OM' = OM, il est clair que a et a' sont deux points diamétralement opposés de la conique, et, d'après une élégante proposition due à Joachimsthal, on sait que les quatre points a', b, c, d sont situés sur un même cercle.

Par suite, d'après le théorème de M. Liouville, si l'on mène par

(1) *Mémoire sur quelques propositions générales de Géométrie et sur la théorie de l'élimination* (*Journal de Mathématiques*, t. VI, 1re série, p. 403).

(2) Le lecteur est prié de faire la figure.

le point A une sécante quelconque, le conjugué harmonique de A par rapport aux quatre points où la sécante coupe les droites $M'a'$, Mb, Mc, Md est situé à l'infini.

Considérons, en particulier, la sécante $A\mu$ parallèle à $M'a'$ et par conséquent à Ma, le point de rencontre avec $M'a'$ étant rejeté à l'infini, on en déduit immédiatement que Ma est la conjuguée harmonique de MA relativement au faisceau des normales Mb, Mc, Md.

Supposons maintenant que la sécante passe par le point M, on aura

$$\frac{1}{A\alpha} + \frac{3}{AM} = 0,$$

d'où il suit

$$\alpha A = \frac{AM}{3}.$$

Menons par le point A une parallèle à Ma, et soit μ le point où cette parallèle coupe le diamètre OM; le point μ décrira le segment MM' dans le rapport de 3 à 1. On voit donc qu'il est situé sur le prolongement du rayon MO et à une distance du centre égale à la moitié de ce rayon; ce point sera d'ailleurs le même, quelle que soit celle des quatre normales que l'on considère.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'on considère trois des normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, la droite qui joint le point* M *au centre du cercle circonscrit aux trois pieds de ces normales a pour conjuguée harmonique, relativement à ces trois normales, la quatrième normale que l'on peut mener du point* M *à la courbe.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par a, b, c, d les pieds des quatre normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, et par* A, B, C, D *les centres des cercles circonscrits aux triangles bcd, cda, dab et abc, les droites menées respectivement par ces points, parallèlement aux normales* Ma, Mb, Mc *et* Md, *se coupent en un même point* μ.

Ce point est situé sur la droite qui joint le point M *au centre de la conique, de l'autre côté de ce centre et à une distance moitié moindre.*

2. Il résulte de là que, si l'on considère l'une quelconque des normales Ma que l'on peut mener par le point M, la droite MA, qui joint ce point au centre du cercle circonscrit au triangle bcd, est l'*une* des deux droites qui constituent la polaire conique de Ma relativement au faisceau Mb, Mc, Md.

Par suite, si l'on détermine pour chacune des normales sa polaire conique par rapport aux trois autres, on obtiendra huit droites sur lesquelles se trouveront les quatre centres A, B, C et D des cercles circonscrits.

Soit

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dx^3 + ey^4 = 0$$

une équation du quatrième degré dont les racines déterminent les directions des quatre normales issues du point M, et α une racine de cette équation déterminant une des normales. Les directions des trois autres seront données par l'équation

$$\frac{U}{x - \alpha y} + ax^3 + (4b + a\alpha)x^2y + \ldots = 0,$$

et la polaire conique de la première normale, par rapport aux trois autres, par l'équation

$$\alpha[3ax^2 + 2(4b + a\alpha)xy + \ldots] + [(4b + a\alpha)x^2 + \ldots] = 0.$$

Pour obtenir l'équation déterminant les huit droites dont j'ai parlé plus haut, il faut éliminer α entre cette relation et la relation $U(\alpha, 1) = 0$; comme, d'ailleurs, le résultat doit être un covariant de U, nous n'avons besoin que de calculer le terme du degré plus élevé. Nous ferons donc $y = 0$, et il restera à éliminer α entre les équations $a\alpha + b = 0$ et $U(\alpha, 1) = 0$; le résultant, multiplié par x^8, devient

$$x^8(-3b^4 + 6cab^2 - 4da^2b + ea^3) = (ae - 4bd + 3c^2)a^2x^8 - 3(ac - b^2)x^8.$$

Si donc on désigne par H le hessien de U, et par S son invariant quadratique, l'équation qui détermine les huit droites est

$$SU^2 - 3H^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$H + \sqrt{\frac{S}{3}}\,U = 0 \quad \text{et} \quad H - \sqrt{\frac{S}{3}}\,U = 0.$$

Comme je le montrerai plus loin, le faisceau des quatre droites MA, MB, MC et MD est déterminé par l'une de ces équations.

3. Théorème III. — *Si l'on joint le point* M *au centre* O *de la conique, et si, par le même point, on mène des parallèles* MX *et* MY *aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété suivante :*

La conjuguée harmonique de chacune d'elles, par rapport au faisceau des normales issu du point M, *se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux deux autres droites.*

La vérification de ce théorème se fait très simplement en remarquant que, si l'on rapporte la conique à ses axes, l'équation qui donne les coefficients angulaires de normales issues du point (ξ, η) est

$$b^2\xi^2 m^4 - 2b^2\eta\xi m^3 + (b^2\eta^2 + a^2\xi^2 - c^4)m^2 - 2a^2\eta\xi m + a^2\eta^2 = 0.$$

4. Soit, comme précédemment, $U = 0$ l'équation qui détermine les directions des quatre normales issues du point M; pour abréger, je dirai simplement que c'est l'équation de ces normales, et je me servirai d'une expression semblable pour les autres systèmes de droites que j'aurai à considérer. Soit, de plus,

$$u = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

l'équation de deux quelconques des trois droites MO, MX et MY. Le théorème précédent montre qu'un certain invariant des formes u et U doit être nul; pour calculer cet invariant, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en posant $\alpha = \gamma = 0$, et les deux droites auront simplement pour équation $xy = 0$; soit, de plus, $x\eta - y\xi = 0$ l'équation de la troisième droite.

Les conjuguées harmoniques de $x = 0$, relativement à $U = 0$ et $y(x\eta - y\xi) = 0$, sont respectivement

$$dx + ey \quad \text{et} \quad x\eta - 2y\xi;$$

d'après le théorème précédent, on a donc

$$2d\xi + e\eta = 0.$$

De même, les conjuguées harmoniques de $y = 0$, relativement à



$U = 0$ et $x(x\eta - y\xi) = 0$, sont respectivement

$$ax + by \quad \text{et} \quad 2x\eta - y\xi;$$

on a donc également

$$a\xi + 2b\eta = 0.$$

Éliminant ξ et η entre les relations précédentes, il vient

$$ae - 4bd = 0.$$

Écrivons maintenant la relation suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} 16(\alpha\gamma - \beta^2)^2(ae - 4bd + 3c^2) \\ \quad - 3(a\gamma^2 + 4c\beta^2 + e\alpha^2 - 4b\beta\gamma + 2c\gamma\alpha - 4d\alpha\beta)^2 = 0, \end{cases}$$

où, comme on le voit, le premier membre ne renferme que des invariants de U et de u ([1]). D'ailleurs, quand on y fait $\alpha = \gamma = 0$, cette relation se réduit à la relation $ae - 4bd = 0$, que nous venons de trouver. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne respectivement par $u = 0$ *et* $U = 0$ *les équations des quatre normales issues du point* M *et de deux quelconques des droites* OM, OX *et* OY, *les invariants des formes* u *et* U *sont reliés par la relation* (1).

5. Désignons par $\frac{\xi}{\eta}$ et $\frac{x}{y}$ les paramètres qui fixent les directions de deux quelconques des droites OM, OX et OY; on pourra poser évidemment

$$\frac{\alpha}{y\eta} = \frac{-2\beta}{y\xi + x\eta} = \frac{\gamma}{x\xi},$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra la relation suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} \xi^2(ax^2 + 2bxy + cy^2) + 2\xi\eta(bx^2 + 2cxy + dy^2) \\ \quad + \eta^2(cx^2 + 2dxy + ey^2) \pm \sqrt{\frac{S}{3}}(x\eta - y\xi)^2 = 0. \end{cases}$$

Cette équation déterminera, quand on se donnera la direction $\frac{\xi}{\eta}$ de l'une des trois droites, les directions des deux autres.

([1]) *Voir* SALMON, *Higher Algebra*, 3e édition, p. 200.

6. Je me proposerai maintenant le problème suivant :

Déterminer les coniques qui coupent orthogonalement quatre droites données passant par un même point M.

Je ferai abstraction des cercles ayant pour centre le point M et qui satisfont évidemment au problème; il y a encore une infinité de solutions, et l'on pourra préciser la question en assujettissant, par exemple, les coniques à passer par un point fixe pris sur l'une des droites.

Je désignerai, comme ci-dessus, par $U = 0$ l'équation des quatre droites données. Cela posé, pour déterminer les droites qui joignent le point M aux centres des coniques qui sont des solutions du problème, il suffira d'exprimer que les racines de l'équation (2) en (ξ, η) correspondent à deux directions rectangulaires.

Soit

$$u = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$$

l'équation des deux droites isotropes passant par le point M. En posant, pour abréger,

$$(c\alpha - 2b\beta + a\gamma)x^2 + 2(d\alpha - 2c\beta + b\gamma)xy + (e\alpha - 2d\beta + c\gamma)y^2 = \varpi,$$

on obtiendra l'équation suivante :

$$(3) \qquad \varpi \pm \sqrt{\frac{S}{3}}\, u = 0.$$

Le lieu des centres des coniques cherchées se compose donc de quatre droites que l'on peut déterminer par l'extraction de simples racines carrées.

L'une de ces droites étant déterminée, on prendra arbitrairement un de ses points que l'on regardera comme le centre d'une conique normale aux quatre droites données. L'équation (2) déterminera les directions des axes de cette conique, et il sera facile de trouver la longueur de ses axes.

7. Comme je l'ai montré (nº 2), les quatre droites, qui joignent le point M aux centres A, B, C et D des cercles qui sont circonscrits aux triangles que l'on peut former avec les pieds des nor-



males, sont déterminées par quatre des racines de l'équation

$$\left(\mathrm{H}+\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}\right)\left(\mathrm{H}-\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}\right)=0.$$

De ce que je viens de dire plus haut il résulte que, le polynome U étant donné, on peut, en extrayant de simples racines carrées, déterminer toutes les coniques normales aux quatre droites, et par suite déterminer le faisceau MA, MB, MC et MD. Ce faisceau doit par suite, comme je l'avais énoncé, avoir pour équation

$$\mathrm{H}+\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}=0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}-\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\,\mathrm{U}=0;$$

autrement ces deux équations seraient résolubles par l'adjonction de simples racines carrées, ce que l'on sait généralement être impossible.

8. *Étant données quatre droites passant par un même point et déterminées par l'équation $u=0$, il est clair qu'il existe une infinité de systèmes de trois droites jouissant de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles relativement aux deux autres se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux quatre droites données.*

En désignant par $\frac{\xi}{\eta}$ le paramètre d'une droite arbitrairement choisie, les racines de l'équation (2) détermineront deux autres droites, formant avec la première un système jouissant de la propriété énoncée.

Coupons les quatre droites données par une conique K passant par leur point de rencontre et choisie du reste arbitrairement; soient α, β, γ et δ les points où ces droites rencontrent la conique; un quelconque des systèmes de trois droites, jouissant de la propriété énoncée, rencontrera la conique en trois points p, q et r; ces trois points formeront les sommets d'un triangle inscrit dans K, et il est clair que ce triangle sera déterminé dès que l'on connaîtra un de ses sommets. On en conclut immédiatement que tous ces triangles enveloppent une conique K'.

Considérons les quatre tangentes communes que l'on peut mener à K et à K' et le point où l'une de ces tangentes touche K ; si l'on

prend ce point comme sommet d'un triangle inscrit dans K et circonscrit à K′, on voit facilement que deux des sommets de ce dernier triangle seront confondus au point de contact.

Or en faisant, dans l'équation (2), $x = \xi$ et $y = \eta$, on obtient l'équation $u = 0$; donc les tangentes menées aux points α, β, γ et δ à la conique K sont tangentes à K′.

Tous les triangles satisfaisant à la question s'obtiendront donc en construisant les deux coniques touchant les tangentes menées en α, β, γ et δ à K, et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K; on sait alors que l'on pourra en inscrire une infinité et tous ces triangles satisferont au problème proposé.

9. De là résulte la détermination suivante des coniques coupant orthogonalement quatre droites données passant par un même point M.

Par M faisons passer un cercle quelconque K rencontrant les droites données aux points α, β, γ et δ et menons en ces points les tangentes au cercle.

Nous pouvons déterminer deux coniques différentes tangentes à ces quatre droites et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K.

Soit K′ l'une de ces coniques; sans qu'il soit besoin de la tracer, on pourra la supposer déterminée, par exemple, par une cinquième tangente. Par le centre du cercle menons une tangente à K′; soient p et q les points où cette tangente coupe le cercle et construisons le troisième sommet r d'un triangle inscrit dans le cercle et circonscrit à K′.

Cela posé, *si par le point r on mène deux droites rX et rY parallèles à Mp et Mq, on pourra construire une conique ayant pour axes rX et rY et coupant orthogonalement les quatre droites issues du point* M.

On obtiendra ainsi, par la règle et le compas, les quatre solutions du problème.

NOTE A.

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE CONIQUE, CONNAISSANT SES AXES ET DEUX DROITES QUI LUI SONT NORMALES.

Soient OX et OY les axes de la conique; Ma et Mb les deux droites données; je me propose de déterminer les points α et β où les deux droites sont respectivement normales à la conique cherchée; il sera alors facile de la déterminer complètement.

Soit i le milieu du segment $\alpha\beta$: j'ai démontré que *la droite* Δ *menée par* i *perpendiculairement à* $\alpha\beta$ *passe par les milieux des segments interceptés sur les axes par les deux normales* Ma *et* Mb. Connaissant ces deux normales, on construira facilement la droite Δ et il suffira de déterminer sur cette droite un point i, tel que la perpendiculaire, menée en ce point à Δ, rencontrât les droites Ma et Mb en deux points équidistants du point i.

La construction à laquelle on est ainsi conduit serait souvent défectueuse dans la pratique; la suivante sera peut-être préférable.

La proposition que j'ai rappelée plus haut peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Étant données deux droites normales à une conique aux points α *et* β, *ces deux normales, la droite menée par le point milieu* i *de la corde* $\alpha\beta$ *et perpendiculairement à cette corde, la corde* $\alpha\beta$ *et les deux axes de la conique forment un ensemble de six droites tangentes à une même parabole, dont la directrice est la droite* Oi.

Pour obtenir le point i, il suffira donc, d'après une propriété bien connue, de construire le point de rencontre P des hauteurs du triangle formé par les deux normales données et l'un des axes; le point i sera alors déterminé par le point de rencontre de Δ et de la droite qui joint le point P au centre de la conique.

Le point i étant déterminé, en menant par ce point une perpendiculaire à Δ, on obtiendra les pieds des normales α et β.

Si l'on suppose que les normales Ma et Mb se confondent, on retrouve alors une élégante construction du centre de courbure d'une conique donnée par M. Mannheim.

NOTE B.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NORMALES AUX COURBES ET AUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

1. J'ai démontré plus haut la propriété suivante des normales que l'on peut mener d'un point à une conique.

Si l'on joint un point quelconque M *au centre d'une conique et si l'on mène par ce point des parallèles aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles, relativement aux deux autres, se confond avec la conjuguée harmonique relativement aux quatre normales que l'on peut mener du point* M *à la conique.*

Cette propriété étant évidemment projective, on en déduit immédiatement la proposition suivante :

Étant donnés un point M *et l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds a, b, a, d des quatre normales que l'on peut mener du point* M *à une conique, si l'on joint un point quelconque de l'hyperbole aux quatre points a, b, c et d, on obtient quatre droites normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.*

En particulier, les points a, b, c, d sont sur l'hyperbole, et, si l'on considère trois quelconques de ces points, en vertu d'un théorème bien connu, le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par ces trois points se trouve également sur cette courbe. D'où les conséquences suivantes :

Étant donnés sur une conique quatre points tels que les normales en ces points soient concourantes, si l'on joint un quelconque de ces points aux trois autres, les trois droites ainsi obtenues sont normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

Les trois hauteurs d'un quelconque des triangles, que l'on peut former avec trois de ces points, sont également normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

2. Considérons maintenant une surface du second ordre dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, soit

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1; \tag{1}$$

pour déterminer les pieds des normales à cette courbe qui passent par le point (α, β, γ) nous adjoindrons à l'équation (1) les équations

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a}} = \frac{y-\beta}{\frac{y}{b}} = \frac{z-\gamma}{\frac{z}{c}},$$

ou, en désignant par ξ une quantité indéterminée,

$$x = \frac{a\alpha}{a-\xi}, \qquad y = \frac{b\beta}{b-\xi}, \qquad z = \frac{c\gamma}{c-\xi};$$

en donnant à ξ toutes les valeurs possibles, les formules précédentes déterminent les divers points d'une cubique gauche K passant par les six pieds des normales, les paramètres de ces points étant d'ailleurs donnés par les racines de l'équation

$$\frac{a\alpha^2}{(\xi-a)^2} + \frac{b\beta^2}{(\xi-b)^2} + \frac{c\gamma^2}{(\xi-c)^2} = 1,$$

ou, sous forme entière et en introduisant pour l'homogénéité une quantité η égale à l'unité,

$$\begin{aligned} U = (\xi - a\eta)^2(\xi - b\eta)^2(\xi - c\eta)^2 - a\alpha^2\eta^2(\xi - b\eta)^2(\xi - c\eta)^2 \\ - b\beta^2\eta^2(\xi - c\eta)^2(\xi - a\eta)^2 - c\gamma^2\eta^2(\xi - a\eta)^2(\xi - b\eta)^2 = 0. \end{aligned}$$

Le centre de la surface et les trois points à l'infini sur les axes sont également situés sur K et leurs paramètres sont respectivement ∞, a, b et c : ce sont les racines de l'équation

$$W = \eta(\xi - a\eta)(\xi - b\eta)(\xi - c\eta) = 0.$$

Je vais établir maintenant que le conjugué harmonique de l'un quelconque des quatre points déterminés par l'équation $W = 0$, relativement aux trois autres, se confond avec son conjugué harmonique relativement aux six pieds des normales.

Considérons, par exemple, le point A dont le paramètre est a; en posant, pour abréger,

$$V = \eta(\xi - b\eta)(\xi - c\eta),$$

le conjugué harmonique de A relativement aux points (∞, b, c) sera déterminé par l'équation

$$\xi'\left(\frac{dV}{d\xi}\right)+\eta'\left(\frac{dV}{d\eta}\right)=0, \tag{2}$$

la lettre ξ ayant été remplacée par la lettre a dans les dérivées partielles.

D'autre part, le conjugué harmonique du point A relativement aux pieds des six normales, sera déterminé par l'équation

$$\xi'\left(\frac{dU}{d\xi}\right)+\eta'\left(\frac{dU}{d\eta}\right)=0,$$

où, dans les dérivées partielles, on doit également faire $\xi=a$. Il est clair, dans cette hypothèse, que l'on peut supprimer dans U tous les termes qui renferment $(\xi-a\eta)$ au carré et remplacer U par V^2; l'équation précédente devient alors

$$V\left[\xi'\left(\frac{dV}{d\xi}\right)+\eta'\left(\frac{dV}{d\eta}\right)\right]=0,$$

et, en la comparant à l'équation (2), on en déduit la proposition que je voulais démontrer.

3. Cette proposition peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Par un point M de l'espace menons des parallèles aux trois axes d'une surface du second ordre, puis joignons ce point au centre de la surface, nous obtiendrons ainsi quatre droites (D) : ces droites et les normales que du point M on peut mener à la surface, seront situées sur un même cône du second ordre.

Cela posé :

La conjuguée harmonique de l'une quelconque des droites (D), *relativement aux trois autres, se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux six normales.*

NOTE C.

SUR UN INVARIANT DE DEUX FORMES CUBIQUES QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE DES NORMALES A UNE CONIQUE.

1. En général, trois droites passant par un même point ne sont pas normales à une conique ayant pour axes deux droites données.



Soit

$$u = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$$

une équation du troisième degré déterminant les directions des axes et de la droite qui joint un point donné M au point d'intersection des axes ; soit de plus

$$u' = a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3 = 0$$

une équation déterminant les directions des trois droites passant par le point M. La condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites soient normales à une conique ayant pour axes les droites données est

$$\begin{aligned} \Delta = 2(ad' - 3bc' + 3cb' - da')^2 + 9[(ad - bc)(a'b' - b'c') \\ - 2(ac - b^2)(b'd' - c'^2) - 2(bd - c^2)(a'c' - b'^2)] = 0. \end{aligned}$$

2. L'invariant Δ des deux formes cubiques u et u', qui, on le remarquera, est un *combinant*, se présente dans plusieurs autres questions de Géométrie.

Soient, sur une conique, deux systèmes de trois points a, b, c et a', b', c', déterminés respectivement par les racines des équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° *Si l'on considère les sommets du triangle formé par les tangentes en* a', b', c' *à la conique donnée, la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois points et les points* a, b, c *soient sur une même conique est* $\Delta = 0$.

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse par les trois points* a, b, c *faire passer une conique, pour laquelle* a', b', c' *soit un triangle autopolaire, est encore* $\Delta = 0$.

3. Soient, sur une cubique gauche, deux systèmes de trois points a, b, c et a', b', c', déterminés respectivement par les racines de deux équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° *La condition nécessaire et suffisante pour que le plan des trois points* a', b', c' *rencontre, en trois points en ligne droite, les tangentes menées en* a, b *et* c *à la cubique, est* $\Delta = 0$.

2° *Si l'on a la relation* $\Delta = 0$, *les traces, sur un plan osculateur quelconque, des tangentes menées à la cubique*

en a, b et c et des côtés du triangle a', b', c', sont situées sur une même conique.

4. De l'expression de l'invariant Δ se déduit immédiatement la proposition suivante :

Étant données une cubique gauche K *et deux tangentes quelconques à cette cubique, ces droites et la courbe déterminent une surface du second ordre* S; *soit* D *l'intersection des plans osculateurs à* K *aux points de contact des deux tangentes.*

Si, par D, *on mène un plan sécant quelconque* P, *les tangentes à* K, *aux points où cette courbe rencontre le plan, déterminent une surface du second ordre circonscrite à* S *le long d'une conique située dans le plan* P.

SUR LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1877.

1. Lemme. — *Étant données une ellipse* E *et une parabole* P *tangente aux deux axes de cette ellipse, les normales menées à* E, *aux points de contact des tangentes communes à ces deux courbes, concourent en un même point.*

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que la polaire réciproque de P relativement à E est une hyperbole passant par le centre de cette conique, par les quatre points de contact et ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique.

2. Soit N une normale à l'ellipse E; si de chaque point de cette droite on mène les normales à E différentes de N, leurs pieds forment un triangle dont les côtés enveloppent une parabole P *tangente aux axes de* E.

En désignant par O le centre de la conique, par n le pied de la normale N et par n' le point diamétralement opposé à n, je ferai remarquer que le foyer de la parabole est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente au point n'; sa directrice est la symétrique de cette perpendiculaire relativement à l'un quelconque des axes. Il en résulte que les cercles circonscrits aux divers triangles dont j'ai parlé plus haut passent tous non seulement par le point n', comme on le sait par un théorème de Joachimsthal, mais encore par un autre point fixe situé sur la tangente en n'.

Cela posé, la normale N, qui est tangente à la développée de l'ellipse, rencontre de nouveau cette courbe en quatre autres points α, β, γ et δ. Considérons, par exemple, le point α, et appe-

lons a le point de l'ellipse dont le centre de courbure est en α; deux des normales menées du point α à E ont leurs pieds confondus en a; par suite, la tangente en a à l'ellipse est tangente à la parabole P, et, comme la même chose a lieu pour les points β, γ et δ, il résulte du lemme énoncé plus haut que les normales doubles abaissées des points α, β, γ et δ concourent en un même point.

En d'autres termes :

THÉORÈME I. — *Si l'on considère une tangente quelconque à la développée d'une ellipse et les quatre points où cette tangente coupe de nouveau la courbe, les tangentes menées en ces points concourent en un même point p.*

3. On peut encore dire que la polaire de chacune des tangentes à la développée se décompose en une conique et un point p.

En général, étant donnée une courbe quelconque de quatrième classe, si l'on représente par $U = 0$ l'équation du quatrième degré qui détermine les directions des tangentes issues du point (x, y, z), et par S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U, j'ai montré [*Sur les singularités des courbes de quatrième classe* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 265)] que les points singuliers de la courbe et les points qui, associés à des coniques, constituent les polaires de droites du plan, satisfaisaient aux trois conditions

$$2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \qquad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0, \qquad 2S\frac{dT}{dz} - 3T\frac{dS}{dz} = 0.$$

En général, le nombre des points satisfaisant à ces trois relations est limité et égal à 73; dans le cas de la développée de l'ellipse, comme l'a remarqué M. Clebsch [1], S est un carré parfait, et l'on peut poser $S = h^2$, h étant l'équation d'une conique ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée; on a aussi $T = h^3 + \varpi^2$, $\varpi = 0$ étant l'équation des trois tangentes doubles

---

[1] *Problem der Normalen für Curven und Flächen zweiter Ordnung* (*Crelle*, t. 62, p. 79).

de la courbe. Les relations précédentes deviennent alors

$$\varpi h\left(2h\frac{d\varpi}{dx}-3\varpi\frac{dh}{dx}\right)=\varpi h\left(2h\frac{d\varpi}{dy}-3\varpi\frac{dh}{dy}\right)$$
$$=\varpi h\left(2h\frac{d\varpi}{dz}-3\varpi\frac{dh}{dz}\right)=0,$$

et l'on voit qu'elles sont satisfaites pour tous les points des deux courbes $\varpi=0$ et $h=0$. La première équation donne les trois tangentes doubles qui correspondent à l'infinité de points singuliers que possède la développée considérée comme courbe de quatrième classe et du douzième ordre; la seconde donne le lieu des points p que j'ai considérés dans le théorème I.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Le lieu des points p est la conique ayant pour sommet les points de rebroussement de la développée.*

4. Le théorème I résulte aussi immédiatement de ce que S est un carré parfait. J'ai démontré, en effet [*Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* (*Journal de Mathématiques*, t. I, 3e série, p. 104)], la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de quatrième classe K, *une quelconque de ses tangentes est coupée par sa polaire en six points dont deux sont confondus au point de contact, les quatre autres points d'intersection décrivant, lorsque la tangente se déplace, la courbe du quatrième ordre dont l'équation est* $S=0$.

Si S est un carré parfait, les six points d'intersection de la droite avec sa polaire sont confondus deux à deux en trois points, d'où résulte la décomposition de cette polaire en une conique et un point p, et l'on peut remarquer que les tangentes menées du point p à cette conique rencontrent la tangente à la courbe de quatrième classe en deux points situés sur le lieu des points p.

D'autres conséquences intéressantes relativement à la développée de l'ellipse se déduiraient facilement de plusieurs propositions générales sur les courbes de quatrième classe que j'ai données dans les Mémoires cités plus haut.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE JOACHIMSTHAL.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1876.

1. Joachimsthal termine ainsi ([1]) une des Notes nombreuses et élégantes qu'il a publiées sur la théorie des normales à une conique :

Je vais indiquer une proposition qui est fondamentale dans cette théorie :

Théorème. — *Soient p, q, r trois points d'une conique, tels que les normales en ces points concourent en un même point. Si l'on tire, par un sommet* S *de la conique, trois parallèles à pq, qr, rp, le centre de gravité des trois points où ces parallèles rencontrent la courbe est situé sur l'axe qui contient le sommet* S.

La proposition précédente, ainsi que beaucoup d'autres dues au même géomètre, peuvent se déduire très simplement des considérations suivantes.

2. Étant donnés une conique K et deux points fixes A et B, dont le premier A soit sur la courbe, si l'on imagine les divers cercles qui passent par ces deux points, chacun d'eux rencontre la conique en trois points distincts du point A, et il est clair que le triangle déterminé par ces points enveloppe, lorsque le cercle varie, une parabole.

Réciproquement, *si divers triangles, inscrits dans une conique* K*, sont circonscrits à une parabole, les cercles qui leur sont circonscrits passent par deux points fixes, dont l'un est*

([1]) *Sur la construction des normales que l'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement trouvée* (*Journal de Crelle*, t. 48).

situé sur la conique et dont l'autre, situé en dehors de cette conique, est le foyer de la parabole.

On en déduit immédiatement que :

Si divers triangles, inscrits dans une conique K, *sont circonscrits à une parabole :*

1° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles sont situés sur une même droite ;*

2° *Les centres de gravité de ces triangles sont également situés sur une ligne droite.*

3. Soient M un point situé sur une conique K et MN la normale en ce point; si de chaque point m de la droite MN on mène des normales à la courbe, les pieds des normales distinctes de MN formeront un triangle dont les côtés enveloppent évidemment une parabole.

On en conclut que les cercles circonscrits à ces triangles passent par un point fixe de la courbe. Soient a, a' et b, b' les extrémités des axes de la conique, M' et M'' les symétriques du point M relativement à ces axes; si l'on abaisse les normales du point α où MN rencontre aa', les pieds des normales distincts de M sont a, a' et M'; de même, si l'on abaisse les normales du point p où MN coupe bb', les pieds des normales distincts de M sont b, b' et M''. Or il est évident que les cercles circonscrits aux deux triangles aa'M' et bb'M'' se coupent tous deux sur la courbe, au point μ symétrique de M par rapport au centre.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, en quatre points d'une conique p, q, r, s, les normales concourent en un même point, le cercle circonscrit aux trois points q, r, s passe par le point p' symétrique du point p par rapport au centre de la conique. (Joachimsthal).

On peut remarquer de plus que le centre de gravité du triangle aa'M' et le centre de gravité du triangle bb'M'' sont situés sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point M. Donc :

Si les normales menées en trois points p, q, r d'une conique concourent en un même point μ, le centre de gravité du triangle pqr se trouve sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe

par le pied de la quatrième normale que l'on peut abaisser du point μ.

4. Il est à remarquer que toutes les propriétés des normales à une même conique sont multiples. Si l'on considère, en effet, le triangle formé par les deux axes et la droite de l'infini, chacun des côtés de ce triangle joue le même rôle relativement aux normales. Cela résulte immédiatement de cette propriété très simple : *Si l'on effectue une transformation homographique de façon qu'aux foyers d'une conique correspondent les deux ombilics* (¹) *du plan, les normales à cette conique deviennent après la transformation les normales à la conique transformée.*

En particulier, si l'on prend pour point de départ la proposition de Joachimsthal énoncée plus haut et que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s tels, que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par p' le point diamétralement opposé à p, les droites rs et qp' sont également inclinées sur les axes,

on en déduira immédiatement la proposition suivante qui, sous une autre forme, a été donnée également par Joachimsthal :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s, tels que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par p' le symétrique du point p par rapport à l'un des axes, les droites rs et qp' rencontrent cet axe en deux points situés à égale distance du centre.

5. En conservant les notations précédentes (3), soit MN la normale menée en un point M d'une conique K. De chaque point m de cette droite on peut mener trois normales à la courbe distinctes

(¹) J'appelle ici *ombilics* les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles d'un plan ; j'appelle de même *ombilicale* la conique imaginaire située à l'infini et commune à toutes les sphères de l'espace.

Les propriétés des normales à une surface du second ordre sont également multiples ; si l'on effectue une transformation homographique, de telle sorte qu'à la focale d'une surface du second ordre corresponde l'ombilicale, les normales à la surface ont pour transformées les normales à la surface transformée.



de MN; soient a, b, c les pieds de ces normales. Par un sommet S de la conique, menons des droites parallèles à bc, ca, ab et soient respectivement α, β, γ les points où ces droites coupent la courbe. En remarquant qu'on ne peut mener à la parabole enveloppée par les côtés du triangle abc qu'une tangente parallèle à une direction donnée, on verra facilement que le point α détermine les points associés β et γ; par suite le triangle $\alpha\beta\gamma$ enveloppe une conique que l'on voit immédiatement être une parabole. Le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$ décrit par suite une ligne droite; en plaçant successivement le point m sur chacun des axes, on voit que, pour chacun des triangles correspondants, le centre de gravité est sur l'axe passant par le point S.

La proposition de Joachimsthal que j'ai énoncée au commencemenr de cette Note est donc démontrée.

SUR LES

COURBES UNICURSALES DE TROISIÈME CLASSE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1877.

1. Soient A, B et C trois points d'une conique K et un point P pris arbitrairement dans son plan. Par les quatre points A, B, C et P faisons passer une conique arbitraire H et soit Q le quatrième point où cette conique rencontre K.

Cela posé, étant pris un point M arbitrairement sur K, menons la droite MP et joignons au point Q le point I, où MP coupe une seconde fois la conique H. La droite IQ coupe K en un second point α; joignons-le au point M. La droite $M\alpha$ enveloppe, lorsque le point M se déplace sur la conique, une courbe qui est évidemment de la troisième classe. Si, en effet, on mène la droite MQ rencontrant la conique H au point G, puis la droite GP rencontrant la conique K aux points β et γ, on voit que $M\beta$ et $M\gamma$ sont encore des tangentes à la courbe cherchée. Il est clair, d'ailleurs, que l'on a ainsi toutes les tangentes passant par le point M; donc l'enveloppe est de troisième classe. En faisant coïncider successivement M avec chacun des points A, B, C, on reconnaît facilement que l'enveloppe touche en ces points la conique K, les troisièmes tangentes que de chacun d'eux on peut mener à la courbe se rencontrant au point P.

L'enveloppe fait donc partie du faisceau formé par les courbes de troisième classe touchant aux trois points A, B, C la conique K et tangentes aux droites AP, BP et CP; et il semble d'abord qu'en faisant varier la conique H on pourra engendrer de la façon que j'ai indiquée toutes les courbes du faisceau.

Pour se convaincre qu'il n'en est pas ainsi, il suffit de remarquer que l'une des tangentes issues du point M (celle que j'ai désignée

par $M\alpha$) se détermine individuellement et que d'ailleurs les points de la conique K se déterminent individuellement; l'enveloppe est donc la *courbe unicursale du faisceau*.

Les propriétés les plus simples des coniques montrent en effet que, le point M étant fixe, le point α est parfaitement déterminé, quelle que soit la conique que l'on fasse passer par les points A, B, C et P.

Par suite, dans la génération des tangentes à l'enveloppe, on pourra remplacer la conique H par un système de deux droites. Le point Q étant, par exemple, le point de rencontre AP avec K, on engendrera les diverses tangentes à la courbe de troisième classe en faisant décrire au point I la droite BC.

2. Quelques conséquences intéressantes résultent des considérations qui précèdent. En effet, des trois tangentes que du point M on peut mener à l'enveloppe, deux ($M\alpha$ et $M\beta$) rencontrent la conique K en deux points tels que la corde $\alpha\beta$ qui les joint passe par le point fixe P.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Si une courbe unicursale de troisième classe est tritangente à une conique K, *les trois tangentes que l'on peut mener à cette courbe par un point quelconque de la conique rencontrent de nouveau cette conique en trois points. Un des côtés du triangle formé par ces trois points passe par un point fixe.*

3. Supposons que la conique K soit un cercle ayant P pour centre; on voit alors que l'angle $\beta M\alpha$ est droit.

Donc :

Si un cercle est tritangent à une courbe de troisième classe unicursale et si les normales, menées au cercle en ces points, sont tangentes à la courbe, deux des tangentes que de chacun des points du cercle on peut mener à la courbe font entre elles un angle droit.

La réciproque est également vraie :

Étant donnée une courbe de troisième classe, si un cercle jouit de la propriété que deux tangentes, menées à la courbe

par chacun de ses points, soient à angle droit, la courbe est unicursale; le cercle touche la courbe en trois points et les normales menées au cercle en ces points sont tangentes à la courbe.

Pour le démontrer, je remarquerai d'abord que, étant pris un point quelconque M sur le cercle, comme deux des tangentes, menées à la courbe par ce point, sont liées par une relation particulière, la troisième tangente se détermine individuellement, donc la courbe est unicursale.

En second lieu, $M\alpha$ désignant la tangente qui passe par le point M et qui se détermine individuellement, il est clair que cette tangente, lorsque le point M se déplace, vient successivement coïncider avec chacune des tangentes à la courbe; autrement la courbe se décomposerait en une conique et un point.

De là résulte que, une tangente quelconque à la courbe de troisième classe rencontrant le cercle en deux points, des deux perpendiculaires menées en ces points à la tangente l'une au moins est tangente à la courbe.

Menons maintenant une tangente commune au cercle et à la courbe; cette tangente rencontrant le cercle en deux points confondus, d'après ce que je viens de dire, la normale au cercle sera tangente à la courbe. On ne peut, d'ailleurs, par le centre du cercle, mener que trois tangentes à cette courbe; donc les points de contact des tangentes communes se réduisent à trois.

Le cercle est donc tritangent à la courbe, et les normales au cercle, en ces points, lui sont également tangentes.

4. Les propositions précédentes se vérifient immédiatement sur les courbes unicursales de troisième classe les plus connues, telles que la *cardioïde* et l'*hypocycloïde à trois points de rebroussement*. On peut se proposer un problème analogue pour les courbes de quatrième classe :

Trouver toutes les courbes de quatrième classe par lesquelles le lieu des sommets des angles droits circonscrits se décompose en un cercle et une courbe résiduelle.

J'examinerai ce problème dans une prochaine communication.



SUR LA CARDIOÏDE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1878.

1. La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle de même rayon.

C'est une courbe de troisième classe et du quatrième degré ([1]), ayant, par conséquent, une tangente double et trois points de rebroussement; deux de ces points de rebroussement sont les ombilics du plan. Les trois foyers de la courbe se réduisent à un seul foyer F, qui est le point de rencontre des tangentes menées aux ombilics.

La cardioïde peut donc être définie comme une courbe de *troisième classe, ayant une tangente double et un foyer singulier de rebroussement.*

2. Dans tout ce qui suit, je m'appuierai principalement sur les deux propositions suivantes :

PROPOSITION I ([2]). — *Si, par un point quelconque du plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, et si l'on joint ce point aux trois foyers de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation; c'est-à-dire que la somme des angles que chacune des droites du premier faisceau fait avec une direction arbitraire est égale, à un multiple près de* π, *à la somme des angles que font, avec cette même direction, les droites du second faisceau.*

([1]) *Voir* SALMON, *Higher plane curves,* p. 270.

([2]) *Voir* ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes algébriques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* janvier 1865).

Proposition II [1]. — *Si, par un point quelconque* M *du plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, le centre harmonique des trois points de contact, relativement au point* M, *est le même que le centre harmonique des trois foyers relativement à ce même point. En d'autres termes, la polaire du point* M, *relativement au triangle formé par les normales menées à la courbe par les trois points de contact des tangentes, se confond avec la polaire du même point relativement au triangle formé par les droites menées par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui le joint au point* M.

3. Les foyers de la cardioïde se confondent tous les trois avec le foyer singulier F de cette courbe. On déduit donc immédiatement de la proposition I le théorème suivant :

Théorème I. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde, la somme des angles que font ces droites avec la droite* MF *est égale à un multiple de* π.

La cardioïde a un troisième point de rebroussement réel R, et, d'après un théorème très connu, la tangente en R passe par le point F. D'un point quelconque de la droite FR, on peut mener trois tangentes à la courbe, dont l'une se confond avec FR. Du théorème précédent il résulte que les deux autres tangentes sont également inclinées sur FR; donc :

La cardioïde est symétrique par rapport à l'axe FR.

4. La proposition II, appliquée à la cardioïde, donne de même le théorème suivant :

Théorème II. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde et les normales aux points de contact, le pied de la perpendiculaire, abaissée du point* M *sur sa polaire relativement au triangle formé par les normales, est le foyer de la courbe.*

---

[1] *Voir* ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique,* février 1867).

Ce que l'on peut encore exprimer sous la forme suivante, plus commode dans les applications :

Soient N, N′, N″ *les normales menées aux trois points de contact et* Φ *la droite menée par le point* F *perpendiculairement à* FM; *si, par le point* M, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement les droites* N, N′, N″ *et* Φ *aux points* n, n', n'' *et* φ, *on a, entre ces points, la relation*

$$\frac{3}{\mathrm{M}\varphi} = \frac{1}{\mathrm{M}n} + \frac{1}{\mathrm{M}n'} + \frac{1}{\mathrm{M}n''}.$$

5. Supposons, en particulier, que le point soit pris sur la droite FR; désignons par T ce point, par M le point de contact d'une des tangentes, distinctes de TF, que l'on peut mener à la courbe par le point T, enfin par N le point où la normale au point M rencontre l'axe FR. Il est clair que la normale menée par le troisième point de contact rencontrera également au point N l'axe de symétrie. En prenant donc pour sécante l'axe lui-même, l'équation précédente donnera la relation

$$(1)\qquad \frac{3}{\mathrm{TF}} = \frac{2}{\mathrm{TN}}\ \frac{1}{\mathrm{TR}},$$

qui lie entre eux les points de rencontre de l'axe avec la tangente et la normale menées en un point quelconque de la courbe.

6. Soient (*fig.* 1) une cardioïde ayant pour foyer F, pour axe FA, et Aα la tangente double de cette courbe, α étant le point de contact situé au-dessus de l'axe.

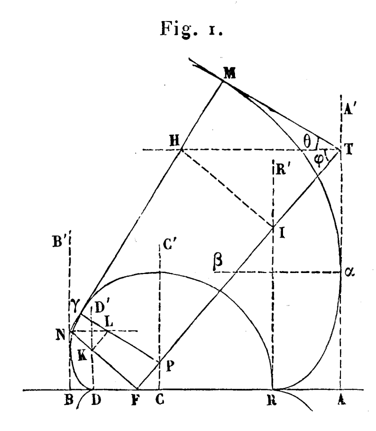
Portons à gauche du foyer F une longueur $\mathrm{FB} = \frac{\overline{\mathrm{A}\alpha}^2}{\mathrm{FA}}$ et à gauche du point A une longueur $\mathrm{AR} = \frac{\mathrm{AF}}{3}$, puis aux points B, R et A élevons à l'axe des perpendiculaires BB′, RR′ et AA′.

Cela posé, par le point F, menons deux droites rectangulaires quelconques rencontrant respectivement les droites BB′ et AA′ aux points N et T. Au point I, où la droite FT coupe RR′, menons une perpendiculaire à FT et appelons H le point où cette perpendiculaire rencontre la parallèle à l'axe menée par le point T; menons enfin la droite NH.

Je dis que *la perpendiculaire abaissée du point* T *sur* NH *est tangente à la cardioïde, le point de contact étant précisément le pied* M *de cette perpendiculaire, en sorte que* MN *est normale à la courbe.*

Pour le démontrer, je ferai remarquer que, des trois tangentes que l'on peut mener à la courbe par le point T, deux se confondent avec la tangente double, leurs points de contact étant d'ailleurs le point α et son symétrique α' par rapport à l'axe. Les normales en ces deux points sont les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ parallèles à l'axe. La troisième tangente touche la courbe en un point variable avec la position du point T; désignons pour un instant par Δ la normale au point de contact.

Fig. 1.



Il suit du théorème II que la polaire du point T relativement à la droite NF (cette droite étant considérée comme triple) se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ et Δ.

Les triangles semblables BNF et FAT donnent la relation

$$\mathrm{BN} \times \mathrm{AT} = \mathrm{BF} \times \mathrm{FA} = \overline{\mathrm{A}\alpha}^2;$$

de là résulte que la polaire du point T, relativement aux droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, est la droite NL menée par le point N parallèlement à l'axe.

La proposition précédente peut, par suite, s'énoncer ainsi :

La polaire du point T *relativement à la droite* Δ *et à la*

droite NL (*cette dernière étant considérée comme double*) *se confond avec la polaire de ce point relativement à* FN (*cette dernière droite étant considérée comme triple*); *et de là résulte d'abord que la droite* Δ *passe par le point* N.

Pour en déterminer un autre point, menons par le point T une parallèle à l'axe; soient Q [1] le point où cette parallèle rencontre NF, et H le point où elle rencontre Δ.

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, on aura

$$\frac{3}{TQ} = \frac{1}{TH}.$$

Menons par le point H une perpendiculaire à FT; en désignant par I' son pied, on voit que les deux triangles FQT et I'HT sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{I'T}{FT} = \frac{HT}{TQ} = \frac{1}{3};$$

IT est dans le tiers de FT et le point I' se confond avec le point I.

La proposition précédente est donc entièrement démontrée.

Elle donne un moyen facile de mener à la cardioïde une tangente par un point quelconque de la tangente double, ou encore de lui mener une normale par un point quelconque de la droite BB' qui, il est facile de le voir, passe par les deux points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe.

En particulier, on en déduit le théorème suivant :

Théorème III. — *Si, par un point quelconque de la cardioïde, on mène la tangente et la normale à la courbe et si l'on désigne par* T *le point où la tangente rencontre la tangente double* AA', *par* N *le point où la normale rencontre la droite* BB' *qui joint les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe, les deux points* T *et* N *sont vus du foyer suivant un angle droit.*

---

[1] Les points Q et α', ainsi que la droite $\alpha'\beta'$, ne se trouvent pas sur la figure; le lecteur est prié d'y suppléer.

7. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles.

Au point α la normale rencontre l'axe à l'infini et la tangente le rencontre au point A; en désignant, pour un instant, par R' le point de rebroussement de la courbe, on aura donc, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{\mathrm{AF}} = \frac{1}{\mathrm{AR}'},$$

d'où AR' = AR. Le point R est donc le point de rebroussement.

Si l'on considère l'un des points situés sur la droite BB' et où la tangente est horizontale, le point de rencontre de la tangente avec l'axe est à l'infini et le point de rencontre de la normale est en B. En vertu de la relation (1), on aura donc

$$\mathrm{BR} = 3\,\mathrm{BF}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{BF} = \mathrm{RA} = \frac{\mathrm{FA}}{3}.$$

Les tangentes que l'on peut mener à la courbe du point T sont, d'une part, la droite TM et, d'autre part, la droite Tα, cette dernière étant comptée deux fois.

En vertu du théorème I, on a donc

$$\widehat{\mathrm{MTI}} + 2\widehat{\mathrm{A'TI}} = \text{mult.}\,\pi;$$

ou, si l'on pose,

$$\widehat{\mathrm{HTI}} = \varphi \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathrm{MTH}} = \theta,$$
$$\theta + 3\varphi = \pi.$$

Au moyen des équations précédentes, il est facile d'établir un grand nombre de relations entre les éléments de la figure 1; je me bornerai à mentionner les suivantes :

$$\mathrm{NM} = \mathrm{NF} + \mathrm{AB}\sin\varphi,$$
$$\mathrm{TF} = \mathrm{TM} + \mathrm{AB}\cos\varphi.$$

8. Le point D étant déterminé par la relation $\mathrm{BD} = \frac{\mathrm{BC}}{3}$, élevons en ce point une droite DD' perpendiculaire à l'axe; soit K le point où cette perpendiculaire coupe NF. Menons KL perpendiculaire à NF et NL parallèle à l'axe; abaissons enfin, du point de rencontre L de ces deux lignes, une perpendiculaire sur la normale MN.



Je dis que *le point* γ, *où elle rencontre cette normale, est le centre de courbure de la cardioïde au point* M.

Soit, en effet, P le point où cette droite coupe FT, on démontrera aisément, en s'appuyant sur les propositions précédentes, que

$$FP = \frac{1}{9} FT;$$

par suite, le point P décrit, lorsque le point M se déplace sur la courbe, une droite perpendiculaire à l'axe et dont le pied est à une distance

$$FC = \frac{1}{3} FB.$$

En se reportant à ce que j'ai dit plus haut, on voit aisément que la normale NM enveloppe une cardioïde ayant pour tangente double BB' et pour foyer le point F.

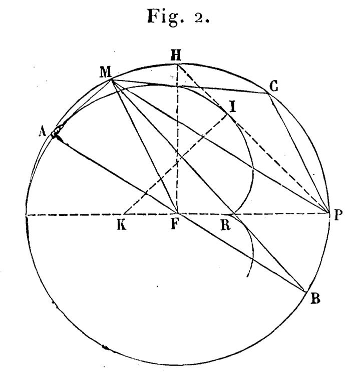
Le point de contact de la normale avec l'enveloppe est le point γ; ce qui démontre la proposition énoncée.

On voit aussi que la développée de la cardioïde est une cardioïde semblable à la proposée, le rapport de réduction étant $\frac{1}{3}$, proposition d'ailleurs bien connue.

9. Un autre mode de génération de la cardioïde mérite d'être signalé.

Soient (*fig.* 2) un cercle ayant pour centre F et un point fixe P

Fig. 2.



pris sur cette courbe. Par le point P menons une sécante quelconque coupant le cercle en M; par le centre F menons une paral-

lèle à cette sécante rencontrant le cercle aux points A et B, joignons enfin MA et MB. Ces droites enveloppent, lorsqu'on fait varier la direction de la sécante, une courbe qui est évidemment de troisième classe et unicursale.

Si l'on cherche les tangentes *isotropes* que, d'après la construction précédente, on peut mener à la courbe, on trouve facilement qu'elles passent par le point F; d'ailleurs la courbe n'est évidemment pas tangente à la droite de l'infini.

On en conclut que cette courbe est de *troisième classe, unicursale, et à foyer singulier triple,* par conséquent c'est une *cardioïde*. Quelques propriétés intéressantes se déduisent du mode de génération que je viens d'indiquer.

Il est facile, en premier lieu, de trouver le point de rebroussement de la courbe. Je remarquerai, à cet effet, que si, au point F, on élève une perpendiculaire au rayon FP, la droite HP est une tangente à la courbe et qui la touche au point I déterminé par la relation

$$\mathrm{HI} = \frac{\mathrm{HP}}{3}.$$

Au point I, menons la normale à la courbe et soit K le point où elle rencontre l'axe, en désignant par R le point de rebroussement de la cardioïde; on aura, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{\mathrm{PF}} = \frac{2}{\mathrm{TK}} + \frac{1}{\mathrm{PR}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{FR} = \frac{\mathrm{FP}}{3}.$$

Considérons, en second lieu, un point quelconque M du cercle; si, par F, on mène une parallèle à MP rencontrant le cercle aux points A et B, deux des tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe sont les droites MA et MB.

La troisième tangente s'obtiendrait en menant par le point P une parallèle à MF et en joignant au point M le point C où cette parallèle coupe le cercle.

On voit que les deux tangentes MA et MB sont à angle droit; d'où la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Si, d'un point quelconque du cercle* K *pas-*

sant par le sommet de la cardioïde et ayant pour centre son foyer, on mène les tangentes à la courbe, deux de ces tangentes sont rectangulaires (¹).

10. Considérons (*fig.* 2) les deux points M et C qui sont les extrémités d'une corde tangente à la cardioïde; on voit immédiatement sur la figure que l'arc MH est la moitié de l'arc PC.

La cardioïde peut donc être considérée *comme l'enveloppe de la corde qui joint deux points mobiles sur un cercle, ces deux points décrivant le cercle dans le même sens et l'un ayant une vitesse double de la vitesse de l'autre.*

Supposons que les deux points M et C se soient déplacés infiniment peu et soient venus en M′ et C′; désignons par T le point de rencontre de MC et de M′C′. On aura $MM' = \frac{1}{2}CC'$; d'autre part, les triangles semblables MM′T et CC′T donnent

$$\frac{MM'}{CC'} = \frac{MT}{TC'} = \frac{1}{2}.$$

A la limite on a

$$MT = \frac{TC}{2};$$

donc :

Théorème V. — *La corde interceptée par le cercle* K *sur une tangente quelconque à la cardioïde est partagée par le point de contact en deux segments dont l'un est le double de l'autre.*

11. D'autres propriétés des normales à la cardioïde peuvent être déduites par des considérations entièrement différentes de celles qui précèdent, et en s'appuyant seulement sur la propriété suivante :

La cardioïde ayant un axe de symétrie et ayant pour points de rebroussement les ombilics du plan, tout cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la portion de la courbe située au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

(¹) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les courbes unicursales de troisième classe,* communiquée à la Société mathématique en novembre 1877.

De là résulte immédiatement la proposition suivante ([1]) :

Théorème VI. — *Étant pris deux points fixes quelconques* A *et* B *sur la cardioïde, soit* C *un point mobile sur cette courbe; sur les milieux des cordes* CA *et* CB, *élevons respectivement des perpendiculaires à ces cordes et soient* I *et* K *les points où ces perpendiculaires coupent l'axe. Quelle que soit la position du point* C *sur la courbe, la différence*

$$\frac{1}{FI} - \frac{1}{FK}$$

demeure constante.

Démonstration. — Je supposerai, pour fixer les idées, que les points A, B, ainsi que le point mobile C, sont sur la partie de la courbe située au-dessus de l'axe; et, pour plus de clarté, je considérerai d'abord, au lieu de la cardioïde, une *spirique* quelconque, c'est-à-dire une courbe du quatrième ordre, ayant un axe de symétrie et pour points doubles les deux ombilics du plan. Une spirique, comme on le voit aisément, jouit de la propriété qu'un cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la courbe qu'en deux points situés au-dessus de l'axe et distincts des ombilics.

Cela posé, A et B désignant deux points fixes de la spirique et C un point variable sur cette courbe, par les milieux des cordes CA et CB élevons des perpendiculaires à ces droites; soient I et K les points où ces perpendiculaires coupent respectivement l'axe de la spirique.

J'établirai d'abord que les points I et K déterminent sur l'axe, lorsque le point C se déplace, une division homographique.

En effet, le point I étant donné, le point C se trouve au-dessus de l'axe et à l'intersection de la courbe avec le cercle décrit du point I comme centre avec IA pour rayon; ce point est donc parfaitement déterminé, puisque ce cercle ne rencontre la courbe au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

([1]) Les considérations qui suivent s'appliquent également aux coniques et aux anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre qui ont un axe de symétrie. *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les spiriques* (*Bulletin de la Société philomathique*, novembre 1869).

Le point C étant déterminé, le point K l'est également quand on se donne le point I, et l'on prouverait de même qu'à une position du point K correspond une position unique du point I; d'où il résulte que *les points* I *et* K *déterminent sur l'axe des divisions homographiques*.

Cherchons les deux points doubles. Le point C se déplaçant sur une des branches infinies qui passe à un ombilic ω en se rapprochant indéfiniment de cet ombilic, le cercle passant par les points A et C, et symétrique par rapport à l'axe, a pour centre, à la limite, le point où la tangente en ω, à la branche de courbe considérée, perce l'axe, c'est-à-dire le foyer singulier f correspondant à cette branche de courbe. Ce point est, par la même raison, le centre du cercle limite passant par les points B, C et symétrique par rapport à l'axe; f est donc un point double de la division homographique. Le même raisonnement s'appliquerait à la seconde branche de courbe.

Ainsi, quand on considère une *spirique générale, les deux points doubles de la division homographique, formée par les points* I *et* K, *sont les foyers singuliers de la courbe*.

Dans le cas particulier de la *cardioïde,* les points doubles à l'infini deviennent des points de rebroussement et les deux foyers singuliers viennent se réunir au foyer unique F de la courbe. La division homographique formée par les points I et K a donc deux points doubles coïncidents en F; d'où le théorème qu'il fallait démontrer.

12. Supposons que l'on fasse successivement coïncider le point mobile C avec A et avec B; dans le premier cas, la perpendiculaire élevée au milieu de AC se confond avec la normale en A et, dans le second, la perpendiculaire élevée au milieu de BC se confond avec la normale en B.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donnés deux points quelconques* A *et* B *situés sur une cardioïde, menons les normales en ces points et, par le point milieu de la corde* AB, *une perpendiculaire à cette corde; soient respectivement* a, b, i *les points où ces droites rencontrent l'axe, le point* i *et le foyer* F *de la courbe divisent harmoniquement le segment* ab.

En effet, en supposant que le point mobile C vienne successivement coïncider avec le point A et le point B et en appliquant le théorème précédent, on a

$$\frac{1}{\mathrm{FI}} - \frac{1}{\mathrm{F}a} = \frac{1}{\mathrm{F}b} - \frac{1}{\mathrm{FI}},$$

d'où

$$\frac{2}{\mathrm{FI}} = \frac{1}{\mathrm{F}a} + \frac{1}{\mathrm{F}b}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, si le point B est un des points où la tangente double touche la cardioïde, le point de rencontre de la normale avec l'axe étant à l'infini, on a cette proposition :

Si l'on désigne par a le point où la normale en un point A *de la cardioïde rencontre l'axe, et par i le point où cet axe est rencontré par la droite élevée par le milieu de la corde, qui joint* A *à l'un des points où la courbe touche la tangente double, et perpendiculairement à cette corde, le point a est le milieu du segment* FI.

13. Je m'arrêterai ici dans cette étude des propriétés des normales à la cardioïde. Dans une prochaine Note, je ferai l'application des mêmes principes à l'étude de diverses courbes remarquables de la troisième classe et de classes plus élevées.

SUR

LES NORMALES AUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1878.

1. Étant donnés une surface du second ordre K ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

et un point M ayant pour coordonnées α, β, γ, on sait que l'on peut de ce point mener six normales à la surface, les pieds de ces normales étant déterminés par les équations

$$x = \frac{a\alpha}{a-\rho}, \qquad y = \frac{b\beta}{b-\rho}, \qquad z = \frac{c\gamma}{c-\rho},$$

où ρ est une des racines de l'équation

$$(1) \qquad \frac{a\alpha^2}{(a-\rho)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-\rho)^2} + \frac{c\gamma^2}{(c-\rho)^2} - 1 = 0.$$

Ces six points sont d'ailleurs déterminés par l'intersection de K avec la cubique gauche H, définie par les équations

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)xy + \frac{\alpha y}{b} - \frac{\beta x}{a} = 0, \qquad \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)yz + \frac{\beta z}{c} - \frac{\gamma y}{b} = 0,$$
$$\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)zx + \frac{\gamma x}{a} - \frac{\alpha z}{c} = 0.$$

Cela posé, déterminons les quantités ξ, η, ζ, P, Q, R, X, Y,

Z et G, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1\right)\\&\quad\times(x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz+G)\\&\quad=(x\xi+y\eta+z\zeta+G)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1\right),\\&\quad+(y\xi-x\eta+R)\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)xy+\frac{\alpha y}{b}-\frac{\beta x}{a}\right],\\&\quad+(z\eta-y\zeta+P)\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)yz+\frac{\beta z}{c}-\frac{\gamma y}{b}\right],\\&\quad+(x\zeta-z\xi+Q)\left[\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)zx+\frac{\gamma x}{a}-\frac{\alpha z}{c}\right].\end{aligned}\right.$$

On aura, entre ces dix quantités, les neuf relations

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&2X\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=-(G+a),\\&2Y\eta+\gamma\zeta+\alpha\xi=-(G+b),\\&2Z\zeta+\alpha\xi+\beta\eta=-(G+c);\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&R\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{(2X-\alpha)\eta}{b}+\frac{(2Y-\beta)\xi}{a},\\&P\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{(2Y-\beta)\zeta}{c}+\frac{(2Z-\gamma)\eta}{b},\\&Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=\frac{(2Z-\gamma)\xi}{a}+\frac{(2X-\alpha)\zeta}{c};\end{aligned}\right.$$

et

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&Q\gamma-R\beta=2aX+(G+a)\xi,\\&R\alpha-P\gamma=2bY+(G+b)\eta,\\&P\beta-Q\alpha=2cZ+(G+c)\zeta.\end{aligned}\right.$$

Comme nous disposons de dix quantités indéterminées pour satisfaire à ces neuf relations, on pourra y satisfaire d'une infinité de manières.

Considérons maintenant l'équation (2), elle exprime évidemment que, des six pieds des normales que l'on peut abaisser du point M, quatre sont situés sur la sphère

$$x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz+G=0$$

et les deux autres dans le plan

$$\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1=0,$$

dont le pôle, par rapport à la surface du second ordre K, a pour coordonnées ξ, η, ζ; et, comme ces quantités renferment un paramètre arbitraire, elles sont les coordonnées d'un point quelconque de la polaire, par rapport à K, de la corde qui joint les pieds des deux dernières normales dont je viens de parler.

2. Désignons par S la sphère dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz+G=0;$$

les coordonnées de son centre sont évidemment X, Y, Z et G est la puissance de l'origine relativement à cette sphère. Elle contient, comme je l'ai dit, quatre des pieds des normales que l'on peut abaisser du point M. Soient D la corde qui joint les pieds des deux autres normales et Δ sa polaire réciproque par rapport à K. D'après une dénomination généralement adoptée, Δ est un *axe* relativement à K et aux surfaces du second ordre, qui forment avec elles un système homofocal; en d'autres termes, les deux droites D et Δ sont perpendiculaires entre elles.

De ce que j'ai dit plus haut il résulte que, si l'on considère ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes, la droite Δ est précisément déterminée par les équations (3), ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$(6) \qquad 2X=\alpha+A, \qquad 2Y=\beta+B, \qquad 2Z=\gamma+C,$$

par les suivantes

$$(7) \qquad A\xi+a=B\eta+b=C\zeta+c=\lambda,$$

avec la relation

$$(8) \qquad G+\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=-\lambda.$$

3. Tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons-les dans (8); en égalant à zéro le terme constant et le coefficient de λ, il viendra

$$(9) \qquad \frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+1=0$$

et

$$(10) \qquad G=\frac{\alpha a}{A}+\frac{\beta b}{B}+\frac{\gamma c}{C}.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points où D rencontre la surface du second ordre K, le plan tangent en ce point contient Δ, et son équation est

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0.$$

Remplaçant, dans cette équation, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), il vient, en égalant à zéro, le terme constant et le coefficient de λ

$$(11) \qquad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} + 1 = 0$$

et

$$(12) \qquad \frac{x}{aA} + \frac{y}{bB} + \frac{z}{cC} = 0.$$

L'équation (12) est celle du plan diamétral contenant la corde D; le plan, déterminé par l'équation (11), contient le point M en vertu de la relation (9); c'est donc le plan qui passe par les deux normales dont les pieds sont situés sur D; je le désignerai par P.

4. En général, pour abréger le discours, étant donné un plan quelconque ayant pour équation

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + 1 = 0,$$

j'appellerai *centre* de ce plan le point dont les coordonnées sont p, q, r et *foyer* de ce plan le point où se coupent les deux normales à K qui sont contenues dans ce plan. On voit que le plan P, dont j'ai parlé plus haut, a pour foyer le point M et pour centre le point m dont les coordonnées sont A, B, C.

La notion de *centre d'un plan* se présente fréquemment dans la théorie des normales aux surfaces du second ordre, et, à ce sujet, je rappellerai une élégante proposition due à Joachimsthal :

Étant donnés, sur une surface du second ordre, trois points a, b, c, *tels que les normales en ces points concourent en un même point* M, *le pôle du plan abc, relativement à cette surface, est le centre, relativement aux trois axes de la surface,*

du plan qui passe par les pieds des trois autres normales que l'on peut encore abaisser du point M [1].

5. En adoptant les dénominations qui précèdent, il résulte immédiatement des équations (6) que le centre N de la sphère S est le point milieu du segment Mm.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales que l'on peut abaisser d'un point donné M *sur une surface du second ordre* K, *est le milieu du segment qui joint le point* M *au centre du plan qui contient les deux autres normales.*

6. Pour déterminer complètement la sphère S, dont on peut construire le centre au moyen de la proposition précédente, il suffit de connaître la puissance G de l'origine relativement à cette sphère, ou bien encore de connaître la sphère Σ, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 + G = 0.$$

Cette sphère Σ peut être facilement déterminée en s'appuyant sur la propriété suivante

Le point M *et le pôle du plan* P, *relativement à la surface du second ordre* K, *sont deux points conjugués relativement à la sphère* Σ, *en d'autres termes le plan polaire de chacun d'eux, relativement à* Σ, *contient l'autre point.*

Pour démontrer cette propriété, je remarque que le pôle du plan P, relativement à K, a pour coordonnées

$$-\frac{a}{A}; \quad -\frac{b}{B}; \quad -\frac{c}{C};$$

le plan polaire de ce pôle, relativement à Σ, a pour équation

$$\frac{ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} - G = 0,$$

---

[1] JOACHIMSTHAL, *De quibusdam æquationibus quarti et sexti gradus quæ in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt* (*Journal de Crelle,* t. 53, p. 172).

et, en vertu de la relation (10), il contient évidemment le point α, β, γ; ce qui démontre la proposition énoncée.

7. La cubique gauche H rencontre la sphère S, d'abord aux quatre points où les normales concourent en M, puis en deux autres points. Je dirai, pour abréger, que la corde qui joint ces deux derniers points est la *corde supplémentaire* de D.

L'examen de l'équation (2) montre immédiatement que la corde supplémentaire est constamment comprise dans le plan

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0,$$

où ξ, η, ζ désignent les coordonnées d'un point quelconque de Δ.

Remplaçons, dans l'équation précédente, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), et égalons à zéro le terme constant ainsi que le coefficient de λ; nous aurons les équations suivantes, qui définissent la corde supplémentaire :

$$(13) \qquad \frac{ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} - G = 0,$$

et

$$(14) \qquad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 0.$$

L'équation (14) montre que le plan diamétral passant par la corde supplémentaire est parallèle au plan P. D'où la proposition suivante :

Les six pieds des normales, que l'on peut d'un point M *abaisser sur une surface du second ordre, sont, ainsi que le point* M *et le centre* O *de la surface, situés sur une même cubique gauche* H.

Si, par le point O, *on mène un plan parallèle au plan qui contient* M *et les pieds de deux quelconques des normales, ce plan coupe la cubique en deux autres points. Ces deux points et les pieds des quatre autres normales sont situés sur une même sphère.*

8. En désignant par ξ, η, ζ des constantes arbitraires, le pôle du plan

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1,$$

relativement à K, est le point (ξ, η, ζ), dont le plan polaire, relativement à Σ, a pour équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0.$$

Il résulte d'ailleurs de ce que j'ai dit plus haut que, si le plan

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0$$

tourne autour de la corde D, le plan

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0$$

tourne autour de la corde supplémentaire.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La droite Δ et la corde supplémentaire de D sont polaires réciproques, relativement à la sphère Σ.

9. Comme, dans la théorie des normales à une surface du second ordre, on a souvent à considérer les centres de divers plans (ces centres étant déterminés relativement aux axes de la surface), il n'est pas inutile d'entrer dans quelques détails relativement aux propriétés de ces points.

En premier lieu, soit, ρ désignant un paramètre variable,

$$(a + \rho a')x + (b + \rho b')y + (c + \rho c')z + d + \rho d' = 0$$

l'équation d'un plan tournant d'une droite fixe.

Pour trouver le lieu décrit par le centre de ce plan, identifions son équation avec l'équation

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} + 1 = 0;$$

il viendra

$$A = \frac{d + \rho d'}{a + \rho a'}, \qquad B = \frac{d + \rho d'}{b + \rho b'}, \qquad C = \frac{d + \rho d'}{c + \rho c'},$$

d'où l'on voit que le centre décrit une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ formé par les plans principaux et le plan à l'infini.

D'où les propositions suivantes :

Le lieu des centres des plans, qui passent par une droite fixe,

est une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ ; et réciproquement :

Si une cubique gauche passe par les sommets du tétraèdre Θ, *les plans, dont ses divers points sont les centres, passent par une droite fixe.*

En second lieu, considérons une droite quelconque dont un des points soit déterminé par les équations

$$x = \frac{a + \rho a'}{d + \rho d'}, \qquad y = \frac{b + \rho b'}{d + \rho d'}, \qquad z = \frac{c + \rho c'}{d + \rho d'}.$$

Le plan ayant pour centre ce point a pour équation

$$\frac{x}{a + \rho a'} + \frac{y}{b + \rho b'} + \frac{z}{c + \rho c'} + \frac{1}{d + \rho d'} = 0,$$

et il est clair que, quand on fait varier ρ, il enveloppe une cubique gauche ayant pour plans osculateurs les plans qui forment les faces du tétraèdre Θ.

D'où les propositions suivantes :

Les plans, qui ont pour centres les différents points d'une droite, enveloppent une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ (¹) ; et réciproquement

Si une cubique gauche est inscrite dans le tétraèdre Θ, *le lieu des centres de ses divers plans osculateurs est une ligne droite.*

10. Je m'appuierai maintenant sur le lemme qui suit :

Lemme. — *Si les sommets des deux tétraèdres sont situés sur une même cubique gauche, les huit faces de ces tétraèdres sont les plans osculateurs d'une autre cubique gauche.*

Réciproquement, *si les huit faces de deux tétraèdres sont les plans osculateurs d'une même cubique gauche, leurs huit sommets sont situés sur une autre cubique gauche.*

(¹) J'entends par *cubique gauche inscrite dans un tétraèdre* une cubique ayant pour plans osculateurs les faces de ce tétraèdre.

Il suffit évidemment de démontrer la première partie de ce lemme, la seconde proposition étant corrélative de la première.

Pour la démontrer, je remarque que la cubique, qui contient les sommets des deux tétraèdres, étant une *courbe unicursale,* je puis supposer que les sommets du premier tétraèdre soient déterminés par les racines d'une équation du quatrième degré $f(x) = 0$, et les sommets du second par les racines d'une équation de même degré $F(x) = 0$.

Cela posé, on voit que les racines de l'équation

$$F(x) + \lambda f(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable, déterminent sur la cubique les sommets d'une suite de tétraèdres, chaque point de la courbe étant d'ailleurs le sommet d'un seul de ces tétraèdres; d'où il résulte que les faces de tous ces tétraèdres enveloppent une cubique gauche, puisque, par chaque point de la courbe donnée, on ne peut mener que trois plans osculateurs à l'enveloppe.

En particulier, les faces des deux tétraèdres donnés sont des plans osculateurs de cette cubique gauche; la proposition est donc démontrée.

11. Considérons maintenant quatre plans dont les centres soient en ligne droite : d'après ce que j'ai démontré plus haut, les faces du tétraèdre T, déterminé par ces quatre plans, sont les plans osculateurs d'une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ. Du lemme précédent il résulte que les sommets des tétraèdres T et Θ sont situés sur une même cubique gauche et, par suite, les plans ayant pour centres les sommets du tétraèdre T passent par une même droite.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si les quatre faces d'un tétraèdre ont leurs centres en ligne droite, les plans qui ont pour centre les sommets du tétraèdre passent par une même droite.

Et de même :

Si les plans qui ont pour centres les sommets d'un tétraèdre passent par une même droite, les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.



12. Si d'un point quelconque M de l'espace on mène les six normales à la surface du second ordre K, on sait que le point M et les six pieds des normales sont situés sur une même cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ. Désignons par p_1, p_2, p_3, ..., p_6 les pieds de ces normales.

Des considérations qui précèdent il résulte immédiatement que :

Si l'on forme un tétraèdre ayant pour sommets quatre quelconques des sept points M, p_1, p_2, ..., p_6, *les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.*

13. Considérons une droite quelconque E, normale à une surface de second ordre, ayant pour axes les axes de coordonnées Ox, Oy et Oz. Le lieu des centres des plans qui passent par E est une cubique gauche L passant par les sommets du tétraèdre Θ. Soit M un point quelconque pris sur cette normale; par ce point on peut mener à la surface cinq normales distinctes de E; soient p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 leurs pieds. Désignons par N_1 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_2, p_3, p_4 et p_5, de même par N_2 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_1, p_3, p_4 et p_5, ...; désignons enfin par m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 les centres des plans qui, passant par E, contiennent respectivement les points p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.

D'après ce que je viens de dire, les cinq points m sont situés sur la cubique gauche L; d'ailleurs, comme je l'ai montré précédemment (n° 5), les points N sont respectivement les milieux des segments Mm.

D'où l'on déduit immédiatement les propositions suivantes :

Si d'un point M *on mène cinq normales quelconques à une surface du second ordre, ayant pour centre* O, *les cinq pieds de ces normales peuvent être regardés comme les sommets de cinq tétraèdres; les centres des cinq sphères circonscrites à ces tétraèdres sont situés sur une cubique gauche, passant par le milieu du segment* MO *et par les points situés à l'infini sur les axes de la surface.*

Étant données une droite quelconque E *et trois droites rectangulaires* Ox, Oy *et* Oz, *imaginons toutes les surfaces du*

second ordre ayant ces droites pour axes et normales à E; *si d'un point* M, *pris arbitrairement sur* E, *on mène à l'une de ces surfaces quatre normales distinctes de* E, *le lieu du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, formé par les pieds des normales, est une cubique gauche passant par le milieu du segment* MO, *et par les trois points à l'infini sur les axes* Ox, Oy *et* Oz.

Il est à remarquer que, si le point M se déplace sur la droite E, la cubique gauche conserve sa forme, chacun de ces points décrivant un segment de droite parallèle à E et égal à la moitié du segment dont le point M s'est déplacé.

14. Je ne développerai pas davantage les conséquences qu'on peut déduire des propositions précédentes, et je terminerai cette Note en établissant quelques formules qui peuvent être utiles dans les recherches sur les normales aux surfaces du second ordre.

Soient ρ' et ρ'' les deux racines de l'équation (1) qui correspondent aux deux normales dont les pieds sont situés sur la droite D, et soit

$$F(\rho) = (\rho - \rho')(\rho - \rho'').$$

En désignant, pour un instant, par ρ l'une quelconque de ces racines, les coordonnées du pied correspondant sont

$$\frac{a\alpha}{a-\rho}, \quad \frac{b\beta}{b-\rho}, \quad \frac{c\gamma}{c-\rho},$$

et l'équation du plan tangent en ce point est

$$\frac{\xi\alpha}{a-\rho} + \frac{\eta\beta}{b-\rho} + \frac{\zeta\gamma}{c-\rho} = 1.$$

Ce plan contient la droite Δ; tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons ces valeurs dans l'équation précédente. En égalant à zéro le coefficient de λ, on obtiendra la relation

$$\frac{\alpha}{A(a-\rho)} + \frac{\beta}{B(b-\rho)} + \frac{\gamma}{C(c-\rho)} = 0,$$

et cette relation devant être satisfaite pour $\rho = \rho'$ et $\rho = \rho''$, il

vient, après quelques réductions faciles,

$$F(\rho)=\rho^2-(G+a+b+c)\rho-abc\left(\frac{\alpha}{aA}+\frac{\beta}{bB}+\frac{\gamma}{cC}\right);$$

d'où

(15) $$G=\rho'+\rho''-a-b-c,$$

et

(16) $$\begin{cases} F(a)=(c-a)(a-b)\dfrac{\alpha}{A}=(a-\rho')(a-\rho''),\\ F(b)=(a-b)(b-c)\dfrac{\beta}{B}=(b-\rho')(b-\rho''),\\ F(c)=(b-c)(c-a)\dfrac{\gamma}{C}=(c-\rho')(c-\rho''). \end{cases}$$

Puisque ρ'' satisfait à l'équation (1), on a identiquement

$$\frac{a\alpha^2(a-\rho')^2}{(a-\rho')^2(a-\rho'')^2}+\frac{b\beta^2(b-\rho')^2}{(b-\rho')^2(b-\rho'')^2}+\frac{c\gamma^2(c-\rho')^2}{(c-\rho')^2(c-\rho'')^2}=1;$$

d'où, en remplaçant les dénominateurs par leurs valeurs tirées de (16) et ρ' par ρ,

$$\begin{aligned}&\frac{aA^2}{(a-b)^2(c-a)^2}(a-\rho)^2\\&\quad+\frac{bB^2}{(b-c)^2(a-b)^2}(b-\rho)^2+\frac{cC^2}{(c-a)^2(b-c)^2}(c-\rho)^2-1=0.\end{aligned}$$

Cette équation devant être satisfaite pour $\rho=\rho'$ et $\rho=\rho''$, on en déduit cette nouvelle expression du polynome $F(\rho)$,

$$F(\rho)=\frac{\left[\begin{array}{l}a(b-c)^2A^2(a-\rho)^2+b(c-a)^2B^2(b-\rho)^2\\ \quad+c(a-b)^2C^2(c-\rho)^2-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\end{array}\right]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2}.$$

D'où, en vertu des équations (16), les relations suivantes qui déterminent les coordonnées α, β, γ du foyer du plan

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+1=0,$$

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{A} = \dfrac{(c-a)(a-b)[bB^2+cC^2-(b-c)^2]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2}, \\ \dfrac{\beta}{B} = \dfrac{(a-b)(b-c)[cC^2+aA^2-(c-a)^2]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2}, \\ \dfrac{\gamma}{C} = \dfrac{(b-c)(c-a)[aA^2+bB^2-(a-b)^2]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2}; \end{cases}$$

auxquelles on peut joindre la relation

$$(18)\quad G = \frac{\left[\begin{array}{l} a(a-b-c)(b-c)^2A^2 \\ \quad + b(b-c-a)(c-a)^2B^2 + c(c-a-b)(a-b)^2C^2 \end{array}\right]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2}.$$

SUR LES SYSTÈMES DE DROITES

QUI SONT NORMALES

A UNE MÊME SURFACE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1878.

1. Je renverrai, pour toutes les notations dont je me servirai ici, à ma Note *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* (¹).

Par chaque point M d'une surface S menons une droite m, dont la position soit définie par l'angle θ qu'elle fait avec la normale MZ à la surface et l'angle φ que fait avec la direction MX sa projection sur le plan tangent.

Les cosinus des angles que font, avec les axes coordonnés, les trois directions MX, MY et MZ, étant respectivement

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, \\ \cos\xi, & \cos\eta, & \cos\zeta, \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu, \end{array}$$

les cosinus des angles que fera avec les axes la droite m seront respectivement

$$\begin{array}{l} \cos\alpha \sin\theta \cos\varphi + \cos\xi \sin\theta \sin\varphi + \cos\lambda \cos\theta, \\ \cos\beta \sin\theta \cos\varphi + \cos\eta \sin\theta \sin\varphi + \cos\mu \cos\theta, \\ \cos\gamma \sin\theta \cos\varphi + \cos\zeta \sin\theta \sin\varphi + \cos\nu \cos\theta; \end{array}$$

et, pour que les diverses droites m soient normales à une même

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2ᵉ série, t. XI, p. 60.

surface, il sera nécessaire et suffisant que l'expression

$$\Sigma\, dx(\cos\alpha \sin\theta \cos\varphi + \cos\xi \sin\theta \sin\varphi + \cos\lambda \cos\theta)$$

soit une différentielle exacte.

On a

$$\begin{aligned} dx &= \mathrm{E}.du \cos\alpha + \mathrm{G}\, dv \cos\xi, \\ dy &= \mathrm{E}\, du \cos\beta + \mathrm{G}\, dv \cos\eta, \\ dz &= \mathrm{E}\, du \cos\gamma + \mathrm{G}\, dv \cos\zeta; \end{aligned}$$

substituant ces valeurs dans l'expression précédente, elle donne

$$\mathrm{E} \sin\theta \cos\varphi . du + \mathrm{G} \sin\theta \sin\varphi . dv;$$

et, pour qu'elle soit une différentielle exacte, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{d}{dv}(\mathrm{E} \sin\theta \cos\varphi) = \frac{d}{du}(\mathrm{G} \sin\theta \sin\varphi).$$

2. L'équation précédente ne renferme que les quantités E et G, dont l'expression ne change pas quand on déforme la surface S.

D'où la conséquence suivante :

Concevons que chaque rayon m conserve une position fixe par rapport au plan tangent en M, c'est-à-dire que sa projection sur ce plan tangent et l'angle qu'il fait avec ce plan demeurent invariables; cela posé, *si les rayons émanant des divers points de* S *sont normaux à une même surface et si l'on déforme* S *de façon que l'élément d'une courbe quelconque tracée sur cette surface concerne la même valeur, chaque plan tangent à la surface entraînant avec lui le rayon correspondant, les divers rayons dans leur nouvelle position sont encore normaux à une même surface.*

3. L'équation (1) étant satisfaite pour certaines valeurs des fonctions φ et θ, elle est encore évidemment satisfaite quand on y remplace $\sin\theta$ par $k\sin\theta$, k désignant une constante arbitraire.

D'où ce beau théorème dû à Dupin :

Si des rayons normaux à une même surface se réfractent sur une surface S, *ils sont encore, après leur réfraction, normaux à une même surface.*

4. Chaque rayon m se projette sur le plan tangent en M, suivant une droite faisant avec la droite MX un angle égal à φ. Toutes ces projections enveloppent des courbes que l'on peut, pour abréger, appeler la *projection du système de rayons sur la surface*. La fonction φ étant connue, on obtiendra l'équation différentielle de cette projection en posant $\varphi = i$; d'où

$$\tang\varphi = \tang i = \frac{G\,dv}{E\,du}.$$

En remplaçant φ par i dans l'équation (1), il vient

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta\cos i) = \frac{d}{dv}(G\sin\theta\sin i),$$

ou encore

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta)\cos i - \frac{d}{du}(G\sin\theta)\sin i - E\sin\theta\sin i\frac{di}{dv} - G\sin\theta\cos i\frac{di}{du} = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement $\cos i$ et $\sin i$ par leurs valeurs,

$$\frac{E\,du}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{G\,dv}{ds},$$

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta)\,E\,du - \frac{d}{du}(G\sin\theta)\,G\,dv - EG\sin\theta\,di = 0,$$

ou encore

$$di\sin\theta - \frac{du}{G}\frac{d}{dv}(E\sin\theta) + \frac{dv}{E}\frac{d}{du}(G\sin\theta) = 0.$$

Si θ est constant, on peut, dans la relation précédente, supprimer le facteur commun $\sin\theta$, et, en remplaçant respectivement $\frac{dE}{dv}$ et $\frac{dG}{du}$ par leurs valeurs $-GM$ et EN, elle devient

$$di + M\,du + N\,dv = 0;$$

ce qui est précisément l'équation des lignes géodésiques.

D'où la proposition suivante :

Si des rayons émanant de chacun des points d'une surface S *sont normaux à une même surface, et si chacun d'eux fait un angle constant avec le plan tangent au point de* S *dont il émane, la projection du système de rayons sur* S *est un système de lignes géodésiques de cette dernière surface.*

5. La réciproque de cette proposition est également vraie. Considérons sur S un système de lignes géodésiques, nous choisirons les axes des u et des v, de telle sorte que ces lignes géodésiques soient définies par l'équation $v = \text{const}$. Cela posé, cherchons les systèmes de rayons normaux à une même surface et ayant pour projection le système considéré de lignes géodésiques. Dans ce cas, on peut poser $E = 1$ et $G = F(u)$, et l'angle désigné par φ est égal à zéro, l'équation (1) devient alors

$$\frac{d \sin\theta}{dv} = 0. \tag{2}$$

Cette équation étant identiquement satisfaite quand on fait $\theta = \text{const.}$, la réciproque de la proposition énoncée est démontrée. En particulier, si l'on fait $\theta = 0$, on obtient ce théorème bien connu :

Si l'on considère un système de lignes géodésiques tracées sur une surface, les tangentes aux différents points de ces lignes sont normales à une même surface.

6. On satisfait également à l'équation (2) en prenant pour θ une fonction arbitraire de u.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés un système de lignes géodésiques tracées sur une surface et les trajectoires orthogonales de ces lignes, si par chaque point M *d'une de ces lignes on mène une droite située dans le plan tangent à cette ligne en* M *et normal à la surface, l'angle de cette droite avec le plan tangent étant constant le long d'une même trajectoire orthogonale, mais variant du reste d'une façon arbitraire quand on passe de l'une de ces trajectoires à une autre, toutes ces droites sont normales à une même surface.*

SUR LES COURBES DE TROISIÈME CLASSE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1878.

I.

1. Soit une courbe de troisième classe $\mathfrak{K}^3 = K^6$, représentée par l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$; si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ est l'équation mixte de la courbe.

En posant $U = (a, b, c, d)$, je prendrai, pour forme canonique de U, l'expression réduite $a\lambda^3 + d\mu^3$; de plus, je représenterai par (A, B, C) le hessien H de U, en sorte que l'on aura

$$A = ac - b^2, \qquad 2B = ad - bc, \qquad C = bd - c^2.$$

La courbe $\mathfrak{K}^3$ est une courbe du sixième ordre K^6, dont l'équation cartésienne s'obtient en égalant à zéro le discriminant Δ de la forme U. En adoptant les notations de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* ([1]), je représenterai par Θ le contrevariant de F, qui, égalé à zéro, donne l'équation de la cayleyenne G^3 de $\mathfrak{K}^3$.

2. En désignant respectivement par

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) = x \qquad \text{et} \qquad \varpi = \lambda q - \mu p = 0$$

l'équation mixte de la conique polaire de la droite de l'infini et l'équation mixte du pôle de cette droite relativement à $\mathfrak{K}^3$, les formules (6) et (11) du Mémoire déjà cité donnent immédiatement,

([1]) *Journal de Mathématiques,* 3e série, t. I. Les renvois à ce Mémoire sont indiqués par la désignation (F. B).

en posant

$$\frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dy} = \Delta_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dx} = -\Delta_2 \qquad [1],$$

le système de formules suivant :

$$\Delta\alpha = a\Delta_1 + b\Delta_2 - 2A\Theta,$$
$$\Delta\beta = b\Delta_1 + c\Delta_2 - 2B\Theta,$$
$$\Delta\gamma = c\Delta_1 + d\Delta_2 - 2C\Theta;$$

ou, sous forme canonique,

$$(1) \qquad \Delta\alpha = a\Delta_1, \qquad \Delta\beta = -a\,d\Theta, \qquad \Delta\gamma = d\Delta_2,$$

puis

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{da}{dx} = 0, & \dfrac{db}{dx} = -\alpha, & \dfrac{dc}{dx} = -2\beta, & \dfrac{d^2 d}{dx} = -3\gamma, \\ \dfrac{da}{dy} = 3\alpha, & \dfrac{db}{dy} = 2\beta, & \dfrac{dc}{dy} = \gamma, & \dfrac{d^2 d}{dy} = 0; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dx} = 0, & \dfrac{d\beta}{dx} = -q, & \dfrac{d\gamma}{dx} = 2p, \\ \dfrac{d\alpha}{dy} = 2q, & \dfrac{d\beta}{dy} = -p, & \dfrac{d\gamma}{dy} = 0. \end{cases}$$

J'y joindrai encore les formules suivantes, que l'on déduit facilement des précédentes, et que j'écris sous forme canonique, en y faisant b et c égaux à zéro :

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{dA}{dx} = -2a\beta, & 2\dfrac{dB}{dx} = -3a\gamma, & \dfrac{dC}{dx} = -d\alpha, \\ \dfrac{dA}{dy} = a\gamma, & 2\dfrac{dB}{dy} = 3d\alpha & \dfrac{dC}{dy} = 2d\beta. \end{cases}$$

On en déduit l'expression de p et de q, en partant de l'identité

$$\Theta = A\gamma + 2B\beta + C\alpha, \qquad \text{(F. B. n° 18)}$$

qui, dérivée successivement par rapport à x et y, donne les deux relations

$$(5) \qquad 3\Theta_1 = a\,dp + a\gamma^2 - d\alpha\beta, \qquad 3\Theta_2 = -a\,dq + d\alpha^2 - a\beta\gamma.$$

---

[1] En général, Z désignant une fonction de x et de y du degré n, je poserai

$$Z_1 = \frac{1}{n}\frac{dZ}{dy}, \qquad Z_2 = -\frac{1}{n}\frac{dZ}{dx}.$$

3. En représentant par $W(\lambda, \mu) = 0$ l'équation mixte de la hessienne $\mathfrak{H}^3$ de la courbe, on a, sous forme canonique (F. B. n° 9),

$$W = \begin{vmatrix} a\lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & d\mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & \lambda q - \mu p \end{vmatrix}$$

$$W = ad\lambda\mu(\lambda q - \mu p) - d\mu(\alpha\lambda + \beta\mu)^2 - a\lambda(\beta\lambda + \gamma\mu)^2,$$

ou, en développant le second membre et en remplaçant p et q par leurs valeurs déduites des équations (5),

$$W = -3(\lambda\Theta_2 + \mu\Theta_1)\lambda\mu - 3\lambda\mu\beta(a\gamma\lambda + d\alpha\mu) - \beta^2(a\lambda^3 d\mu^3);$$

ou encore, en multipliant les deux membres par $a^2 d^2 = \Delta$, et en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs,

$$\Delta W = 3ad\lambda\mu \frac{ad\lambda(\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2) + ad\mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)}{\Delta} - \Theta^2(a\lambda^3 + d\mu^3);$$

d'où, enfin, en passant de la forme canonique à la forme générale,

$$\Delta W = 6H(\lambda, \mu) \frac{(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu)}{\Delta} - \Theta^2 U(\lambda, \mu).$$

Pour abréger, je poserai

$$(6)\quad \tfrac{1}{6}\Delta(\lambda\mathfrak{X} - \mu\mathfrak{Y}) = (\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta^2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu),$$

où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ désignent des polynomes du cinquième degré en x et y, et l'équation mixte de la hessienne sera donnée par la formule suivante :

$$(7)\qquad \Delta W(\lambda, \mu) = H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) - \Theta^2 U(\lambda, \mu).$$

4. L'équation mixte du pôle de la droite de l'infini étant

$$\varpi = \lambda q - \mu p = 0,$$

on déduit, des équations (5), la relation suivante :

$$(8)\quad \Delta^2\varpi = a\Delta_1^2\lambda + d\Delta_2^2\mu + ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - 3\Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - 3\Delta\Theta_1)].$$

En désignant toujours par $\Pi = 0$ l'équation de la conique polaire de la droite de l'infini, par $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations de la conique polaire et du pôle de la droite

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

on aura d'abord (F. B., n° 18),

$$(9) \qquad \Delta\Pi_\omega = a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\omega\,\Theta\lambda\mu,$$

formule où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathfrak{x} = -v\Delta + \omega\Delta_1, \qquad \mathfrak{y} = u\Delta + \omega\Delta_2;$$

puis (F. B., n° 11),

$$\varpi_\omega = u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi.$$

Substituons, dans cette expression, les valeurs de ϖ, Π_1, Π_2, ..., tirées des relations précédentes, il viendra

$$\begin{aligned}\Delta^2\varpi_\omega = {} & a\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} - \mu\mathfrak{x}) \\ & + \omega^2 ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)],\end{aligned}$$

ou encore, en vertu de l'identité (6),

$$(10) \qquad \Delta^2\varpi_\omega = a\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} - \mu\mathfrak{x}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}).$$

II.

5. La courbe $\mathfrak{K}^3$ et sa hessienne $\mathfrak{H}^3$ déterminent un faisceau tangentiel; en désignant, pour un instant, par $F_0(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de la hessienne, et par ρ un paramètre arbitraire, l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation tangentielle $F + 6\rho F_0 = 0$; je la désignerai par la notation $\mathfrak{K}_\rho$. Son équation mixte étant $U_\rho = 0$, la relation (7) donne immédiatement

$$(11) \qquad \Delta U_\rho = 6\rho H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) + (\Delta - 6\rho\Theta^2)U(\lambda, \mu).$$

Les deux courbes du sixième ordre K^6 et $(G^3)^2$ déterminent également un faisceau ponctuel; l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0;$$

je la désignerai par la notation K_ρ, et je dirai que deux courbes des faisceaux (K_ρ) et $(\mathfrak{K}_\rho)$, données par la même valeur de ρ, sont *correspondantes*.

6. Cherchons d'abord la signification géométrique des poly-

nomes $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ qui s'introduisent, comme on l'a vu, d'une façon si simple et si naturelle, dans la recherche de l'équation mixte de la hessienne.

Soit M un point du plan, dont les coordonnées soient x et y; par ce point passe une courbe du faisceau (K_ρ), la valeur du paramètre ρ correspondant à cette courbe étant déterminée par la relation

$$(12) \qquad \Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

Le coefficient angulaire $\frac{\mu'}{\lambda'}$ de la tangente menée, en ce point, à la courbe est donné par la relation

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Delta^2 - 6\rho\Theta\Theta_2}{\Delta_1 - 6\rho\Theta\Theta_1}.$$

ou, si l'on remplace ρ par sa valeur déduite de l'équation (12),

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2}{\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1}.$$

De là et de l'équation (6) résulte l'identité suivante

$$(13) \qquad \lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X} = \lambda'(A\lambda + B\mu) + \mu'(B\lambda + C\mu),$$

dont il est facile de voir la signification géométrique.

7. A cet effet, je remarque que, du point M, on peut mener à la courbe $\mathfrak{K}^3$ trois tangentes dont les coefficients angulaires sont déterminés par l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$. L'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ détermine également les coefficients angulaires de deux droites passant par le même point : je dirai que ces droites sont les *hessiennes du point* M *relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$. Je dirai encore que la droite passant par le point M et ayant pour coefficient angulaire $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}}$ est l'*axe de ce point relativement à la courbe*. Cela posé, de l'équation (12) résulte la proposition suivante :

Si en un point M *du plan on considère l'axe et les hessiennes de ce point relativement à cette courbe, la conjuguée harmonique de l'axe, relativement aux hessiennes, se confond avec la tangente, menée au point* M, *à la courbe du faisceau* K_ρ, *qui passe en ce point.*

8. Imaginons qu'une droite se meuve tangentiellement à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$; le lieu des intersections de cette droite avec sa conique polaire relativement à $\mathfrak{K}^3$ s'obtient en éliminant λ et μ entre l'équation mixte de $\mathfrak{K}_\rho$ et l'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ (F. B., n° 7); ou bien, en vertu de l'équation (10), en éliminant λ et μ entre les équations

$$H(\lambda, \mu) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\Delta - 6\rho\Theta^2}{\Delta} - U(\lambda, \mu) = 0.$$

Le résultat de l'élimination est évidemment

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

Si une droite se meut tangentiellement à une courbe du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$), *le lieu des points où elle rencontre sa conique polaire, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *est la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ).

9. Soit un point M ayant pour coordonnées x et y, et situé sur la courbe K_ρ; comme l'on a

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0,$$

il résulte de l'équation (10) que les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$ sont déterminés par l'équation

$$H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0.$$

D'où ce théorème :

Les trois tangentes que, d'un point de la courbe $\mathfrak{K}_\rho$, *on peut mener à la courbe correspondante du faisceau* ($\mathfrak{K}_\rho$), *se confondent avec l'axe et les hessiennes de ce point relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

10. Considérons une courbe quelconque du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$) ; une tangente à cette courbe rencontre la courbe correspondante du faisceau (K_ρ) en six points, dont deux sont situés sur la conique polaire de la tangente, relativement à $\mathfrak{K}^3$ (n° 8). On sait, d'ailleurs, en vertu de la proposition précédente, que, par chacun de ces six points, la tangente considérée est un axe ou une hessienne de ce

point relativement à $\mathfrak{K}^3$. Il est clair qu'elle est une hessienne pour les deux points situés sur la conique polaire, et seulement pour ces points; elle est donc un axe pour les quatre autres. D'où les conséquences suivantes :

Toute tangente à une courbe du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$) *rencontre la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ) *en six points; deux de ces points sont situés sur la conique polaire de la tangente, relativement à* $\mathfrak{K}^3$. *Chacun des quatre autres jouit de la propriété que son axe, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *se confond avec la tangente considérée* ([1]).

L'enveloppe des axes, relativement à $\mathfrak{K}^3$, *des divers points d'une courbe quelconque du faisceau* (K_ρ), *est la courbe correspondante du faisceau* ($\mathfrak{K}_\rho$).

11. Considérons un point M du plan ayant pour coordonnées ξ et η; l'équation de sa droite polaire, relativement à la courbe K^6, a pour équation

$$\omega = x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta} = 0.$$

Relativement à cette droite, on a

$$u = \frac{d\Delta}{d\xi}, \qquad v = \frac{d\Delta}{d\eta} \qquad \text{et} \qquad w = \frac{d\Delta}{d\zeta},$$

et, par suite,

$$6\mathfrak{x} = \left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dy} - 6\Delta\frac{d\Delta}{d\eta},$$

$$6\mathfrak{y} = -\left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dx} + 6\Delta\frac{d\Delta}{d\xi}.$$

On voit, par ces formules, que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent pour $x = \xi$ et $y = \eta$.

Désignons par D la droite précédente, et par m son pôle, relativement à la courbe $\mathfrak{K}^3$; l'équation mixte de ce pôle est (n° **4**),

$$a\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{x}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0;$$

([1]) Des théorèmes corrélatifs ont évidemment lieu relativement aux courbes du troisième ordre; j'ai déjà donné sans démonstration ces théorèmes dans une Note *Sur les courbes du troisième ordre,* insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique,* t. IV, p. 110.

et le coefficient angulaire de la droite Mm est donné par la formule précédente, quand on y fait $x = \xi$ et $y = \eta$. Comme je l'ai fait voir, $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent alors, et le coefficient angulaire cherché est déterminé par l'équation $\lambda \mathfrak{Y} - \mu \mathfrak{X} = 0$, où x et y doivent être respectivement remplacés par ξ et η.

D'où la proposition suivante :

Étant donné un point quelconque du plan M, *si l'on désigne par m le pôle, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *de la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6, *la droite* Mm *est l'axe du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

III.

12. L'équation mixte de la polaire de la droite

$$\omega = ux + vy + wz = 0$$

est

$$a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\omega\Theta\lambda\mu = 0.$$

Supposons, comme ci-dessus, que la droite considérée soit la polaire, relativement à K^6, du point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ. Les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la conique polaire de la droite sont déterminés par l'équation précédente quand on y fait $x = \xi$ et $y = \eta$. Les fonctions $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ devenant alors identiquement nulles, l'équation se réduit à $H(\lambda, \mu) = 0$.

Donc :

Étant donné un point quelconque M *du plan, si l'on considère la droite polaire de ce point, relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^6$, *puis la conique polaire de cette droite, relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *les tangentes menées du point* M *à cette conique sont les hessiennes du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$ (1).

13. Soit M un point du plan ayant pour coordonnées x et y. Supposons ce point placé sur la hessienne de $\mathfrak{K}^3$; on a alors $\Theta = 0$,

---

(1) Il est à peine nécessaire de rappeler que $\mathfrak{K}^3$ et K^6 désignent la même courbe ; la première notation étant employée quand on considère cette courbe comme étant de troisième classe, et la seconde quand on la considère comme étant du sixième degré.

et les coefficients angulaires des tangentes, menées du point M à la conique polaire de la droite $\omega = 0$, sont déterminés par les racines de l'équation

$$(14) \qquad a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 = 0.$$

Il est facile d'interpréter géométriquement ce résultat. Désignons, pour un instant, par ξ, η, ζ les coordonnées courantes, et soit

$$\eta - y = k(x - \xi)$$

l'équation de la droite qui joint le point M au point où sa droite polaire, relativement à K^6, rencontre la droite $\omega = 0$.

Le coefficient k se déterminera en exprimant que les trois droites

$$k\xi + \eta - \zeta(y + kx) = 0,$$
$$\xi \frac{d\Delta}{dx} + \eta \frac{d\Delta}{dy} + \zeta \frac{d\Delta}{dz} = 0,$$
$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0$$

se coupent en un même point.

Un calcul facile donne

$$k = \frac{6u\Delta - \omega \dfrac{d\Delta}{dx}}{\omega \dfrac{d\Delta}{dy} - 6v\Delta} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}},$$

et de l'équation (14) résulte immédiatement la conséquence suivante :

Étant donnée une droite quelconque D *du plan, et étant pris arbitrairement un point* M *sur la cayleyenne de la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *désignons par* m *le point où la droite* D *est rencontrée par la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6. *Cela posé, les deux tangentes, que l'on peut du point* M *mener à la conique polaire de* D, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *sont les deux droites qui constituent la conique polaire de la droite* Mm, *relativement aux trois tangentes que l'on peut mener du point* M *à la courbe* $\mathfrak{K}^3$.

IV.

14. Les coniques polaires, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des diverses droites qui passent par un point donné M du plan, sont inscrites

dans un quadrilatère dont les côtés ont pour pôle M. Soient ξ, η, ρ les coordonnées du point M; il est facile d'obtenir en coordonnées cartésiennes l'équation des côtés de ce quadrilatère.

Considérons, en effet, les deux droites $x - \xi = 0$ et $y - \eta = 0$, qui se croisent au point M; relativement à la première droite, on aura, en posant, pour abréger, $x - \xi = X$ et $y - \eta = Y$, $\omega = X$, $u = 1$, $v = 0$, et, par suite, $\mathfrak{x} = X\Delta_1$ et $\mathfrak{y} = \Delta + X\Delta_2$. Relativement à la seconde, on aura $\omega = Y$, $u = 0$, $v = 1$ et, par suite,

$$\mathfrak{x} = -\Delta Y \Delta_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{y} = Y\Delta_2;$$

je désignerai ces deux dernières expressions par $\mathfrak{x}'$ et $\mathfrak{y}'$.

Cela posé, les équations mixtes des coniques polaires des droites $X = 0$ et $Y = 0$ sont respectivement

$$\frac{a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2adX\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a\mathfrak{x}'\lambda^2 + d\mathfrak{y}'\mu^2 - 2adY\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0.$$

Si l'on représente par T le résultant de ces deux équations, il est clair que $T = 0$ est l'équation des quatre tangentes communes aux polaires des diverses droites qui se croisent au point M.

Une formule bien connue donne

$$\begin{aligned} \Delta^4 T &= a^2 d^2 (\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{y}\mathfrak{x}' - 2ad\Theta^2 XY)^2 \\ &\quad - 4(ad\,\mathfrak{x}\mathfrak{y} - \Delta\Theta^2 X^2)(ad\,\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' - \Delta\Theta^2 Y^2) \\ &= a^2 d^2 (\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')^2 + 4\Delta\Theta^2 ad(Y\mathfrak{x} - X\mathfrak{x}')(Y\mathfrak{y} - X\mathfrak{y}'). \end{aligned}$$

En remplaçant $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$ et $\mathfrak{y}'$ par leurs valeurs données ci-dessus, un calcul facile donne

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}' = \frac{\Delta}{6}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right),$$

$$Y\mathfrak{y} - X\mathfrak{x}' = X\Delta \quad \text{et} \quad Y\mathfrak{y} - X\mathfrak{y}' = Y\Delta.$$

Il vient donc définitivement

$$(15) \qquad \Delta T = \frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2 + 4\Theta^2 H(X, Y).$$

15. On peut donc remarquer que l'équation

$$\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz} = 0$$

représente la polaire P du point M, relativement à la courbe K^6.

De l'équation (15) résulte que les quatre tangentes communes aux coniques polaires des droites qui se croisent au point M rencontrent la cayleyenne de $\mathfrak{K}^3$ aux points où cette courbe rencontre P, les neuf points de rebroussement de $\mathfrak{K}^3$ étant exceptés. Ces points de rencontre sont évidemment, d'ailleurs, au nombre de six, et chacun d'eux doit être compté deux fois.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les tangentes communes aux coniques polaires des diverses droites qui se croisent en un point M *forment un quadrilère dont les six sommets sont situés à la fois sur la cayleyenne et sur la première polaire du point* M, *relativement à la courbe* K^6.

16. Si l'on considère x, y et z comme des quantités données, coordonnées d'un point N du plan, et ξ, η et ζ comme des coordonnées variables, il est clair que l'équation

$$\frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx}+\eta\frac{d\Delta}{dy}+\zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2+4\Theta^2\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$$

représente le lieu des pôles, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des droites que l'on peut mener par le point N. On voit que ce lieu est une conique; l'équation $\mathrm{H}(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})=0$ représente les hessiennes du point N. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites qui passent par un point donné* N *est une conique tangente aux deux hessiennes du point* N, *et la corde de contact est la polaire du point* N, *relativement à* K^6.

Si le point N est sur la cayleyenne, $\Theta=0$, et l'équation précédente se réduit à son premier terme. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites qui passent par un point donné de la cayleyenne de cette courbe est la polaire de ce point relativement à* K^6.

SUR LA DÉTERMINATION

EN UN POINT D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE,

DES AXES DE L'INDICATRICE

ET

DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1878.

I.

1. Soient une surface de second ordre $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ et un point M de cette surface dont les coordonnées soient ξ, η, ζ. On a la relation

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}=1, \tag{1}$$

et les coordonnées d'un point quelconque de la normale menée au point M sont données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{\lambda}{b}\right),\qquad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda}{c}\right),$$

où λ détermine un paramètre variable. Je supposerai λ déterminé de telle sorte que le point considéré soit un des centres de courbure principaux de la surface au point M.

En désignant, pour un instant, par x_0, y_0 et z_0 les coordonnées de ce point, les pieds des normales abaissées de ce point sur la surface sont, comme on le sait, déterminés par les équations

$$\frac{x_0-x}{\frac{x}{a}}=\frac{y_0-y}{\frac{y}{a}}=\frac{z_0-z}{\frac{z}{a}}=\rho,$$

où ρ désigne une racine quelconque de l'équation

$$\frac{ax_0^2}{(a+\rho)^2}+\frac{by_0^2}{(b+\rho)^2}+\frac{cz_0^2}{(c+\rho)^2}=1,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{(a+\lambda)^2\xi^2}{a(a+\rho)^2}+\frac{(b+\lambda)^2\eta^2}{b(b+\rho)^2}+\frac{(c+\lambda)^2\zeta^2}{c(c+\rho)^2}=1.$$

Puisque, par hypothèse, le point (x_0, y_0, z_0) est un des centres de courbure principaux de la surface au point M, l'équation précédente en ρ doit avoir une racine double égale à λ; cette équation est, en effet, en vertu de la relation (1), identiquement satisfaite quand on y fait $\rho=\lambda$; mais, de plus, la dérivée doit encore s'annuler pour cette valeur; d'où l'équation suivante

$$\frac{\xi^2}{a(a+\lambda)}+\frac{\eta^2}{b(b+\lambda)}+\frac{\zeta^2}{c(c+\lambda)}=0, \tag{2}$$

qui donne les valeurs de λ, déterminant les deux centres de courbure principaux au point M.

2. Les pieds des normales abaissées du point (x_0, y_0, z_0) sur la surface se trouvent sur la cubique gauche déterminée par les équations

$$xy\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{yx_0}{b}-\frac{xy}{a}=0,\qquad yz\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{zy_0}{c}-\frac{yz_0}{b}=0,$$
$$zx\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+\frac{xz_0}{a}-\frac{zx_0}{c}=0;$$

multiplions la première de ces équations par z_0, la deuxième par x_0 et la troisième par y_0, il viendra

$$xyz_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+yzx_0\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+zxy_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0,$$

équation du cône ayant pour sommet le centre de la surface et contenant les pieds des normales.

Il est clair que le plan tangent à ce cône au point (ξ, η, ζ) est le plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice au point M, qui correspond au centre de courbure considéré.

L'équation de ce plan tangent est

$$\sum x\left[\eta z_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\zeta y_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\right]=0,$$

ou, en remplaçant x_0, y_0 et z_0 par leurs valeurs et faisant quelques réductions faciles,

$$(3)\quad (a+\lambda)(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda)(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda)(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

3. Soient λ' et λ'' les deux racines de l'équation (2), elles correspondent aux deux axes de l'indicatrice et aux deux centres de courbure principaux corrélatifs.

De ce que je viens de dire il résulte que le plan passant par le centre de la surface et l'un des axes de l'indicatrice a pour équation

$$(4)\quad (a+\lambda')(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda')(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda')(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

Considérons le centre de courbure principal N correspondant à l'autre axe de l'indicatrice; les coordonnées sont données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right),\qquad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right).$$

Soient A, B, C les points où la normale MN rencontre respectivement les plans principaux de la surface Oyz, Ozx et Oxy.

Les coordonnées du point C sont

$$x=\xi\left(1+\frac{c}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{c}{b}\right),\qquad z=0.$$

Par ce point menons un plan perpendiculaire à la normale et prenons son intersection avec la droite menée, par le point N, parallèlement à l'axe des z. En désignant par C′ ce point, un calcul facile montre que ses coordonnées ont pour valeurs

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right),\qquad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right)-\frac{c(c+\lambda'')}{\zeta}P,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$P=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}.$$

Menons de même, par le point B, un plan perpendiculaire à MN et désignons par B′ le point où ce plan rencontre la droite menée par F parallèlement à l'axe des y; ses coordonnées seront données par les formules

$$x = \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right) - \frac{b(b+\lambda'')}{\eta}P, \qquad z = \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right).$$

Désignons enfin par A′ le point où la droite menée par le point N, parallèlement à l'axe des x, rencontre le plan mené par A perpendiculairement à MN.

Le plan, passant par le centre O de la surface et les points B′ et C′, a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right) & \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right) - \frac{c(c+\lambda'')}{\zeta}P \\ \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right) - \frac{b(b+\lambda'')}{\eta}P & \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(5) \qquad \frac{\xi x}{a(a+\lambda'')} + \frac{\eta y}{b(b+\lambda'')} + \frac{\zeta z}{c(c+\lambda'')} = 0.$$

Cette équation étant symétrique par rapport aux lettres x, y et z, on en conclut que le plan OB′C′ passe par le point A′. Ainsi, les trois points A′, B′ et C′ sont situés dans un même plan passant par le centre de la surface.

Je dis maintenant que ce plan passe par l'axe de l'indicatrice au point M, qui correspond au centre de courbure principal distinct de N.

L'équation (2) donne en effet l'identité suivante

$$\frac{\xi^2}{a}(b+\lambda)(c+\lambda) + \frac{\eta^2}{b}(c+\lambda)(a+\lambda) + \frac{\zeta^2}{c}(a+\lambda)(b+\lambda) = (\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda''),$$

d'où, en faisant $\lambda = -a$,

$$a(a+\lambda'') = -\frac{\xi^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+\lambda')(b-c)},$$

et de même

$$b(b+\lambda'')=-\frac{\eta^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b+\lambda')(c-a)},$$

$$c(c+\lambda'')=-\frac{\xi^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(c+\lambda')(a-b)}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (5), il viendra

$$\frac{x(a+\lambda')(b-c)}{\xi}+\frac{y(b+\lambda')(c-a)}{\eta}+\frac{z(c+\lambda')(a-b)}{\zeta}=0;$$

c'est précisément, comme on le voit par la relation (4), l'équation du plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice conjugué au centre principal de courbure distinct de N. La proposition est donc démontrée.

4. De là résulte immédiatement le théorème suivant :

Théorème I. — *Soient un point* M *situé sur une surface du second ordre,* MT *et* MT′ *les tangentes aux deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Par la droite* MT′ *et le centre de la surface menons un plan* P; *puis, au point où la normale élevée au point* M *rencontre un des plans de symétrie de la surface, un plan perpendiculaire à cette normale. Ce plan coupe le plan* P *suivant une droite; par cette droite menons un plan perpendiculaire au plan de symétrie considéré. Ce dernier plan rencontre la normale au centre de courbure de la section normale de la surface qui est tangente à la droite* MT (¹).

5. La normale, menée à la surface par le point M, rencontre les trois points de symétrie de cette surface aux points A, B et C.

Menons par ces points des droites respectivement perpendicu-

(¹) Ce théorème est l'extension aux surfaces du second ordre d'une élégante proposition due à M. Mannheim :

Si, au point où la normale, élevée en un point M *d'une conique, rencontre un axe de cette conique, on mène une droite perpendiculaire à cette normale, la droite, passant par le point de rencontre de cette perpendiculaire avec le diamètre qui aboutit au point* M, *et menée perpendiculairement à l'axe considéré, rencontre la normale au centre du cercle osculateur en* M.

laires à ces plans de symétrie. Ces droites, qui ont pour équation

$$x = \xi\left(1 - \frac{c}{a}\right), \qquad y = \eta\left(1 - \frac{c}{b}\right),$$
$$y = \eta\left(1 - \frac{a}{b}\right), \qquad z = \zeta\left(1 - \frac{a}{c}\right),$$
$$z = \zeta\left(1 - \frac{b}{c}\right), \qquad x = \xi\left(1 - \frac{b}{a}\right),$$

sont trois génératrices d'un hyperboloïde H ; je dirai que ces génératrices sont du système (G). Cet hyperboloïde admet un autre système de génération (G′); trois des génératrices de ce système sont, en particulier, déterminées par les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \xi\left(1 - \dfrac{b}{a}\right), & y = \eta\left(1 - \dfrac{a}{b}\right), \\ y = \eta\left(1 - \dfrac{c}{b}\right), & z = \zeta\left(1 - \dfrac{b}{c}\right), \\ z = \zeta\left(1 - \dfrac{a}{c}\right), & x = \xi\left(1 - \dfrac{c}{a}\right). \end{cases}$$

Considérons le centre de courbure N de la surface, situé sur la normale au point N et correspondant à l'axe de l'indicatrice MT.

La génératrice de l'hyperboloïde H, passant par N et appartenant au système (G), se détermine facilement par la condition qu'elle rencontre les droites définies par les équations (6); on trouve ainsi que ses équations sont

$$\frac{x - \xi\left(1 + \dfrac{\lambda''}{a}\right)}{\dfrac{\xi}{a(a+\lambda'')}} = \frac{y - \eta\left(1 + \dfrac{\lambda''}{b}\right)}{\dfrac{\eta}{b(b+\lambda'')}} = \frac{z - \zeta\left(1 + \dfrac{\lambda''}{c}\right)}{\dfrac{\zeta}{c(c+\lambda'')}}.$$

En les comparant à l'équation (5), on en conclut immédiatement que cette génératrice est perpendiculaire au plan OMT′.

D'où la proposition suivante :

Théorème II. — *La normale, menée en un point* M *d'une surface du second ordre, rencontre les plans principaux de cette surface en trois points. Menons respectivement par ces points trois droites* (D) *perpendiculaires aux plans principaux; elles déterminent un hyperboloïde.*

Cela posé, on peut construire deux génératrices de cet

hyperboloïde, appartenant au même système que les droites (D) *et perpendiculaires au diamètre passant par le point* M. *Ces génératrices rencontrent la normale aux deux centres de courbure principaux de la surface relatifs au point* M *et les plans menés par le diamètre, perpendiculairement à ces deux génératrices, coupent le plan tangent en* M, *suivant les axes de l'indicatrice.*

Il est à remarquer qu'en désignant par MT et MT′ les tangentes à l'indicatrice, et par N, N′ les centres de courbure des sections normales correspondantes, le plan mené par OM perpendiculairement à la génératrice de l'hyperboloïde passant par le point N coupe le plan tangent suivant la droite MT′.

II.

6. Les trois axes d'une surface du second ordre étant donnés de position, cette surface est déterminée si l'on se donne un de ses points m et la normale en ce point. Ces données sont donc suffisantes pour obtenir en ce point les directions des axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux.

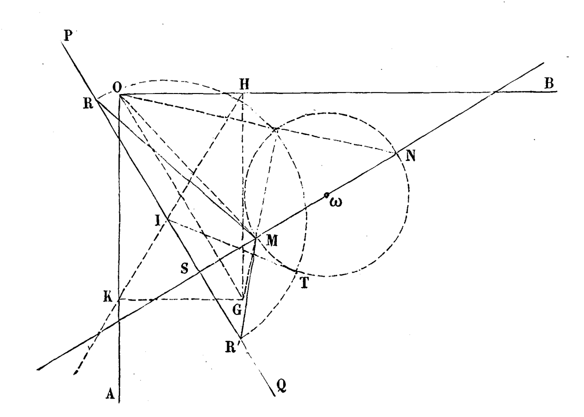
A cet effet, on peut, pour déterminer les axes de l'indicatrice, employer la construction suivante :

Soient OA *et* OB *deux des axes de la surface du second ordre,* M *la projection du point* m *sur le plan de ces axes,* N *et* PQ *les traces sur ce même plan de la normale et du plan tangent au point* M; PQ *est, comme on le sait, perpendiculaire à* MN.

Construisons le point de rencontre G *des hauteurs du triangle* OMN; *puis, de ce point, abaissons des perpendiculaires* GH *et* GK *sur les axes* OA *et* OB. *La droite* KH, *qui joint leurs pieds, rencontre* PQ *au point* I. *Menons du point* I, *au cercle décrit sur* MN *comme diamètre, une droite touchant ce cercle au point* T, *et, du point* I *comme centre, décrivons un cercle ayant* IT *pour rayon : ce cercle rencontre* PQ *en deux points* R *et* R′.

Les droites MR *et* MR′ *sont les projections sur le plan* OAB *des axes de l'indicatrice au point* M.

Démonstration. — Soient mL un des axes de l'indicatrice au point m et F le centre de courbure de la section normale correspondante. Deux des normales, que l'on peut mener du point F à la surface, ont leurs pieds en m et un point m' situé à une distance infiniment petite, sur l'axe mL; on sait d'ailleurs que les pieds



des normales, le point F et les quatre sommets du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan de l'infini, sont situés sur une même cubique gauche. Il en résulte que, si l'on joint le point m au point m', au point F et aux quatre sommets du tétraèdre, on a six droites situées sur un même cône du second ordre.

En d'autres termes, les droites menées par le point m parallèlement aux axes de la surface, la normale en ce point, le diamètre passant par ce point et l'axe de l'indicatrice mT, sont sur un même cône du second ordre. On voit que ce cône est circonscrit à un trièdre trirectangle; par suite, et en vertu d'une proposition bien connue, le deuxième axe mT' de l'indicatrice au point m, étant perpendiculaire aux deux génératrices mT et mF du cône, est également situé sur ce cône.

Considérons les traces de ces six droites sur le plan OAB; elles sont situées sur une même conique; d'où cette conclusion :

Les traces des axes de l'indicatrice sur le plan OAB sont données par l'intersection de la droite PQ avec l'hyperbole équilatère passant par les points O, M, N, et ayant ses asymptotes parallèles aux droites OA et OB.

Pour construire ces points d'intersection, je remarque que le point G, où se rencontrent les hauteurs du triangle OMN, est situé sur cette hyperbole. Si donc du point G on abaisse des perpendiculaires sur les axes OA et OB, la droite HK, qui joint leurs pieds, est le diamètre de l'hyperbole conjuguée à la direction PQ. En effet, cette droite fait avec les axes des angles égaux à ceux que fait avec ces axes la droite PQ, et, de plus, elle passe par le point milieu de la corde OG de l'hyperbole, corde parallèle à PQ. Le point I, où KH rencontre PQ, est donc le point milieu des deux points R et R′, où les axes de l'indicatrice rencontrent la trace du plan tangent.

Pour achever de déterminer ces points, je remarque que l'angle RmR′ est droit. Considérons la perpendiculaire abaissée du point m sur PQ; le pied de cette perpendiculaire est le point S, où PQ rencontre MN. On a

$$\overline{SR}.\overline{SR'} = \overline{mS}^2 = \overline{SM}.\overline{SN};$$

ou bien encore, si l'on désigne par ω le centre du cercle décrit sur MN comme diamètre, et par ρ le rayon de ce cercle,

$$\overline{IR}^2 - \overline{IS}^2 = \overline{S\omega}^2 - \rho^2;$$

d'où l'on conclut que les cercles, décrits respectivement sur RR′ et MN comme diamètres, se coupent à angle droit; et de là résulte immédiatement la construction que j'ai donnée ci-dessus.

7. Pour déterminer maintenant les projections sur le plan AOB des centres de courbure principaux de la surface au point m, il suffit d'inscrire une parabole dans chacun des quadrilatères formés respectivement par les droites OA, OB, MN, MR et OA, OB, MN, MR′. Les points de contact de ces paraboles avec la droite MN sont les projections cherchées des centres de courbure principaux, et ils se déterminent, comme on le sait, très facilement au moyen de simples lignes droites.

Cette construction est justifiée par le théorème suivant :

Si, sur le plan de deux des axes de symétrie OA *et* OB *d'une surface de second ordre, on projette la normale en un point m de cette surface et l'un des axe de l'indicatrice en*

ce point, la parabole, tangente aux projections de ces deux droites et aux axes OA *et* OB, *touche la projection de la normale en un point qui est la projection du centre de courbure de la section normale passant par l'axe de l'indicatrice considérée.*

Démonstration. — Soient mL l'axe de l'indicatrice considérée et F le centre de courbure principal correspondant. Comme je l'ai déjà rappelé, deux des normales que l'on peut abaisser du point F sur la surface ont leurs pieds au point m et au point m' situé à une distance infiniment petite sur ML.

Soit p le pied d'une autre normale quelconque passant par le point F; on sait que les sommets du tétraèdre F$mm'p$ et du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan à l'infini sont situés sur une même cubique gauche.

Par suite, en vertu d'un théorème connu, les faces de ces tétraèdres sont osculatrices d'une autre cubique gauche, et le plan normal principal Fmm' est coupé par les sept autres faces suivant cinq droites tangentes à une même conique.

En d'autres termes, le plan normal principal passant par mL coupe les trois plans principaux de la surface suivant trois droites. Ces trois droites et la normale au point m sont tangentes à une parabole touchant la normale au point F; par suite, les projections des trois droites et de la normale sont tangentes à une parabole touchant la projection de la normale, au point qui est la projection de F; d'où la proposition énoncée ci-dessus.



SUR CERTAINS RÉSEAUX SINGULIERS

FORMÉS

PAR DES COURBES PLANES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1877.

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai z, ζ et les quantités analogues comme des quantités égales à l'unité et introduites seulement pour rendre les formules homogènes.

Cela posé, A, B et C désignant trois polynomes du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à x et y et liés par la relation

$$Ax + By + Cz = 0, \tag{1}$$

on voit qu'en faisant varier ξ et η, l'équation

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0 \tag{2}$$

représente une infinité de courbes du $n^{\text{ième}}$ degré. Ces courbes forment un réseau, et l'on pourra généralement, par deux points pris arbitrairement dans le plan, faire passer une courbe appartenant à ce réseau.

Une telle courbe est déterminée par les valeurs particulières que l'on donne à ξ, η, ζ; il est clair d'ailleurs, en vertu de l'équation (1), que le point M, dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, appartient à cette courbe; je dirai que le point M est son point principal.

Une courbe du réseau singulier (2) est évidemment déterminée par son point principal.

2. Toutes les courbes du réseau ont en commun tous les points communs aux courbes $A = 0$ et $C = 0$.

Pour déterminer le nombre de ces points, je remarque que, si l'on désigne respectivement par P et par Q l'ensemble des termes du degré n, par rapport à x et y, dans A et B, on a identiquement, en vertu de la relation (1),

$$Px + Qy = 0.$$

On a donc, U désignant un polynome homogène et du degré $(n-1)$ par rapport à x et y

$$(3) \qquad P = Uy \quad \text{et} \quad Q = -Ux.$$

Cela posé, les courbes $A = 0$ et $B = 0$ se coupent en n^2 points qui, en vertu de (1), se trouvent sur la courbe $Cz = 0$; des relations (3) il résulte, d'ailleurs, que $(n-1)$ de ces points d'intersection se trouvent sur la droite de l'infini $z = 0$; les $(n^2 - n + 1)$ autres points d'intersection se trouvent donc à la fois sur les trois courbes $A = 0$, $B = 0$ et $C = 0$.

D'où la conclusion suivante :

Toutes les courbes du réseau passent par $(n^2 - n + 1)$ *points fixes.*

Je dirai que ces points sont les pivots du réseau.

3. En vertu des équations (1) et (2), on voit que l'équation d'une quelconque des courbes du réseau peut se mettre sous la forme

$$A(x - \xi) + B(y - \eta) = 0,$$

ξ et η étant les coordonnées de son point principal.

Soit

$$A(x - \xi') + B(y - \eta') = 0$$

une autre courbe du réseau ayant pour point principal (ξ', η'); si A et B ne sont pas nuls en même temps, pour tout point commun aux deux courbes, on aura

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{y - \eta'}{x - \xi'}.$$

D'où la proposition suivante :

Indépendamment des $(n^2 - n + 1)$ *points qui leur sont com-*

muns, deux courbes quelconques du réseau se coupent en $(n-1)$ *autres points qui sont situés sur une même droite. Le* $n^{ième}$ *point où cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal de cette courbe.*

4. De là se déduisent immédiatement quelques corollaires dont la démonstration est immédiate et qu'il suffit d'énoncer :

1° *Si deux courbes du réseau se coupent en* $(n-1)$ *points distincts des pivots, on peut par ces* $(n-1)$ *points faire passer une infinité de courbes du réseau; les points principaux de ces courbes sont situés sur la droite contenant les* $(n-1)$ *points d'intersection.*

2° *Étant donnée une courbe quelconque du réseau ayant pour point principal le point* M *et étant pris arbitrairement dans le plan le point* P, *si l'on mène* PM, *cette droite rencontre la courbe en* $(n-1)$ *points distincts du point* M; *ces* $(n-1)$ *points et le point P sont situés sur une courbe du réseau ayant pour point principal le point* P.

5. Les résultats qui précèdent peuvent encore s'énoncer ainsi : Étant donnée une droite dans le plan, les courbes du réseau, qui ont pour points principaux les différents points de la droite, ont en commun $(n-1)$ points situés sur cette droite ; je les appellerai, pour abréger, les *points centraux* de la droite.

Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Si une droite tourne autour d'un point fixe, le lieu de ses points centraux est la courbe du réseau ayant ce point fixe pour point principal.

6. Étant pris un point quelconque M dans le plan, imaginons la courbe du faisceau ayant pour point principal le point M et menons par ce point les tangentes à la courbe dont le point de contact est distinct de M.

Je dis que ces droites sont tangentes à une même courbe K. En effet, MA étant l'une de ces tangentes et A le point où elle touche la courbe, si l'on désigne par M_1 un point quelconque de la droite MA : la courbe du réseau ayant M_1 pour point principal passe par

les $(n-1)$ points distincts de M où la première courbe coupe MA : elle rencontre donc MA en deux points confondus en A, et lui est tangente en ce point. Les deux faisceaux de droite émanant du point M et du point M_1 ont donc la droite MA en commun et la proposition est démontrée.

On peut, d'ailleurs, du point M, mener à la courbe du réseau qui a M pour point principal (n^2-n-2) tangentes ayant un point de contact distinct de M.

D'où le théorème suivant :

Si, de chaque point M *du plan, on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *toutes ces droites enveloppent une même courbe* K, *qui est de la classe* (n^2-n-2).

7. Supposons le point M choisi de telle sorte que la courbe du réseau, qui a M pour point principal, possède un point double : deux des tangentes issues du point M coïncideront, d'où il suit que le point M est situé sur K.

D'où cette conclusion :

La courbe K *est le lieu des points principaux des courbes du réseau qui possèdent un point double.*

Si la courbe du réseau ayant (ξ, η) pour point principal a un point double, on a simultanément les trois équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi \dfrac{dA}{dx} + \eta \dfrac{dB}{dx} + \zeta \dfrac{dC}{dx} = 0, \\ \xi \dfrac{dA}{dy} + \eta \dfrac{dB}{dy} + \zeta \dfrac{dC}{dy} = 0, \\ \xi \dfrac{dA}{dz} + \eta \dfrac{dB}{dz} + \zeta \dfrac{dC}{dz} = 0; \end{cases}$$

et l'équation de la courbe K s'obtiendra en éliminant x, y et z entre ces trois relations.

D'où il suit que :

La courbe K *est du degré* $3(n-1)$.

8. Des considérations qui précèdent résulte encore la proposition suivante :

Si, de chaque point M *du plan, on mène à la courbe du ré-*

seau dont ce point est le point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de M, *les points de contact de toutes ces tangentes sont situés sur une même courbe* H, *qui est aussi le lieu des points doubles des courbes du réseau.*

Il est facile de démontrer analytiquement l'identité de ces deux lieux.

Il est clair, en effet, que l'équation du lieu des points doubles du réseau s'obtient en éliminant ξ, η, ζ entre les équations (4); cette équation est donc

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & \frac{dC}{dx} \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & \frac{dC}{dy} \\ \frac{dA}{dz} & \frac{dB}{dz} & \frac{dC}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & \frac{dC}{dx} \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & \frac{dC}{dy} \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

ou, encore, puisque l'on a identiquement $C = -Ax - By$,

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & -A \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & -B \\ A & B & 0 \end{vmatrix} = A^2\frac{dB}{dy} - AB\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right) + B^2\frac{dA}{dx} = 0.$$

D'autre part, soit

$$(5) \qquad A(x-\xi) + B(y-\eta) = 0$$

l'équation de la courbe du réseau ayant pour point principal le point (ξ, η); l'équation de la tangente au point (x, y) de cette courbe est

$$(X-x)\left[A + \frac{dA}{dx}(x-\xi) + \frac{dB}{dx}(y-\eta)\right] + (Y-y)\left[B + \frac{dA}{dy}(x-\xi) + \frac{dB}{dy}(y-\eta)\right] = 0;$$

en exprimant que cette tangente passe par le point (ξ, η), on aura la relation

$$(\xi - x)A + (\eta - y)B - \frac{dA}{dx}(x-\xi)^2 - \left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right)(x-\xi)(y-\eta) - \frac{dB}{dy}(y-\eta)^2 = 0.$$

Éliminant $(\xi - x)$ et $(\eta - y)$ entre cette relation et la relation (5), il vient

$$A^2\frac{dB}{dy} - AB\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right) + B^2\frac{dA}{dx} = 0,$$

ce qui est bien l'équation que nous avions trouvée pour le lieu des points doubles du réseau.

La proposition que j'avais énoncée est donc vérifiée, et l'on voit en outre que la courbe H est du degré $3(n-1)$.

9. Soient deux courbes de degré n; supposons que $(n-1)$ de leurs n^2 points d'intersection soient situés sur une même ligne droite, je dis que leurs $(n^2 - n + 1)$ autres points d'intersection sont les pivots d'un réseau singulier de l'espèce de ceux que je viens d'examiner.

En effet, la propriété dont je parle étant projective, on peut supposer que la droite qui renferme $(n-1)$ des points d'intersection est la droite de l'infini; et, en choisissant convenablement les axes, on voit que les équations des deux courbes peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$Py + Q = 0 \qquad \text{et} \qquad Px - Q' = 0,$$

Q et Q′ désignant des polynomes du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré en x et y, et P un polynome homogène et du même degré par rapport à ces variables. De là résulte immédiatement que l'équation

$$\xi(Q + Py) + \eta(Q' - Px) - \zeta(Qx + Q'y) = 0$$

est celle d'un réseau singulier ayant pour pivots les $(n^2 - n + 1)$ points d'intersection des deux courbes données qui ne sont pas situés à l'infini.

10. De là résulte encore que les courbes du troisième degré,

passant par sept points fixes, forment un réseau singulier du troisième ordre.

La courbe K est alors de la quatrième classe et du sixième degré : c'est donc la courbe la plus générale de la quatrième classe. Je ne m'étendrai pas sur ce sujet; c'est en effet des propriétés de ce réseau particulier que M. Aronhold a déduit la solution du problème suivant : *Construire la courbe de quatrième classe ayant sept points doubles donnés* (ou, pour parler plus exactement, du problème corrélatif : *construire la courbe du quatrième degré ayant pour tangentes doubles sept droites données*). Je renverrai à cet égard au Mémoire de l'illustre géomètre (¹).

11. On sait que, généralement, les courbes du quatrième ordre qui passent par treize points fixes ont également en commun trois autres points parfaitement déterminés et forment un faisceau (²).

On voit néanmoins, par ce qui précède, que si deux courbes du quatrième ordre, passant par treize points donnés, se coupent en trois autres points situés en ligne droite, les courbes qui passent par ces treize points forment un faisceau; en d'autres termes, on peut toujours faire passer une de ces courbes par ces points et deux points pris arbitrairement dans le plan.

On peut, en outre, énoncer la proposition suivante :

Si, des seize points d'intersection de deux courbes du quatrième ordre, trois sont situés en ligne droite, deux courbes quelconques du même ordre passant par les treize autres points d'intersection se rencontrent en trois autres points qui sont également en ligne droite.

(¹) Aronhold, *Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der* 28 *Doppeltangenten einer allgemeinen Curve 4ten Grades* (*Monatsbericht der K. P. A. zu Berlin*, 1864, p. 499).

(²) Salmon, *Higher plane curves*, 2ᵉ édition, p. 16.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

FOYERS DES COURBES ALGÉBRIQUES

ET DES

FOCALES DES CONES ALGÉBRIQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

I.

1. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai donnée dans ma Note *Sur les polaires d'une droite relativemeut aux courbes et aux surfaces algébriques* (1).

Étant données deux courbes quelconques K^m *et* K^n, *de classes respectivement égales à* m *et à* n, *la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux* mn *tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux* mn *droites, qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

Supposons, pour fixer les idées, que K^m soit une courbe réelle (ou du moins ayant une équation réelle), et soient $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ses m foyers réels; supposons, en outre, que K^n se réduise aux deux ombilics I et J du plan (2).

Les tangentes communes à K^m et à K^n se composent des sys-

(1) *Bulletin de la Société mathématique,* t. III, p. 174.

(2) J'appelle ainsi, pour abréger, les deux points situés à l'infini et communs à tous les cercles du plan.



tèmes de droites isotropes, se croisant aux foyers F_1, F_2, ..., F_m. Étant donné un point quelconque M du plan, sa polaire relativement aux deux droites isotropes issues du foyer F_i est la droite menée par ce point perpendiculairement à MF_i; donc la polaire de M relativement aux tangentes communes à K^m et à K^n est la polaire de ce point relativement aux m droites menées respectivement par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point M.

Considérons d'autre part les diverses droites isotropes qui passent par les points de contact des tangentes menées du point M à K^n; T désignant l'un quelconque de ces points de contact, la polaire du point M, relativement aux deux droites isotropes se croisant au point T, est la normale menée à la courbe en ce point.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de m^n classe, la polaire d'un point quelconque M *du plan, par rapport aux droites menées respectivement par chacun des m foyers réels de la courbe perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point* M, *se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites menées normalement à la courbe aux points de contact des diverses tangentes issues du point* M.

Cette proposition peut encore s'énoncer sous la forme suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe de classe m, on mène les nm droites tangentes à la courbe, le centre harmonique des n points de contact relativement au point* M *est le même que le centre harmonique des m foyers réels* [1].

Mais cet énoncé, plus concis, est souvent d'un usage moins facile dans les applications, et l'autre, comme je le ferai voir, s'étend sans difficulté aux cônes algébriques.

---

[1] *Voir* à ce sujet ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique,* février 1875).

2. Un des cas particuliers les plus intéressants est celui où tous les foyers de la courbe sont à l'infini. On a alors ce théorème :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe ayant tous ses foyers à l'infini, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, la polaire du point* M *relativement à ces normales est située à l'infini.*

Ainsi, en particulier, l'hypocycloïde à trois points de rebroussement ayant tous ses foyers à l'infini, on a la proposition suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une hypocycloïde à trois points de rebroussement, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, ces normales forment un triangle dont le centre de gravité est le point* M.

3. Comme application, je déduirai de là un beau théorème dû à M. Liouville :

Soient une droite D et une courbe A de degré *m assujettie à la seule condition de ne pas passer par les ombilics du plan.*

Considérons une droite de longueur constante R et se déplaçant de telle sorte qu'une de ses extrémités décrive la droite D, tandis que l'autre décrit la courbe A. L'enveloppe de cette droite est une courbe K ayant tous ses foyers à l'infini ; en effet, la droite ne peut passer par un ombilic que quand elle se confond avec la droite de l'infini ; dans toute autre position, la longueur interceptée entre le point où elle rencontre D et l'un quelconque des points où elle rencontre A est évidemment nulle, puisque cette courbe ne passe pas par les ombilics.

Soit maintenant un point quelconque M pris sur la droite D ; cherchons les tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K. Je remarque d'abord que D est elle-même une tangente multiple à cette courbe ; je désignerai par d, d', ... ses divers points de contact.

En second lieu, si, du point M comme centre avec R comme rayon, nous décrivons un cercle rencontrant la courbe A aux points a, a', a'', ..., les diverses droites Ma, Ma', Ma'', ... seront aussi tangentes à K.

Considérons en particulier une de ces tangentes, Ma par exemple; si au point M nous menons une perpendiculaire à D et au point a une normale à la courbe A, nous savons, en désignant par α le point de rencontre de ces deux droites, que la normale, menée à l'enveloppe de la droite de longueur constante aM au point où elle touche son enveloppe, passe par le point α.

4. Du théorème général que j'ai donné plus haut (n° 1), il résulte que, l'enveloppe K ayant tous ses foyers à l'infini, si l'on construit la polaire du point M relativement aux droites menées en d, d', ... perpendiculairement à D et aux droites menées normalement à K aux points où les droites Ma, Ma', ... touchent cette courbe, cette polaire est située à l'infini.

En particulier, menons par le point M une sécante perpendiculaire à D; elle rencontrera les droites issues des points d, d', ... en des points situés à l'infini et dont il n'y a pas à tenir compte, puis les normales élevées aux points de contact de Ma, Ma', Ma'', ... avec leur enveloppe au point α et en d'autres points analogues α', α'', ...; on aura donc la relation

$$\frac{1}{M\alpha} + \frac{1}{M\alpha'} + \frac{1}{M\alpha''} + \ldots = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que, la droite D ayant une direction arbitraire, il en est de même de la direction de la sécante qui lui est perpendiculaire, on pourra énoncer ce beau théorème, dû à M. Liouville :

Si, aux différents points où un cercle rencontre une courbe plane, on mène des normales à cette courbe, la polaire du centre du cercle relativement à ces normales est située à l'infini.

5. Je considérerai encore, comme application, un système de coniques homofocales ayant pour foyers les deux points F et F'.

Soit M un point quelconque du plan; considérons les droites passant par les points F et F' et respectivement perpendiculaires aux directions MF et MF'. Si l'on désigne par Δ la polaire du point M relativement à ces deux droites, on voit que :

Si du point M *on mène des tangentes à l'une quelconque des*

coniques qui ont pour foyers les points F *et* F′, *puis les normales aux points de contact, la polaire des points* M *relativement à ces deux normales est la droite fixe* Δ.

En particulier, la polaire du point M relativement aux deux normales passe par le point de rencontre de ces normales.

D'où le théorème suivant :

Si, d'un point M, *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F′, *puis les normales aux points de contact, le lieu des points de rencontre de ces normales est une droite.*

Il est clair que cette droite passe par les centres de courbure des deux coniques homofocales qui se croisent au point M.

6. Les deux points F et F′ étant donnés, on voit qu'à chaque point M du plan correspond une droite Δ qu'il est facile de construire.

Réciproquement, à chaque droite Δ correspondent, comme on le démontre aisément, trois points M. Si une droite Δ tourne autour d'un point fixe N, le lieu des points M correspondants est une courbe du troisième ordre passant par les ombilics, par conséquent une anallagmatique et de l'espèce particulière que j'ai étudiée sous la dénomination de *cassiniennes* (¹).

Cette courbe H peut évidemment être aussi définie de la façon suivante :

Étant donné un point fixe N du plan, considérons une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points donnés F et F′, puis abaissons du point N les quatre normales à la courbe. Les tangentes en ces points forment un quadrilatère complet dont les six sommets décrivent la courbe H lorsque la conique varie.

7. Je rappellerai brièvement la définition et les propriétés principales des cassiniennes.

Une cassinienne est généralement une courbe anallagmatique

(¹) *Sur les cassiniennes planes et sphériques* (*Bulletin de la Société philomathique,* mars 1868).

du quatrième ordre dont les divers points peuvent se distribuer en couples jouissant des propriétés suivantes :

1° Le lieu des conjugués harmoniques d'un point quelconque du plan, relativement à chacun des couples de points conjugués d'une cassinienne, est un cercle.

En particulier, le lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués est un cercle.

2° Il existe dans le plan deux points fixes jouissant de la propriété que ces deux points fixes et deux points conjugués quelconques se trouvent sur un même cercle qu'ils partagent harmoniquement.

Dans le cas où le cercle, lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués, se réduit à une droite, le degré de la courbe s'abaisse au troisième, et l'on a une cassinienne cubique.

Si l'on joint un point quelconque d'une telle courbe à deux couples de points conjugués, on obtient deux couples de droites ayant mêmes bissectrices.

La courbe H, définie ci-dessus, est une cassinienne cubique, et l'on a la proposition suivante :

Si d'un point fixe N, *pris dans le plan, on abaisse des normales sur l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points fixes* F *et* F′, *les tangentes menées en ces points forment un quadrilatère complet. Les trois couples de sommets opposés de ce quadrilatère complet sont trois couples de points conjugués d'une même cassinienne cubique, que ces sommets décrivent quand on fait varier la conique* (¹).

(¹) Les tangentes, menées aux pieds des normales, roulent en même temps sur une parabole fixe.

Considérons, en effet, une conique C et la parabole P qui est l'enveloppe des polaires d'un point donné M par rapport aux diverses coniques qui ont les mêmes foyers que C. Les tangentes communes à C et à P touchent C en quatre points et les normales en ces points passent par le point M.

Cette propriété s'établit aisément en s'appuyant sur une importante proposition due à M. Chasles :

Les pôles d'une droits fixe, par rapport à un système de coniques homofocales, sont situés sur une même ligne droite normale à une des coniques du système.

J'ajouterai que le foyer de la parabole P est le point conjugué harmonique du point M relativement aux foyers de la conique C.

De nombreuses propriétés des normales à un système de coniques homofocales découlent immédiatement de la proposition précédente, mais je n'insisterai pas ici sur ce point, qui demande quelques développements et sur lequel je reviendrai dans un autre article; je me contente de le mentionner en passant.

II.

8. On peut facilement étendre aux cônes algébriques les propositions qui précèdent.

Le théorème fondamental que j'ai rappelé plus haut (n° 1) peut, en effet, s'énoncer de la façon suivante :

Étant donnés deux cônes algébriques C *et* C′ *ayant même sommet* S *et une droite quelconque* D *passant par ce sommet, considérons les divers plans que par la droite* D *on peut mener tangentiellement au cône* C; *soit* (I) *l'ensemble des arêtes de contact. Appelons de même* (I′) *l'ensemble des arêtes de contact des plans menés par* D *tangentiellement au cône* C′; *puis imaginons que par chacune des arêtes* (I) *et chacune des arêtes* (I′) *on fasse passer un plan; on aura ainsi un ensemble de plans que je désigne par* (P).

Cela posé, le plan polaire de la droite D *relativement au système de plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans tangents aux deux cônes.*

Supposons, pour fixer les idées, que C soit un cône réel (ou du moins ait une équation réelle) et que F_1, F_2, F_3, ... désignent ses droites focales réelles, que de plus C′ soit un cône isotrope.

Les plans tangents communs aux deux cônes sont les plans isotropes passant par les droites F_1, F_2, F_3, ...; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant l'une quelconque de ces droites, F_1 par exemple, est le plan passant par F_1 et mené perpendiculairement au plan de F_1 et de D.

D'autre part, si T_1, T_2, T_3, ... désignent les arêtes de contact des plans menés par D tangentiellement au cône C, les divers plans dont j'ai désigné ci-dessus l'ensemble par (P) sont les plans isotropes passant par les droites T_1, T_2, T_3, ...; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant

l'une de ces droites, T_1 par exemple, est le plan passant par T_1 mené perpendiculairement au plan de T_1 et de D.

Par suite, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donné un cône algébrique et une droite quelconque D *passant par le sommet de ce cône, par chacune des focales du cône faisons passer un plan perpendiculaire au plan qui contient cette focale et la droite* D; *soit* (P) *l'ensemble des plans ainsi obtenus.*

Cela posé, le plan polaire de D *relativement aux plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans menés normalement au cône par les arêtes de contact des divers plans que l'on peut par* D *mener tangentiellement à ce cône.*

9. Comme application, considérons l'un quelconque des cônes du second ordre qui ont pour focales réelles deux droites données F et F'. Soient D une droite quelconque passant par le sommet du cône et Δ le plan polaire de D relativement aux plans passant par F et F', et respectivement perpendiculaires aux plans déterminés par les droites FD et les droites F'D.

Si par D on mène deux plans tangents au cône, puis des plans normaux par les arêtes de contact, le plan polaire de D relativement à ces plans normaux est le plan Δ.

En particulier, la droite d'intersection des plans normaux est dans le plan Δ. Donc :

Étant donnés un système de cônes homofocaux du second ordre et une droite fixe passant par le sommet de ce cône, si par cette droite on mène des plans tangents à l'un des cônes du système, puis des plans normaux par les arêtes de contact, la droite suivant laquelle se coupent les deux plans normaux décrit un plan lorsqu'on fait varier le cône.

10. Si par une arête d'un cône on imagine le plan normal à ce cône, puis le plan mené normalement par l'arête infiniment voisine, l'intersection de ces deux plans est l'axe d'un cône de révolution osculateur du cône donné le long de l'arête considérée. Nous l'appellerons l'*axe de courbure* du cône suivant cette arête.

Cela posé, il est clair, d'après ce qui précède, que le plan Δ déterminé comme je l'ai dit, et qui correspond à la droite D, contient les axes de courbure des deux cônes homofocaux du système donné qui se coupent suivant la droite D, et de là découle un moyen simple de construire l'axe de courbure d'un cône du second degré suivant une arête donnée, lorsque l'on connaît les focales de ce cône.

Je ferai même observer que la connaissance du plan Δ fait connaître non seulement l'axe de courbure, mais encore l'accélération de courbure, et que des considérations de tout point semblables s'appliquent aux cônes de tous les degrés; je ne crois pas utile de m'étendre davantage sur ce sujet.

11. Le théorème de M. Liouville, dont j'ai donné plus haut la démonstration (n° 3), s'étend aussi à un cône algébrique quelconque, en considérant l'intersection de ce cône avec un cône de révolution.

On obtiendrait facilement cette généralisation, au moyen des théorèmes précédents, en considérant la surface enveloppée par le plan déterminé par deux droites faisant un angle constant et dont l'un des côtés décrit un cône pendant que l'autre se meut dans un plan passant par le sommet de ce cône.

Mais le théorème auquel on parvient ainsi se complique, à cause du rôle qu'y jouent les plans cycliques du cône; il n'a ni la simplicité ni l'utilité de celui de M. Liouville, et je ne crois pas devoir le mentionner ici.



SUR LA

COURBE ENVELOPPÉE PAR LES AXES DES CONIQUES

QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS DONNÉS

ET SUR LES

AXES DES SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND ORDRE

QUI PASSENT PAR CINQ POINTS DONNÉS.

SUR LES LIGNES SPIRIQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

I.

1. La courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés est, comme on le sait, une courbe du quatrième degré et de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini. L'équation d'une telle courbe ne renferme que six constantes arbitraires et, comme quatre points donnés introduisent huit constantes, il en résulte que la même courbe peut être regardée d'une infinité de façons différentes comme l'enveloppe des axes d'une conique assujettie à passer par quatre points. Je me propose de déterminer, pour une courbe donnée de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, les divers systèmes de quatre points qui permettent le mode de génération indiqué.

2. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai fait connaître depuis longtemps dans les *Nouvelles Annales :*

Étant donnés sur une conique deux points fixes A *et* B *et un*

point M *mobile sur cette conique, si, aux points milieux des cordes* AM *et* BM, *on élève des perpendiculaires à ces cordes, le segment, intercepté sur l'un quelconque des axes de la conique par ces perpendiculaires, demeure constant quand le point* M *se meut sur la courbe.*

Supposons que le point M vienne successivement coïncider avec deux points donnés C et D de la conique; on aura la proposition suivante :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, aux points milieux des cordes* AC, BC, AD *et* BD, *élevons des perpendiculaires à ces cordes et désignons respectivement par* A′, B′, A″ *et* B″ *ces perpendiculaires; cela posé, les segments, interceptés sur l'un quelconque des axes de la conique par les perpendiculaires* A′ *et* B′ *d'une part et par les perpendiculaires* A″ *et* B″ *d'autre part, sont égaux entre eux.*

Il est clair que, le quadrangle ABCD étant donné, on pourrait considérer d'autres cordes que celles que je viens de considérer et qui donneraient lieu à des propositions semblables. En examinant cette question, on voit facilement que ces propositions sont contenues dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, désignons par* α, β, γ *et* δ *les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former avec trois quelconques de ces sommets. Cela posé, les trois couples de côtés opposés du quadrangle formé par les points* α, β, γ *et* δ *interceptent, sur l'un quelconque des axes de la conique, trois segments dont le point milieu est le même.*

3. On sait, par le théorème de Desargues, que généralement les six côtés d'un quadrangle sont coupés par une droite quelconque en six points en involution; on voit ici que les six côtés du quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ sont coupés, par un axe quelconque d'une des coniques passant par les quatre points A, B, C et D, en six points formant une involution dont un des points doubles est rejeté à l'infini.

Imaginons les deux coniques circonscrites au quadrangle ABCD

et tangentes à cet axe; leurs points de contact avec cette droite sont précisément les deux points doubles de l'involution dont je viens de parler; l'une de ces coniques est donc asymptote de l'axe.

En d'autres termes :

Un axe quelconque d'une conique circonscrite au quadrangle ABCD est une asymptote d'une conique circonscrite au quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$.

4. Pour abréger le discours, étant donné un quadrangle quelconque ABCD, je désignerai sous le nom de *quadrangle dérivé* le quadrangle dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB.

On peut donc dire que :

L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé.

5. Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ un quadrangle donné et K la courbe enveloppée par les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle.

Une telle courbe peut être engendrée de cette façon d'une infinité de manières. Considérons, en effet, une quelconque des coniques circonscrites au quadrangle et soient D et D' ses deux asymptotes; nous dirons que ces deux droites sont deux tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, on sait [1] que, si l'on considère deux couples quelconques de tangentes conjuguées, ces deux couples se rencontrent en quatre points formant un quadrangle Q et que les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle enveloppent la courbe K.

Si donc on construit le quadrangle Q' ayant pour dérivé le quadrangle Q, les axes des coniques circonscrites à Q' envelopperont la courbe K, et l'on obtiendra toutes les façons semblables d'engendrer cette courbe en considérant tous les quadrangles qui ont pour dérivés les divers quadrangles Q.

---

[1] *Voir* STEINER, *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse und vierten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 53, p. 231) et CREMONA, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Ibid.*, t. 64, p. 101).

6. La projection orthogonale d'une courbe K, sur un plan quelconque, est évidemment une courbe de la même espèce.

Soient A, B, C et D quatre points donnés et K l'enveloppe des axes des coniques passant par ces points; désignons par K′ la projection de cette courbe sur un plan P, cette projection peut être considérée comme l'enveloppe des axes des coniques passant par quatre points A′, B′, C′ et D′ que l'on construira de la façon suivante :

Dans le plan du quadrangle ABCD, imaginons le quadrangle dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$ et projetons ce dernier quadrangle sur le plan P; soit $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ cette projection. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut, que les points cherchés A′, B′, C′ et D′ seront les sommets du quadrangle qui a pour dérivé $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

7. Il peut être utile dans certains cas de construire le quadrangle qui a pour dérivé un quadrangle donné $\alpha\beta\gamma\delta$.

Soient A, B, C et D les sommets du quadrangle cherché; en sorte que α désigne, par exemple, le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, β le centre du cercle circonscrit au triangle ACD, etc.

On voit immédiatement que le symétrique du point A relativement à la droite $\beta\delta$ est le point C et que le symétrique du point C relativement à la droite $\beta\alpha$ est le point D; on a donc les deux relations suivantes

$$A\beta\gamma + C\beta\gamma = 2\delta\beta\gamma \qquad \text{et} \qquad C\beta\gamma + D\beta\gamma = 2\alpha\beta\gamma;$$

les points A et D étant d'ailleurs aussi symétriques par rapport à la droite $\beta\gamma$, on a également

$$A\beta\gamma + D\beta\gamma = 0.$$

Chacune des trois relations précédentes doit être vérifiée *à un multiple près de* 2π; on en déduit facilement

$$2A\beta\gamma = 2(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\gamma) = 2\delta\beta\alpha,$$

d'où

$$A\beta\gamma = \delta\beta\alpha,$$

relation qui doit être vérifiée *à un multiple près de* π.

Cette dernière relation détermine une droite contenant le

point A; la relation

$$A\gamma\delta = \beta\gamma\alpha,$$

que l'on obtient d'une façon analogue, détermine une seconde droite contenant le point que l'on peut ainsi construire facilement.

On construirait de même les autres sommets B, C et D du quadrangle cherché.

8. Dans le cas particulier où le quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ est formé des sommets d'un triangle et du point de rencontre des hauteurs de ce triangle, on sait que l'enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par ces quatre points est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Le quadrangle ABCD, qui a pour dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$, est alors le symétrique de ce dernier quadrangle relativement au centre de l'hypocycloïde.

On voit donc que :

Si l'on considère les trois sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs de ce triangle, les asymptotes des coniques passant par ces quatre points enveloppent une hypocycloïde à trois points de rebroussement, tandis que les axes de ces courbes enveloppent la courbe symétrique de cette hypocycloïde relativement à son centre.

II.

9. Considérons une conique quelconque C et un axe A de cette conique; soient M et M' deux quelconques de ces points. Par le milieu I du segment MM' menons une perpendiculaire à cette droite et soit H le point où cette perpendiculaire rencontre l'axe. Imaginons maintenant que la conique, en tournant autour de l'axe A, engendre une surface de révolution; les deux points M et M' engendrent deux parallèles de cette surface et la sphère contenant ces deux parallèles a pour centre le point H. Si donc on prend respectivement sur ces deux parallèles deux points arbitraires m et m', on voit que le plan, mené par le milieu du segment mm' et perpendiculairement à ce segment, passe par le point H.

De cette remarque et de la proposition que j'ai rappelée plus haut (nº 2) résulte immédiatement le théorème suivant :

Étant donnés sur une surface du second ordre de révolution

deux points fixes A *et* B *et un point mobile* M, *si, par les points milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des plans perpendiculaires à ces cordes, le segment que ces plans interceptent sur l'axe de révolution de la surface est un segment dont la longueur demeure constante lorsque le point* M *se déplace.*

La même propriété a lieu évidemment relativement à une courbe quelconque tracée sur une surface de révolution du second ordre, lorsque l'on considère sur cette courbe deux points fixes A et B et un point mobile M.

En particulier :

Une courbe quelconque étant tracée sur une surface de révolution du second ordre, considérons deux points quelconques M *et* N *situés sur cette courbe. Menons les plans normaux à la courbe aux points* M *et* N *et désignons respectivement par* m *et* n *les points où ces plans normaux rencontrent l'axe de révolution de cette surface; soit de plus* H *le point où le plan mené par le milieu de la corde* MN *et perpendiculairement à cette corde rencontre cet axe. Cela posé, le point* H *est le milieu du segment* mn.

10. Considérons une *ellipsimbre droite* [1], c'est-à-dire la courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant trois axes communs que l'on peut appeler les axes de l'ellipsimbre.

On sait que cette courbe peut être placée sur une surface du second ordre de révolution ayant l'une quelconque de ces trois droites pour axe de révolution.

Donc :

Étant donnée une ellipsimbre droite et deux points quelconques M *et* N *pris sur cette courbe, les plans menés normalement à la courbe aux points* M *et* N *interceptent sur les trois axes de l'ellipsimbre trois segments; le plan passant par leurs points milieux passe par le point milieu de la corde* MN *et lui est perpendiculaire.*

---

[1] Expression employée d'abord par Frézier et adoptée par M. de la Gournerie dans ses *Recherches sur les surfaces tétraédrales*.

11. Soit S une surface de révolution du second ordre ayant pour axe la droite Δ, et soient A, B, C et D quatre points quelconques situés sur cette surface. Les plans menés par les milieux des cordes AB et BC et perpendiculairement à ces cordes interceptent sur l'axe Δ un segment qui (n° 9) est égal au segment intercepté sur la même droite par les plans menés, par les milieux des cordes AD et DC, perpendiculairement à ces cordes; d'autres propositions semblables s'obtiendraient en considérant les diverses droites qui joignent deux à deux les sommets du tétraèdre ABCD.

Ces diverses propositions peuvent être résumées dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un tétraèdre inscrit dans une surface de révolution du second ordre, considérons les perpendiculaires abaissées sur les faces de ce tétraèdre par le centre de la sphère qui lui est circonscrite; les trois couples de plans opposés que l'on peut mener par ces quatre droites interceptent sur l'axe de la surface trois segments dont le point milieu est le même.*

En d'autres termes :

Si l'on désigne par ε *le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* ABCD *et si l'on mène par le point* ε *une parallèle à l'axe* Δ, *le cône du second degré, ayant pour sommet* ε *et contenant la parallèle dont je viens de parler ainsi que les perpendiculaires aux faces du tétraèdre, est asymptote à l'axe* Δ.

Le plan passant par Δ *et le sommet* ε *est donc tangent au cône.*

12. Les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre que l'on peut mener par quatre points donnés A, B, C et D forment un complexe dont il est facile de trouver, d'après ce qui précède, les propriétés les plus essentielles.

Désignons, comme ci-dessus, par ε le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD et par A′, B′, C′ et D′ les perpendiculaires abaissées du point ε sur les faces du tétraèdre.

Les droites du complexe, situées dans un plan donné P, s'obtiendront facilement; si l'on appelle α', β', γ' et δ' les points où ce

plan est percé par les droites A', B', C' et D', ce sont les asymptotes des coniques passant par les quatre points α', β', γ' et δ'. Ainsi *les droites du complexe, situées dans le plan* P, *enveloppent la courbe de troisième classe étudiée dans le* § I.

Pour obtenir les droites du complexe passant par un point donné O, imaginons les divers cônes du second ordre qui renferment les droites α', β', γ' et δ', et par O menons les plans tangents à ces cônes; *les arêtes de contact forment un cône du troisième degré qui, transporté parallèlement à lui-même, de sorte que son sommet vienne en* O, *donnera le cône du complexe.*

On voit que ce cône ne varie pas et se déplace parallèlement à lui-même lorsque le point O se meut sur une droite passant par le centre ε de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

13. Étant donné un système de cinq points A, B, C, D et E, il est facile de déterminer une surface de révolution du second ordre passant par ces points et ayant pour axe une droite parallèle à une droite donnée Δ.

Soient, en effet, α, β, γ, δ et ε les centres des sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former avec les cinq points donnés, α étant par exemple le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre BCDE, β le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ACDE, etc.

Par le point α, menons une parallèle Δ' à Δ et imaginons le cône du second ordre (α) ayant pour sommet α et pour arêtes les droites Δ', $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ et $\alpha\varepsilon$; par le point β, menons de même une parallèle Δ'' à Δ et imaginons le cône du second ordre (β), ayant pour sommet le point β et ayant pour arêtes les droites Δ'', $\beta\alpha$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$ et $\beta\varepsilon$. Ces deux cônes, comme on le voit, ayant en commun la génératrice $\alpha\beta$, se coupent en outre suivant une cubique gauche.

Cela posé, les plans tangents menés respectivement aux cônes (α) et (β) le long des arêtes Δ' et Δ'' se coupent suivant une droite qui est l'axe d'une surface de révolution du second ordre passant par les points A, B, C, D et E.

14. On déduit encore de là la proposition suivante :

Cinq points étant donnés sur une surface de révolution du second ordre, les cinq centres des sphères circonscrites aux cinq

tétraèdres que l'on peut former en considérant quatre quelconques de ces points sont sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface.

D'où l'on conclut que le système de droites formé par les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre passant par cinq points donnés se confond avec le système formé par les asymptotes des cubiques gauches passant par cinq autres points fixes, ces derniers points étant les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres déterminés par les cinq premiers points.

III.

15. Les théorèmes qui précèdent sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux relatifs aux lignes spiriques et aux surfaces de révolution engendrées par la rotation de ces lignes autour de leur axe.

On appelle *ligne spirique* [1] une courbe plane du quatrième ordre qui possède un axe de symétrie et qui a pour points doubles les deux ombilics du plan.

Cette courbe a deux foyers singuliers situés sur son axe de symétrie. Si ces deux foyers coïncident, la courbe est un ovale de Descartes; dans le cas où l'un des foyers singuliers est rejeté à l'infini, la courbe devient une *cataspirique* et elle n'est plus que du troisième degré. Enfin, si les deux foyers singuliers sont rejetés à l'infini, la courbe devient simplement une conique.

Cela posé, je m'appuierai sur la propriété suivante, que j'ai énoncée dans ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques* (*loc. cit.*) :

Étant donnés deux points fixes A *et* B *situés sur une spirique et un point* M *mobile sur cette courbe, si, par les milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des droites respectivement perpendiculaires à ces cordes, ces perpendiculaires déterminent sur*

---

[1] *Voir*, sur la théorie des lignes spiriques, le Mémoire de M. de la Gournerie, *Sur les lignes spiriques*, inséré dans le *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIV; ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique* (novembre 1869) et ma Note *Sur la cardioïde* (*Nouvelles Annales*, 1878).

l'axe de la courbe deux divisions homographiques dont les points doubles sont les foyers singuliers situés sur cet axe.

D'où la proposition suivante :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les trois couples de côtés opposés du quadrangle dérivé rencontrent l'axe de la courbe en six points en involution; les deux points doubles de cette involution partagent harmoniquement le segment déterminé par les deux foyers singuliers situés sur l'axe.

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les sommets du quadrangle dérivé et les deux foyers singuliers, situés sur l'axe de la courbe, sont sur une même conique.

16. Considérons la surface de révolution Σ engendrée par la rotation d'une spirique autour de son axe de symétrie; nous obtiendrons facilement les théorèmes qui suivent :

Une surface Σ *étant circonscrite à un tétraèdre* ABCD, *si, du centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre faces, ces quatre perpendiculaires et les droites qui joignent le centre de la sphère aux deux foyers singuliers de* Σ *sont situées sur un même cône du second ordre.*

Une surface Σ *passant par cinq points donnés, considérons les centres des cinq sphères circonscrites aux tétraèdres que l'on peut former en prenant quatre quelconques des points donnés; ces cinq centres et les deux foyers singuliers de la surface* Σ *sont situés sur une même cubique gauche.*

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE

CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE

ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE TRIANGLE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

1. Soit un triangle inscrit dans un cercle C et circonscrit à une conique K; si cette conique est une parabole, on sait que son foyer est sur le cercle.

Laissant ce cas de côté, j'énoncerai la proposition suivante :

Soient F *et* G *les deux foyers de la conique,* F' *le point réciproque du foyer* F *relativement au cercle et* O *le centre de ce cercle; si, par le point* F, *on mène une droite parallèle à* OG, *cette droite rencontre* GF' *en un point* R *tel que le produit* $GR \times GF'$ *est égal au carré de l'axe qui renferme les deux foyers.*

2. Pour démontrer cette proposition, je remarque que l'on peut, d'après un théorème bien connu et dû à Poncelet, inscrire dans le cercle C une infinité de triangles circonscrits à la conique. En désignant par I et J les deux ombilics du plan, on sait que le cercle passe par ces deux points; on peut donc construire un triangle inscrit dans le cercle circonscrit à K, et dont l'ombilic I soit l'un des sommets. A cet effet, je mène par les foyers F et G les droites isotropes FI et FJ qui sont tangentes à la conique; ces droites rencontrent respectivement le cercle aux points m et n, et la droite mn est tangente à K.

3. Je rappellerai ici quelques notions très simples que j'ai

exposées dans une Note publiée précédemment dans les *Nouvelles Annales* (¹). Un point quelconque A étant donné dans le plan, menons les deux droites isotropes AI et AJ qui se croisent en ce point, et désignons respectivement par a et par a' les points réels situés sur ces droites.

Il est clair que ces points sont parfaitement déterminés quand m se donne le point A; réciproquement, ces points déterminent complètement le point A, et l'on peut dire que aa' est son segment représentatif, a étant l'origine du segment et a' en étant l'extrémité.

Ceci posé, *si trois points sont en ligne droite, les deux triangles formés respectivement, par les origines des segments représentatifs de ces points et leurs extrémités, sont semblables et inversement placés.*

En second lieu, *si un point imaginaire est situé sur un cercle réel, les extrémités de son segment représentatif sont réciproques par rapport à ce cercle.*

4. Il résulte de là que, si l'on désigne respectivement par F′ et G′ les points réciproques des foyers F et G relativement au cercle C, les points m et n ont respectivement pour segments représentatifs FF′ et GG′.

Je construis maintenant le point symétrique du point P relativement à la droite mn. A cet effet, par le point F, je mène la droite isotrope FI qui passe par le point m, puis par le point m la droite isotrope mJ qui contient le point réel F′; je mène ensuite la droite isotrope FJ, puis, en appelant p le point où elle rencontre la droite mn, la droite isotrope pI, et le point φ, où se rencontrent mJ et pI, est le point cherché. Si R est le point réel situé sur pI, on voit que son segment représentatif est RF′.

Pour obtenir le point R, je remarque que les trois points p, m et n étant en lignes droites et étant respectivement représentés par les segments RF, FF′ et GG′, les triangles RFG et FF′G′ sont semblables et inversement placés. D'où il suit que le point R est

(¹) *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. IX; 1870).

l'intersection de la droite GF' avec la droite menée par le point F parallèlement à GG'. Si l'on remarque en effet que le quadrilatère $FGF'G'$ est inscriptible dans un cercle, on en conclut sans peine que les angles $\widehat{FGR}$ et $\widehat{F'G'F}$ sont égaux comme inscrits dans un même arc de circonférence; par la même raison, l'angle $\widehat{F'FG'}$ est égal à l'angle $\widehat{F'GG}$ et ce dernier est égal par construction à l'angle $\widehat{FRG}$. Les angles $\widehat{FRG}$ et $\widehat{F'FG'}$ sont donc aussi égaux; par suite, les triangles RFG et $FF'G'$ sont semblables, et, comme ils sont évidemment inversement placés, le point R est le point réel situé sur la droite isotrope pI.

5. Le point φ étant symétrique de F relativement à la droite mn, qui est une tangente de la conique K, est situé sur le cercle décrit autour du foyer G comme centre avec un rayon égal à l'axe de la conique qui contient ce foyer.

Le point φ est d'ailleurs représenté par le segment RF'; on en conclut d'abord que la droite RF' passe par le point G, ce qui résulte de la construction même par laquelle on a déterminé le point R, puis que le produit $GR \times GF'$ est égal au carré de l'axe dont je viens de parler.

D'où la proposition que j'ai énoncée au commencement de cette Note.

6. Cette proposition peut s'énoncer d'une façon un peu différente :

Construisons le cercle passant par le point F' *et tangent en* G *à la droite* OG; *si l'on désigne par* Φ *le second point de rencontre de ce cercle avec l'axe* FG, *par* H *le centre de la conique, par* $2a$ *la longueur de l'axe de cette courbe qui renferme les foyers* F *et* G *et par* $2b$ *la longueur de l'autre axe, on a la relation*

$$\text{HF}.\text{H}\Phi = a^2 + b^2, \tag{1}$$

en sorte que les points F *et* Φ *sont réciproques relativement au cercle qui est le lieu des points d'où l'on voit la conique sous un angle droit.*

On peut remarquer, en effet, que la droite FR étant parallèle à la droite OG, le quadrilatère $FRF'\Phi$ est inscriptible dans une circonférence de cercle ; on a donc

$$GF.G\Phi = GR.GF' = 4a^2,$$

d'où, par une transformation facile, la relation énoncée ci-dessus.

7. Comme application, proposons-nous, étant donné un point O du plan, de construire un cercle ayant ce point pour centre et dans lequel on puisse inscrire un triangle circonscrit à la conique K.

Construisons le point Φ déterminé par la relation (1), et faisons passer par les points Φ et G un cercle qui touche la droite OG. Ce cercle rencontre la droite OF en deux points F' et F'' ; de là deux solutions du problème proposé.

En premier lieu, on a comme solution le cercle relativement auquel les points F et F' sont réciproques, et son rayon R' est déterminé par la relation

$$R'^2 = OF.OF'.$$

On a comme seconde solution le cercle relativement auquel les points F et F'' sont réciproques, et son rayon R'' est déterminé par la relation

$$R''^2 = OF.OF''.$$

8. En faisant le produit des équations précédentes, il vient

$$R'^2 R''^2 = \overline{OF}^2.OF'.OF''.$$

On a d'ailleurs, en vertu d'une propriété du cercle bien connue,

$$OF'.OF'' = OG^2;$$

d'où

$$R'R'' = OF.OG.$$

Ainsi, *le problème proposé a deux solutions et le produit des rayons des cercles qui y satisfont est égal au produit des distances du centre donné aux deux foyers de la conique.*

9. On peut transformer encore d'une autre façon la relation

$$GR \times GF' = 4a^2.$$

Les deux triangles semblables OF′G et FF′R donnent en effet

$$\mathrm{GR} = \mathrm{OF} \times \frac{\mathrm{GF'}}{\mathrm{OF'}};$$

d'où la relation

$$\frac{\mathrm{OF}.\mathrm{GF'^2}}{\mathrm{OF'}} = 4a^2.$$

En désignant par R le rayon du cercle, par u et v les longueurs OF et OG et enfin par ω l'angle FOG, on a

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OF'}} = \frac{u^2}{\mathrm{R}^2},$$

et

$$\mathrm{GF'^2} = \mathrm{OG^2} + \mathrm{OF'^2} - 2\,\mathrm{OG}.\mathrm{OF'}\cos\omega = v^2 + \frac{\mathrm{R}^4}{u^2} - \frac{2\,\mathrm{R}^2 v\cos\omega}{u};$$

de là

$$(u^2 v^2 + \mathrm{R}^4 - 2\,\mathrm{R}^2 uv\cos\omega) = 4a^2\mathrm{R}^2.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle OFG,

$$4c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega,$$

en désignant par $2c$ la distance des foyers F et G.

Éliminant $\cos\omega$ entre les équations précédentes, il vient

$$(\mathrm{R}^2 - u^2)(\mathrm{R}^2 - v^2) = 4b^2\mathrm{R}^2.$$

10. Si l'on suppose que, les foyers F et G venant à coïncider, la conique se réduise à un cercle, en posant

$$u = v = \mathrm{D} \qquad \text{et} \qquad b = r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2 = 2\mathrm{R}r,$$

qui, comme on le sait, est due à Euler.

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE

CIRCONSCRIT A UN QUADRILATÈRE

ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE QUADRILATÈRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

1. Dans tout ce qui suit, pour abréger les démonstrations, je supposerai que l'on considère une conique et un cercle *réels* (ou du moins dont les équations soient réelles). Les résultats obtenus s'étendent évidemment au cas où ces courbes seraient imaginaires; il suffirait d'ailleurs de quelques modifications légères pour appliquer au cas général les considérations sur lesquelles je m'appuie.

2. Je supposerai d'abord que la conique donnée soit une parabole P. En désignant par C le cercle donné, on sait, d'après Poncelet, que si l'on peut circonscrire à P un quadrilatère dont les sommets soient situés sur C, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères jouissant de la même propriété. Le sommet d'un de ces quadrilatères peut être pris arbitrairement sur le cercle.

Soit I un des ombilics du plan, les deux tangentes menées de ce point à la parabole sont, d'une part la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'autre ombilic J, et d'autre part la droite FI qui passe par le foyer de la parabole. Les tangentes issues du point J sont la droite de l'infini et la droite FJ. Désignons respectivement par α et β les points où les droites isotropes FI et FJ rencontrent le cercle; il est clair que l'on obtiendra la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, en exprimant que la droite $\alpha\beta$ est tangente à P, ou bien que le symétrique de F relativement à cette droite est sur la directrice de P.



Ce point symétrique est évidemment le point réciproque de F relativement au cercle C; d'où la proposition suivante :

Étant donnés le cercle C *et une parabole* P, *si l'on peut inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, le point réciproque du foyer de* P *relativement au cercle est situé sur la directrice de cette courbe.*

3. On sait (¹) que, si l'on considère un quelconque des quadrilatères circonscrits à P et inscrits dans C, le point de rencontre Q des diagonales de ce quadrilatère est fixe et ne dépend pas de la position du quadrilatère considéré; c'est d'ailleurs le point de rencontre de deux cordes communes aux deux courbes.

Si l'on considère, comme précédemment, le quadrilatère $IJ\alpha\beta$, on voit que le point fixe Q est l'intersection des droites isotropes βI et αJ; *ce point est donc le réciproque de* F *relativement au cercle* C, *et il est situé sur la directrice.*

4. En particulier, si d'un point M, pris dans le plan de la parabole, on lui mène deux tangentes qui touchent cette courbe aux points A et B, on sait que l'on peut inscrire dans le cercle déterminé par les trois points M, A et B une infinité de quadrilatères circonscrits à P; on peut donc, relativement à ce cercle, énoncer les propositions suivantes :

Le point réciproque du foyer de P, *relativement au cercle* C *circonscrit au triangle* MAB, *est sur la directrice de* P; *il est le point d'intersection de la corde* AB *commune aux deux courbes, de la corde qui passe par leurs deux autres points de rencontre et de la tangente menée en* M *au cercle* C.

5. Considérons maintenant une conique K quelconque ayant pour foyers réels les points F et G; je désignerai par $2a$ la longueur de l'axe contenant ces foyers, par $2b$ la longueur de l'autre axe, et par $2c$ la distance FG, en sorte qu'entre ces quantités on a, suivant la notation habituelle, la relation

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

(¹) Poncelet, *Propriétés projectives*, t. I, p. 351.

Puisque l'on peut inscrire dans le cercle C une infinité de quadrilatères circonscrits à la conique K, on peut choisir arbitrairement sur ce cercle le sommet d'un de ces quadrilatères. Prenons l'ombilic I; les tangentes menées de ce point à la conique passent par les foyers F et G et rencontrent respectivement le cercle en deux points α et β; en vertu de la propriété énoncée, il existe sur ce cercle un troisième point δ, tel que les droites $\alpha\delta$ et $\beta\delta$ sont tangentes à la conique K.

Déterminons d'abord le point symétrique de F relativement à $\alpha\delta$. Je mène à cet effet par le point F la droite isotrope du système (I) qui rencontre $\alpha\delta$ au point α, puis par le point α la droite isotrope du système J; je mène en second lieu par le point F la droite isotrope du système J qui rencontre $\alpha\delta$ en un point ε, puis par le point ε la droite isotrope du système I. Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique du point F.

Pour déterminer le segment représentatif de ce point imaginaire, je remarque que les points α, δ et ε sont en ligne droite. Le segment représentatif du point α est FF', si l'on désigne par F' le réciproque du foyer F relativement au cercle C; le segment représentatif du point φ a pour extrémité le point F' et pour origine un point R qu'il s'agit de déterminer. Quant au point δ, comme il se trouve sur le cercle C, il est représenté par un segment DD' dont les extrémités sont deux points réciproques relativement à ce cercle; le point ε a d'ailleurs pour segment représentatif RF.

Puisque les points α, δ et ε sont en ligne droite, les deux triangles FRD et F'FD' sont semblables et inversement placés, et, le quadrilatère FF'DD' étant inscriptible, on voit immédiatement que le point R est le point de rencontre de F'D avec la droite menée par le point F parallèlement à OD.

6. Semblablement, si l'on désigne par γ le symétrique de G relativement à $\beta\delta$ et par G' le réciproque de G relativement au cercle C, on voit que γ est représenté par le segment SG', en appelant S le point de rencontre de G'D avec la droite menée par le point G parallèlement à OD.

Je ferai remarquer maintenant que, la droite $\alpha\delta$ étant tangente à la conique K, le point φ est situé sur le cercle réel décrit du point G comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite F′D passe par le point G;

2° On a la relation

$$GR.GF' = 4a^2.$$

De même, la droite βδ étant tangente à la conique K, le point γ est situé sur le cercle réel décrit du point F comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite G′D passe par le point F;

2° On a la relation

$$FS.FG' = 4a^2.$$

7. De là résulte que le point D est l'intersection des droites FG′ et GF′ et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Considérons un cercle* C *et une conique* K *jouissant de la propriété que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la conique; soient* O *le centre du cercle,* F′ *et* G′ *les points réciproques relativement au cercle des foyers* F *et* G *de la conique,* D *le point de rencontre des droites* FG′ *et* GF′.

Si l'on désigne par R *le point de rencontre de* F′G *avec la droite menée par* F *parallèlement à* OD, *le produit* GR.GF′ *est égal au carré de l'axe de* K *qui contient les foyers* F *et* G.

8. On obtient ainsi la relation

$$GR.GF' = 4a^2, \tag{1}$$

qu'il est aisé de transformer de façon à ne mettre en évidence que le rayon du cercle et les côtés du triangle OFG.

Soit en effet R le rayon du cercle, et posons, pour abréger,

$$OF = u, \qquad OG = v, \qquad \widehat{FOG} = \omega,$$
$$\widehat{OFG'} = \widehat{OGF'} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{OF'G} = \widehat{OG'F} = \beta.$$

La relation (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$GF'(GD + DR) = 4a^2.$$

Or on a évidemment

$$GF' = \frac{OF'.\sin\omega}{\sin\alpha}, \qquad GD = GG'\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)},$$

et les deux triangles semblables OF′D et FF′R donnent

$$DR = OF \frac{DF'}{OF'} = \frac{OF}{OF'} \frac{FF' \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

En remarquant que

$$OF' = \frac{R^2}{OF} = \frac{R^2}{u},$$

on déduit de là

$$4a^2 = \frac{R^2 \sin\omega}{u \sin\alpha}\left(GG' \sin\beta + \frac{u^2}{R^2} FF' \sin\alpha\right)\frac{1}{\sin(\alpha - \beta)};$$

et comme

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OF}{OG'} = \frac{uv}{R^2},$$

on a

$$\begin{aligned} 4a^2 &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}(v.GG' + u.FF') \\ &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}\left[v\left(\frac{R^2}{v} - v\right) + u\left(\frac{R^2}{u} - u\right)\right] \\ &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}(2R^2 - u^2 - v^2). \end{aligned}$$

9. On trouve aisément

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{R^4 - 2R^2 uv\cos\omega + u^2v^2}{R^4 - u^2v^2};$$

on en déduit la relation

$$4a^2(R^4 - u^2v^2) = (2R^2 - u^2 - v^2)(R^4 - 2R^2 uv\cos\omega + u^2v^2).$$

On a d'ailleurs

$$4c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega;$$

en éliminant $\cos\omega$ entre les deux équations qui précèdent, il viendra enfin

$$4a^2(R^4 - u^2v^2) = (2R^2 - u^2 - v^2)[(R^2 - u^2)(R^2 - v^2) + 4c^2R^2].$$

10. Si l'on suppose que la conique se réduise à un cercle, les foyers F et G étant confondus, on devra faire $c = 0$, et en posant

$$u = v = D, \qquad a = r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$(R^2 - D^2)[2r^2(R^2 + D^2) - (R^2 - D^2)^2] = 0.$$

11. Comme je l'ai rappelé plus haut, si l'on considère un quadrilatère quelconque circonscrit à la conique K et inscrit dans le cercle C, les diagonales de ce quadrilatère se coupent en un point fixe.

Pour déterminer ce point fixe, je considère en particulier le quadrilatère $I\alpha\delta\beta$; le point fixe cherché se trouve sur la droite δI, et, comme il est évidemment réel, il se confond avec le point D. On peut d'ailleurs facilement vérifier que ce point est sur la diagonale $\alpha\beta$; cela résulte immédiatement de la similitude des triangles FDG et F'DG'.

Ainsi :

Le point de rencontre fixe des diagonales des quadrilatères circonscrits à la conique K *et au cercle* C *est le point de rencontre des droites* FG' *et* GF'.

12. Les considérations qui précèdent s'appliquent évidemment au cas où le polygone, que l'on peut circonscrire à la conique et inscrire dans le cercle, a un nombre de côtés supérieur à quatre; mais les résultats deviennent alors beaucoup plus compliqués, et je me contenterai d'examiner le cas particulier où, la conique étant une parabole P, on peut lui circonscrire un pentagone inscrit dans un cercle C.

Si nous prenons pour sommet de ce pentagone l'ombilic I, des deux tangentes que l'on peut de ce point mener à la parabole, l'une est la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'ombilic J, l'autre coupe le cercle en un point α. Par l'ombilic J, on peut mener à P une tangente distincte de la droite de l'infini; je désignerai par β le point où elle rencontre C. Cela posé, il est clair que, si l'on peut inscrire dans le cercle un pentagone circonscrit à la parabole, les tangentes à ce cercle, menées par les points α et β (et distinctes des droites isotropes αI et βJ), doivent se couper en un point γ de ce cercle. D'ailleurs, les points α et β étant évidemment *imaginairement conjugués,* il en est de même de ces deux tangentes; le *point* γ *est donc réel.*

Nous devons maintenant exprimer que la droite $\alpha\gamma$ est tangente à la parabole.

A cet effet, je remarque que le point α est représenté par le segment FF', si l'on appelle F le foyer de la parabole et F' son

réciproque relativement au cercle. Cherchons le symétrique de F relativement à la droite $\alpha\gamma$; pour cela, je considère la droite isotrope du système J qui passe par le point α; puis, par le point F je mène la droite isotrope du même système qui rencontre $\alpha\gamma$ en un point ε; enfin par le point ε je mène la droite isotrope du système I.

Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique cherché, et le segment représentatif de φ est RF', si l'on désigne par R le point réel situé sur la droite εI.

13. D'ailleurs, les points α, ε et γ étant en ligne droite, les deux triangles $FF'\gamma$ et $RF\gamma$ sont semblables, et par suite le point R est le point d'intersection de $F'\gamma$ par la droite menée par F parallèlement à $O\gamma$.

Si maintenant on remarque que le point φ, représenté par le segment RF', est sur la directrice de la parabole, on en conclut d'autre part que R est le symétrique de F' relativement à cette directrice.

D'où la proposition suivante :

Soit donnée une parabole à laquelle on peut circonscrire un pentagone inscrit dans le cercle; construisons le point F', *réciproque par rapport au cercle, du foyer* F *de la parabole, puis le point* R *symétrique du point* F' *par rapport à la directrice de cette parabole; cela posé, le point de rencontre de* F'R *avec la droite menée par le centre du cercle parallèlement* à FR *est situé sur le cercle.*

14. Si l'on désigne par γ ce point de rencontre, par O le centre du cercle et r son rayon, les deux triangles semblables FF'R et $OF'\gamma$ donnent la proportion

$$\frac{O\gamma}{FR} = \frac{OF'}{OF'F};$$

et comme

$$OF' = \frac{r^2}{OF} \qquad \text{et} \qquad O\gamma = r,$$

on en déduit la relation suivante :

$$r^2 - OF^2 = r.FR.$$

15. En terminant cette Note, je ferai encore remarquer avec quelle facilité les considérations dont j'ai fait usage conduisent au beau théorème de M. Faure, relativement aux triangles conjugués par rapport à une conique.

Considérons, en effet, un cercle circonscrit à un triangle conjugué relatif à une conique K; on sait que l'on peut, dans ce cercle, inscrire une infinité d'autres triangles jouissant de la même propriété. Prenons l'ombilic I comme sommet d'un de ces triangles, et soient α et β les points de rencontre de K avec la polaire de cet ombilic; ces points sont évidemment sur le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique, en sorte que, en désignant par O le centre de K et par a et b les demi-axes de cette conique, on a la relation

$$O\beta^2 = O\alpha^2 = a^2 + b^2.$$

Soient γ et δ les deux autres sommets du triangle conjugué dont le premier sommet est I; par définition, les points γ et δ se trouvent sur la droite $\alpha\beta$ et divisent harmoniquement le segment $\alpha\beta$; on a donc

$$O\gamma . O\delta = O\alpha^2 = a^2 + b^2,$$

et, comme $O\gamma . O\delta$ est évidemment la puissance du centre O relativement au cercle C, le théorème est démontré.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES HOMOFOCALES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1879.

I.

1. Je considère, dans un plan, un système de coniques homofocales; soient Ox et Oy les axes de ces coniques, F et F′ leurs foyers réels communs, que je supposerai situés sur l'axe Ox; les deux foyers imaginaires communs Φ et Φ' seront, par suite, situés sur l'axe Oy. Pour abréger, j'appellerai simplement *conique du système* une conique ayant pour foyers les points F, F′, Φ et Φ'.

Étant donné un point quelconque M du plan, deux coniques du système se croisent en ce point; désignons par N et N′ les centres des deux cercles qui osculent respectivement ces deux coniques au point M, et par μ la droite qui joint ces deux points. Cette droite est parfaitement déterminée quand on se donne le point M et les deux foyers F et F′; je dirai que c'est l'axe du point M.

2. Réciproquement, étant donnée une droite μ du plan, il existe trois points M, M′ et M″ pour lesquels cette droite est un axe.

Si l'on considère la conique du système qui touche la droite μ, *et que l'on désigne respectivement par* α *et* β *les points où la normale menée au point de contact rencontre les axes* Ox *et* Oy, *les trois points* M, M′ *et* M″, *qui ont pour axe la droite* μ, *sont situés sur le cercle* A *passant par les points* α, β *et le centre* O *commun aux coniques du système.*

3. On sait que toutes les propriétés des normales et des centres

de courbure d'une conique sont triples; les normales à une conique demeurent, en effet, normales à la transformée de cette conique quand on effectue une transformation homographique qui, aux deux ombilics du plan [1], fait correspondre deux des foyers indépendants de cette conique.

De la proposition précédente, on déduit donc immédiatement les théorèmes qui suivent :

La conique qui, passant par le point β *et les deux foyers* F *et* F′, *a pour asymptotes l'axe* Oy *et la droite* $\alpha\beta$ *contient les trois points* M, M′ *et* M″.

La conique qui, passant par le point α *et les deux foyers* Φ *et* Φ', *a pour asymptotes l'axe* Ox *et la droite* $\alpha\beta$ *contient également les trois points* M, M′ *et* M″.

4. Les trois points qui ont pour axe la droite μ sont, comme on le voit, les trois points communs aux deux coniques dont je viens de parler et au cercle A défini précédemment (2).

Mais on peut aussi les déterminer par l'intersection de ce cercle et d'une conique avec une conique ayant pour axes les droites Ox et Oy.

Désignons, en effet, par C la conique du système qui touche la droite μ et par K la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de C; nous pourrons énoncer la propriété suivante :

Les points M, M′ *et* M″, *qui ont pour axe la droite* μ, *sont situés sur la conique* K; *le quatrième point de rencontre de cette conique et du cercle* A *est le point* O′ *qui, sur le cercle, est diamétralement opposé au centre* O *commun aux coniques du système.*

5. *Le point* O′, *diamétralement opposé au point* O *sur le cercle* A, *est le conjugué harmonique du point* O *relativement aux points* M, M′ *et* M″.

---

[1] Je désigne ainsi les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles tracés dans le plan.

6. *Le triangle* MM′M″ *est circonscrit à la conique* C *du système qui touche la droite* μ.

7. Considérons l'hyperbole équilatère H, qui a pour centre le point O et dont l'axe transverse, dirigé suivant Oy, a pour longueur FF′; nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Le triangle MM′M″ *est autopolaire relativement à l'hyperbole* H.

8. Soit M′M″ un côté quelconque du triangle MM′M″; du point O abaissons une perpendiculaire sur ce côté, et désignons par M_0 le point symétrique, par rapport au point O, du pied de cette perpendiculaire.

Le point M_0 *est situé sur l'axe* μ *du point* M, *et la droite* MT_0 *est perpendiculaire à cet axe.*

9. Étant donnée une conique C du système, on voit que, si la droite μ roule sur cette conique, les points correspondants M, M′ et M″ décrivent la conique K, tandis que les côtés du triangle MM′M″ roulent tangentiellement à C elle-même.

D'où les propositions suivantes :

Étant donnée une conique quelconque C *du système, désignons par* K *la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de* C.

Cela posé, en appelant O′ *un point quelconque de* K *et* O *le centre commun aux courbes du système, si, sur* OO′ *comme diamètre, on décrit un cercle, ce cercle rencontre les axes en deux points; la droite qui joint ces deux points est normale à la conique* C.

Ce cercle rencontre de nouveau K *en trois autres points; chacun de ces points a pour axe une même droite tangente à* C.

Les côtés du triangle formé par ces points sont circonscrits à C.

Ce triangle est autopolaire relativement à l'hyperbole équilatère H.

10. Les coniques C et K, qui figurent dans l'énoncé des propo-

sitions qui précèdent, ont entre elles des relations qui méritent d'être étudiées.

Entre autres propositions, je rappellerai la suivante, que j'ai déjà fait connaître, il y a quelques années, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1) :

Si d'un point de la conique K *on mène des tangentes à la développée de la conique* C, *les quatre points de contact sont en ligne droite, et la droite qui joint ces points de contact est normale à la courbe* C.

II.

11. Soit M un point quelconque du plan; par ce point passent deux coniques du système. En désignant par N et N′ les centres des cercles qui osculent ces coniques au point donné, je dirai que N et N′ correspondent au point M.

Réciproquement, étant donné un point N du plan, on peut chercher combien de points M lui correspondent, c'est-à-dire combien existent de cercles ayant le point M pour centre et osculateurs d'une conique du système.

12. Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur les considérations suivantes :

Étant donné un point N du plan, si de ce point on mène les normales à une conique du système, les tangentes aux points de contact touchent une parabole P tangente aux axes de la conique. Cette parabole est la même quelle que soit la conique du système que l'on considère; elle est l'enveloppe des polaires du point N relativement aux diverses coniques qui ont pour foyers les points F et F′.

13. Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette importante proposition, due à M. Chasles :

Le lieu des pôles d'une droite relativement aux coniques qui forment un système homofocal est une droite qui rencontre la

---

(1) *Sur la développée de l'ellipse* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* janvier 1875).

droite donnée au point où elle touche la conique du système qui lui est tangente.

Soient P l'enveloppe des polaires dont je viens de parler (on voit immédiatement que c'est une parabole tangente aux axes), C une conique du système, et T une tangente commune à C et à P. En désignant par M le point où elle touche C, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite menée par M normalement à C; en vertu du théorème de M. Chasles que je viens de rappeler, cette droite passe par le point N; donc NM est normale à la conique C.

Réciproquement, abaissons du point N une normale à la conique C, et soit M le pied de cette normale. En désignant par T la tangente menée en ce point, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite MN. Il y existe donc une conique du système pour laquelle le pôle de T se confond avec le point N; par suite, la droite T est tangente à la parabole P.

La proposition que j'ai énoncée est donc entièrement établie [1].

14. Le foyer de la parabole P peut se déterminer aisément. On peut, en effet, la définir de la façon suivante :

Si autour du point N *on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite, l'enveloppe de ces perpendiculaires est la parabole* P [2].

Pour avoir le foyer de la parabole, il faut chercher les droites isotropes tangentes à cette courbe. On les obtiendra si l'on considère les transversales isotropes passant par le point N. En désignant par I l'un des ombilics du plan, soit NI l'une de ces transversales; menons par les foyers F et F′ des parallèles à cette droite.

---

[1] On démontrerait de même que :

Si d'un point N *de l'espace on mène les normales à une surface du second ordre, les pieds des normales sont les points de contact des plans qui touchent la surface et sont osculateurs de la cubique gauche enveloppée par les plans polaires de* N, *relativement aux diverses surfaces du second ordre qui ont les mêmes focales que la surface donnée.*

[2] CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 145.

Le foyer φ de la parabole se trouve sur la droite isotrope conjuguée harmonique de NI relativement aux deux droites dont je viens de parler; des conséquences analogues se déduiraient de la considération de la transversale isotrope passant par le second ombilic J.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Le foyer de la parabole P *est le conjugué harmonique du point* N *relativement aux deux foyers* F *et* F′ *communs à toutes les courbes du système.*

J'ajouterai que :

La directrice de cette parabole est la droite ON *qui joint le point* N *au centre commun des coniques du système.*

15. Du théorème précédent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Si l'on imagine, dans le plan des deux axes Ox *et* Oy, *deux droites quelconques* D *et* D′, *le foyer de la parabole qui touche ces quatre droites a pour conjugué harmonique, relativement aux foyers* F *et* F′, *le point de rencontre des normales menées aux deux courbes du système qui touchent* D *et* D′.

Et, si l'on suppose que les droites D et D′ viennent se confondre :

Si en un point M *d'une conique on mène la tangente, et si l'on imagine la parabole qui touche cette tangente au point* M *et en outre est tangente aux axes de la conique, le conjugué harmonique du foyer de cette parabole, relativement aux deux foyers de la courbe, est le centre du cercle qui oscule cette courbe au point* M.

16. Cela posé, pour trouver les points M correspondant à un point donné M, construisons le point M_0, conjugué harmonique de M relativement aux deux foyers F et F′, et imaginons la parabole P, qui a pour foyer le point M_0 et pour directrice la droite OM.

Il est clair, par ce qui précède, que :

Les points N *correspondant au point* M *sont les pieds des normales abaissées de ce dernier point sur la parabole* P.

Ces points sont donc au nombre de trois, et, si l'on désigne par I le milieu du segment $M_0 M$, ils s'obtiendront en cherchant l'intersection de P avec le cercle décrit sur $M_0 I$ comme diamètre.

17. Le triangle formé par ces trois points jouit de diverses propriétés intéressantes, parmi lesquelles je me bornerai à mentionner la suivante :

Le triangle formé par les trois points correspondant à un point donné du plan est circonscrit à une conique du système.

Je me réserve de revenir sur ce sujet et d'étendre aux surfaces homofocales du second ordre les résultats contenus dans cette Note.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DE

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS POINTS DE REBROUSSEMENT.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1879.

I.

1. Soient OX et OY deux axes rectangulaires, et X, Y les coordonnées d'un point quelconque M du plan relativement à ce système d'axes; posons

$$X + Yi = x \qquad \text{et} \qquad X - Yi = y;$$

nous pouvons considérer x et y comme de nouvelles coordonnées du point M. On voit que les équations $x = \alpha$ et $y = \beta$, où α et β désignent des quantités constantes arbitraires, représentent les diverses droites isotropes du plan; je désignerai donc, pour abréger, le système de coordonnées que je viens de définir sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Dans un pareil système, le coefficient angulaire d'une droite faisant avec l'axe OX un angle donné V est égal à e^{-2Vi}; l'équation de l'axe OX est

$$x = y,$$

et l'équation d'un cercle de rayon R et ayant pour centre le point (α, β) est

$$(x - \alpha)(y - \beta) = R^2.$$

2. Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, les coefficients angulaires des tangentes que d'un point (x, y) on peut mener à cette courbe sont donnés par une équation homogène du degré n,

$$U(\lambda, \mu) = 0;$$

dans cette équation, $\frac{\mu}{\lambda}$ désigne le coefficient angulaire de la tangente issue du point (x, y), et les coefficients du polynome U sont des fonctions entières de x et de y.

L'équation précédente est, en me servant d'une dénomination que j'ai déjà employée dans plusieurs travaux antérieurs ([1]), l'*équation mixte de la courbe*.

3. L'hypocycloïde à trois points de rebroussement étant définie comme une courbe de troisième classe qui touche aux deux ombilics la droite de l'infini, on voit immédiatement que son équation mixte est de la forme

$$a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

Cherchons le lieu des points du plan d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit; il faut, pour cela, exprimer que l'équation précédente a deux racines égales et de signes contraires.

Le lieu cherché a donc pour équation

$$(c - x)(b + y) = ad;$$

elle représente, comme on le sait, un cercle. En mettant en évidence le rayon R de ce cercle et les coordonnées α et β de son centre, je poserai

$$c = \alpha, \qquad b = -\beta, \qquad a = \mathrm{R}e^{-\varphi i} \qquad \text{et} \qquad d = -\mathrm{R}e^{\varphi i}.$$

L'équation mixte de la courbe deviendra donc

$$(1) \qquad \mathrm{R}e^{-\varphi i}\lambda^3 - \beta\lambda^2\mu + \alpha\lambda\mu^2 - \mathrm{R}e^{\varphi i}\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

4. Je vais chercher maintenant l'équation mixte des diverses hypocycloïdes qui touchent l'axe OX et qui rencontrent cet axe en deux autres points équidistants de l'origine O.

L'axe OX étant tangent à la courbe, une des tangentes issues de l'origine a pour coefficient angulaire l'unité; l'équation (1) est donc satisfaite quand on y fait

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \mu,$$

([1]) *Mémoire de Géométrie analytique*, 2e série, t. XVII.

d'où l'équation de condition

$$\alpha - \beta = \mathrm{R}e^{\varphi i} - \mathrm{R}e^{-\varphi i}.$$

Considérons un point de l'axe OX situé à une distance de l'origine égale à z, en sorte que les coordonnées de ce point soient

$$x = y = z;$$

les coefficients angulaires des tangentes issues de ce point sont donnés par l'équation (1), dans laquelle on a remplacé x et y par z. Si l'on divise cette équation par $\lambda - \mu$ (ce qui revient à faire abstraction de la tangente OX), on trouve aisément que, en posant

$$u = \mathrm{R}e^{-\varphi i} - \beta = \mathrm{R}e^{\varphi i} - \alpha,$$

les coefficients angulaires des deux autres tangentes sont déterminés par l'équation

$$\mathrm{R}e^{-\varphi i}\lambda^2 + (u + z)\lambda\mu + \mathrm{R}e^{\varphi i}\mu^2 = 0.$$

En laissant de côté le point où la courbe est tangente à OX, on obtiendra les deux autres points où elle rencontre cette droite en exprimant que l'équation précédente a deux racines égales, ce qui donne la relation

$$(u + z)^2 = 4\mathrm{R}^2.$$

Si maintenant on remarque que, les deux points d'intersection dont je viens de parler étant à égale distance de l'origine O, les deux valeurs obtenues pour z doivent être égales et de signes contraires, on en conclut

$$u = \mathrm{R}e^{-i\varphi} - \beta = \mathrm{R}e^{i\varphi} - \alpha = 0,$$

d'où

$$\alpha = \mathrm{R}e^{i\varphi} \qquad \text{et} \qquad \beta = \mathrm{R}e^{-i\varphi}.$$

Ainsi le centre ω du cercle K, lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde, est situé sur la droite qui fait avec l'axe OX un angle égal à φ et à une distance égale à R, c'est-à-dire au rayon de ce cercle. En désignant par A et A′ les deux points de rencontre de OX avec la courbe, on voit ainsi que ce cercle passe par le milieu O du segment AA′ et que ce segment a une longueur constante égale à 4R, propositions bien connues.

5. En remplaçant dans l'équation (1) α et β par leurs valeurs

l'équation mixte de l'hypocycloïde prend la forme suivante :

$$(2)\qquad R(\lambda-\mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2)+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0,$$

et l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes issues d'un point de l'axe $OX(x=y=z)$ devient

$$(3)\qquad Re^{-i\varphi}\lambda^2+z\lambda\mu+Re^{i\varphi}\mu^2=0.$$

En particulier, les tangentes issues du point A', pour lequel on a $z=-2R$, sont déterminées par l'équation

$$\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}\lambda-e^{\frac{i\varphi}{2}}\mu\right)^2=0,$$

d'où l'on voit que la tangente menée au point A' fait avec l'axe OX un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$.

Si donc on prend sur le cercle K le point O' diamétralement opposé au point O, cette tangente est précisément la droite $A'O'$; la droite $O'A$ est également tangente à l'hypocycloïde au point A, et ces deux droites, conformément à une proposition bien connue, sont rectangulaires entre elles.

6. On voit que l'on peut, par les points A et A', mener une infinité d'hypocycloïdes tangentes à l'axe OX; toutes ces courbes sont d'ailleurs égales entre elles, puisque la longueur du segment AA' détermine le rayon du cercle K et par suite la grandeur de la courbe elle-même. On les obtiendra toutes en donnant à φ toutes les valeurs possibles dans l'équation (2).

Soient deux de ces courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$ caractérisées par deux valeurs de l'angle φ différant entre elles de l'angle θ; si l'on désigne par ω et ω_1 les centres des cercles des points desquels on voit respectivement ces courbes sous un angle droit, on voit que l'angle $\omega O\omega_1$ est précisément égal à θ.

D'un point M situé sur l'axe OX et à une distance du point O égale à z, menons aux deux courbes K_φ et $K_{\varphi+\theta}$ les tangentes distinctes de l'axe.

Les coefficients angulaires de ces tangentes sont respectivement déterminés par les deux équations

$$Re^{-i\varphi}\lambda^2+z\lambda\mu+Re^{i\varphi}\mu^2=0$$

et

$$R e^{-i(\varphi+\theta)} \lambda^2 + z \lambda\mu + R e^{i(\varphi+\theta)} \mu^2 = 0\,;$$

ceux des tangentes menées à $H_{\varphi+\theta}$ se déduisent évidemment de ceux des tangentes menées à H_φ, en les multipliant par le facteur constant $e^{-\theta i}$; en d'autres termes, les tangentes à $H_{\varphi+\theta}$ s'obtiennent en faisant tourner de l'angle $\frac{\theta}{2}$ les tangentes à H_φ.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère une droite quelconque D *tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à la droite* D *et passant par les deux points où cette droite coupe la première hypocycloïde.*

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui se déplace sans changer de forme, en restant tangente à une droite fixe D *et en passant par un point fixe de cette droite* (auquel cas elle passe nécessairement par un autre point fixe situé sur la même droite); *par différents points de* D *menons des tangentes à la courbe, et imaginons que, pendant le déplacement de cette courbe, ces droites lui demeurent tangentes; pour deux positions quelconques de l'hypocycloïde mobile, les angles décrits par les tangentes autour des points fixes de* D *sont tous égaux entre eux.*

7. J'ajouterai que dans le mouvement les points de contact décrivent des cercles, ce que, du reste, des considérations géométriques très simples rendent évident. Considérons, en effet, un point M situé sur l'axe OX, à une distance de l'origine égale à z. En désignant simplement par μ le coefficient angulaire d'une des tangentes menées de ce point à la courbe (ce qui revient à faire $\lambda = 1$), l'équation de cette tangente est

$$\frac{y - z}{x - z} = \mu, \tag{4}$$

et l'on a la relation

$$\text{(5)} \qquad R e^{i\varphi} \mu^2 + z\mu + R e^{-i\varphi} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact s'obtiendront en résolvant par rapport à x et y l'équation (4) et l'équation suivante, que l'on en déduit en la dérivant par rapport à z :

$$\frac{y-x}{(x-z)^2} = \frac{d\mu}{dz}.$$

De l'équation (5) on déduit d'ailleurs

$$(2 R e^{i\varphi}\mu + z)\frac{d\mu}{dz} + \mu = 0,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dz} = -\frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4R^2}}$$

et

$$\text{(6)} \qquad \frac{y-x}{(x-z)^2} + \frac{\mu}{\sqrt{z^2-4R^2}} = 0.$$

Pour obtenir le lieu des points de contact, il faut éliminer φ et μ entre les équations (4), (5) et (6), ou simplement μ entre les équations (4) et (6), qui ne renferment pas φ.

On obtient ainsi l'équation

$$(x-z)(y-z) + (y-x)\sqrt{z^2-4R^2} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\left(y - z - \sqrt{z^2-4R^2}\right)\left(x - z + \sqrt{z^2-4R^2}\right) = 4R^2 - z^2.$$

Elle représente deux cercles tangents au point M à l'axe OX; leurs centres sont situés à l'intersection de la perpendiculaire élevée à l'axe en ce point avec le cercle décrit sur AA' comme diamètre.

8. Si l'on considère, comme précédemment, les deux hypocycloïdes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$, on voit que le sommet d'un angle circonscrit à ces deux courbes et ayant pour valeur $\frac{\theta}{2}$ décrit un lieu dont fait partie la tangente commune OX; on peut rechercher si cette droite constitue à elle seule le lieu complet.

Je remarque, à cet effet, que les coefficients angulaires des tan-

gentes menées du point (x, y) à la courbe H_φ sont déterminés par l'équation

$$(2)\qquad R(\lambda-\mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2)+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0,$$

et ceux des tangentes menées du même point à la courbe $H_{\varphi+\theta}$ par l'équation

$$R(\lambda'-\mu')(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda'^2+e^{i(\varphi+\theta)}\mu'^2)+\lambda'\mu'(\lambda' y-\mu' x)=0.$$

Si les deux tangentes font l'angle donné $\frac{\theta}{2}$, on a

$$\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{\lambda e^{\frac{\theta i}{2}}}{\mu e^{-\frac{\theta i}{2}}},$$

et l'équation précédente devient

$$(7)\quad R\left(e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu\right)(e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2)+\lambda\mu\left(e^{\frac{\theta i}{2}}y\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}x\mu\right)=0.$$

Reste à éliminer λ et μ entre les relations (2) et (7); en éliminant entre elles l'expression $e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2$, il vient

$$\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu}{\lambda-\mu}=\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda y-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu x}{\lambda y-\mu x}$$

et, en effectuant les calculs,

$$(y-x)\left(e^{\frac{\theta i}{2}}-e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)=0.$$

La tangente OX constitue donc bien à elle seule le lieu du sommet de l'angle constant circonscrit aux deux courbes.

9. Les hypocycloïdes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$ qui touchent toutes les deux l'axe OX ont, en outre, deux autres tangentes communes; pour avoir leur équation, il suffit d'éliminer λ et μ entre l'équation (2) et l'équation

$$(8)\qquad R(\lambda-\mu)(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda^2+e^{i(\varphi+\theta)}\mu^2)+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0.$$

Éliminant d'abord $\lambda y-\mu x$ entre ces égalités, il vient

$$\lambda^2 e^{-i\varphi}(1-e^{-i\theta})+\mu^2 e^{i\varphi}(1-e^{i\theta})=0,$$

d'où, par une transformation facile,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm e^{\rho + \frac{\theta}{2}}.$$

Les angles que font ces deux tangentes avec l'axe OX sont donc égaux à $\frac{\varphi}{2} + \frac{\theta}{4}$ et à $\frac{\varphi}{2} + \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}$; ces deux droites sont à angle droit. De là une construction qui permet de les obtenir aisément. Soient, en effet, K et K_1 les cercles des points desquels on voit respectivement sous un angle droit les courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$; ces cercles, indépendamment du point O, se coupent encore en un second point M. Ce point est nécessairement le point de rencontre des tangentes cherchées, puisqu'elles sont rectangulaires entre elles. Si maintenant nous prolongeons le rayon OM jusqu'en son point de rencontre N avec le cercle décrit sur AA' comme diamètre, il résulte des considérations précédentes que les deux tangentes communes qui se croisent au point M sont parallèles aux droites NA et NA'.

D'où encore la proposition suivante :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui passe par deux points donnés A *et* A' *et est tangente à la corde* AA'; *sur cette corde comme diamètre décrivons un cercle* B *et considérons le cercle* K, *lieu des points d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit. Ce cercle passe, comme on le sait, par le point* O, *milieu de la corde* AA', *et, en outre, est tangent au cercle* C.

Étant pris un point quelconque M *sur le cercle* K, *si l'on prolonge le rayon* OM *jusqu'en son point de rencontre* N *avec le cercle* C, *les droites menées par le point* M *parallèlement aux droites* NA *et* NA' *sont les deux tangentes rectangulaires entre elles que de ce point on peut mener à la courbe.*

10. Les diverses hypocycloïdes qui, passant par les deux points A et A', sont tangentes à la corde AA', étant identiques entre elles, on peut les obtenir toutes par le déplacement d'une de ces courbes dans le plan.

Pour avoir une idée nette de ce déplacement, il faut chercher le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan et le lieu décrit par ces centres relativement à la courbe mobile.

La courbe roulant sur les deux points A et A′, les normales menées en ces points sont respectivement perpendiculaires aux droites AO′ et A′O′, et par conséquent se coupent sur le cercle C décrit sur AA′ comme diamètre au point diamétralement opposé à O′; le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan est donc le cercle C, dont le rayon est égal à 2R. On sait d'ailleurs que les normales aux extrémités de la corde AA′ se coupent sur le cercle passant par les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde, cercle dont le rayon est égal à 3K.

D'où la conclusion qui suit :

Étant pris sur un cercle C *de rayon égal à* 2R *deux points diamétralement opposés* A *et* A′, *si l'on fait rouler ce cercle dans l'intérieur d'un cercle* C′ *de rayon égal à* 3R, *on sait que les deux points* A *et* A′ *décrivent une même hypocycloïde à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle* C′. *A un instant quelconque du mouvement, les points* A *et* A′ *sont situés sur l'hypocycloïde, tandis que la droite* AA′ *lui est tangente*; *si à cet instant on fixe le cercle* C, *et si l'on fait rouler sur ce cercle le cercle* C′ *en entraînant avec lui la courbe, cette courbe, dans son déplacement, passe constamment par les points fixes* A *et* A′ *et demeure tangente à la droite* AA′.

II.

11. Les résultats qui précèdent peuvent se déduire aisément de quelques propositions très simples et purement géométriques.

Considérons, à cet effet, une ellipse E située dans l'espace et dont la projection orthogonale sur un plan donné P soit un cercle C. Prenons arbitrairement sur cette courbe un point fixe A et un point mobile M. Si par le milieu I de la corde AM nous menons un plan perpendiculaire à cette corde, il coupe le plan P suivant une droite dont l'enveloppe est une courbe H que l'on peut aussi évidemment définir comme le lieu des centres des sphères symétriques par rapport au plan P et tangentes à l'ellipse E.

Je dis d'abord que la courbe H est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Soit D une droite située dans le plan P; si d'un point quelconque N de cette droite comme centre on décrit une sphère

passant par le point A, cette sphère coupe le plan Q de l'ellipse suivant un cercle passant par le point A et par le point A′ qui lui est symétrique par rapport à la projection orthogonale de D sur le plan Q.

Il est clair que le point N est sur la courbe H si ce cercle est tangent à l'ellipse, et, comme par les points A et A′ on peut mener quatre cercles tangents à E, il en résulte que la courbe K est du quatrième ordre.

Soit N un point quelconque du plan P; de ce point comme centre décrivons une sphère passant par le point A; cette sphère coupe le plan Q suivant un cercle rencontrant l'ellipse au point A et en trois autres points B, C et D. Les plans menés respectivement par les milieux des cordes AB, AC et AD coupent le plan P suivant des droites tangentes à H et se croisant au point donné N.

La courbe H est donc de la troisième classe.

Si le point N est rejeté à l'infini dans une direction quelconque, la sphère dont je viens de parler se réduit au plan mené par A perpendiculairement à cette direction, et, comme ce plan ne coupe E qu'en un point, il est clair qu'on ne peut mener à la courbe H qu'une tangente parallèle à une direction donnée. Cette courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini, et les points de contact sont situés sur les perpendiculaires menées aux asymptotes de la projection de l'ellipse sur le plan P. Cette projection étant un cercle, ces asymptotes, ainsi que leurs perpendiculaires, sont des droites isotropes. La courbe H est donc de troisième classe et doublement tangente, aux ombilics, à la droite de l'infini; par suite, c'est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

12. Cette hypocycloïde a, comme on le sait, trois points de rebroussement α, β, γ qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le point de concours des tangentes de rebroussement.

Considérons l'un quelconque α de ces points de rebroussement; les tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe étant toutes les trois confondues en une seule droite, la sphère passant par A et décrite du point α comme centre coupe le plan Q suivant un cercle passant par A et osculateur de l'ellipse E en un point α';

la projection sur le plan Q de la tangente de rebroussement au point α est d'ailleurs la droite menée par le milieu de la corde Aα et perpendiculairement à cette corde.

Si maintenant on remarque que les trois tangentes de rebroussement sont concourantes, on obtiendra la proposition suivante, due à Steiner :

Étant donné sur une ellipse un point quelconque A, *on peut déterminer trois cercles osculateurs de cette courbe qui passent par le point* A; *les trois points de contact et le point* A *sont sur un même cercle.*

D'après ce que je viens d'exposer, on peut ajouter que :

Si l'ellipse se projette orthogonalement sur un plan donné P *suivant une circonférence de cercle, les droites menées perpendiculairement au plan de l'ellipse par les trois points de contact rencontrent le plan* P *en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et la droite menée par le centre du cercle circonscrit aux trois points de contact, et perpendiculairement à son plan, rencontre le plan* P *au centre du cercle circonscrit à ce triangle équilatéral.*

13. Prenons sur l'ellipse E un autre point fixe B; à ce point correspond une seconde hypocycloïde H'. Cherchons les tangentes communes aux courbes H et H'.

Je désigne par F et G les deux axes de l'ellipse, par f et g les droites suivant lesquelles le plan P est coupé par les plans menés respectivement par F et G et normalement au plan Q. Les droites f et g sont évidemment perpendiculaires entre elles, puisque F est parallèle au plan P.

Cela posé, si des points A et B on mène dans le plan Q des perpendiculaires à F, cet axe les divise en deux parties égales; il en résulte que f est une tangente commune à H et H', et les mêmes considérations s'appliquent à la droite g. Les deux courbes ont donc déjà en commun deux tangentes rectangulaires entre elles.

Considérons maintenant la corde AB et le plan mené par son point milieu perpendiculairement à sa direction; il coupe le plan P suivant une droite D qui est aussi tangente aux deux hypocycloïdes.

14. Les points de contact de cette droite s'obtiendront évidemment en prenant son intersection avec les plans menés en A et en B normalement à l'ellipse.

Pour obtenir les autres points où elle rencontre les deux courbes, je mène par les points A et B un cercle tangent à l'ellipse; on peut mener deux de ces cercles, et leurs points de contact m et m' sont diamétralement opposés. Si l'on construit les axes [1] de ces deux cercles, il est clair qu'ils rencontrent D en deux points appartenant à la fois à H et H'. Soient n et n' ces deux points; on voit que les hypocycloïdes ont une corde commune à laquelle elles sont toutes les deux tangentes : *elles sont donc égales entre elles*.

On peut remarquer que les droites menées aux points n et n' tangentiellement à la courbe H sont les traces de deux plans perpendiculaires aux cordes Am et Am'; elles sont donc perpendiculaires à leurs projections sur le plan P, et, comme la projection du diamètre mm' passe par le centre du cercle C, on voit que ces projections sont rectangulaires; il en est donc de même des deux tangentes aux points n et n', ce qui est une proposition bien connue.

15. Lorsque le point A se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde qui lui correspond demeure, comme je viens de le montrer, invariable de forme en restant tangente aux deux droites fixes f et g. Je dis que la droite qui joint les deux points de contact est la trace sur le plan P du plan normal à l'ellipse au point A.

Menons, en effet, par le point A les cordes Aa et Ab, respectivement perpendiculaires aux axes F et G. Le point où la droite f touche l'hypocycloïde H est le point de rencontre du plan P avec l'axe du cercle bitangent à l'ellipse aux points A et a. Si donc au point A on mène le plan normal à cette courbe, il contient ce point de contact; par une raison semblable, il contient l'autre point de contact. La proposition que je voulais démontrer est donc établie.

16. Si le point A se déplace infiniment peu sur l'ellipse, l'hypocycloïde H roule sur les deux droites f et g; la droite qui joint les deux points de contact est une corde commune aux deux courbes.

---

(1) J'appelle, pour abréger, *axe d'un cercle* la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.



et, de plus, leur est tangente; par suite, elle a une longueur constante.

Donc :

Les traces, sur le plan P, *des plans normaux à l'ellipse* E *enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement. Le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse se compose des deux tangentes doubles de rebroussement de cette hypocycloïde.*

17. Au lieu de considérer une ellipse, j'aurais pu considérer une biquadratique quelconque, ayant pour plan de symétrie le plan P et située sur un cylindre dont la base est un cercle situé dans ce plan.

Sans rien changer aux démonstrations qui précèdent, on obtiendrait facilement les propositions qui suivent :

Étant donnée une biquadratique résultant de l'intersection d'un cylindre droit, ayant pour base un cercle situé dans un plan P, *avec une surface quelconque du second ordre ayant ce plan pour plan de symétrie, le lieu des centres des sphères qui, passant par les extrémités d'une corde de la courbe perpendiculaire au plan* P, *sont doublement tangentes à cette courbe, est une hypocycloïde* H *à trois points de rebroussement située dans le plan de symétrie.*

Si l'on considère les diverses cordes de la courbe perpendiculaires au plan P, *les diverses hypocycloïdes qui leur correspondent sont identiques et ne diffèrent que par leur position dans le plan.*

Les traces sur le plan de symétrie des plans normaux à la biquadratique enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.

Les centres des sphères quadruplement tangentes à la biquadratique décrivent les deux droites rectangulaires qui constituent les tangentes doubles de rebroussement de cette dernière hypocycloïde.

18. La considération des trois points de rebroussement de l'hypocycloïde H conduit, relativement aux biquadratiques douées d'un

plan de symétrie, à un théorème analogue à celui qui a été donné par Steiner relativement aux coniques et que j'ai rappelé plus haut.

Comme il est facile de le voir, il n'est pas besoin de supposer que la projection de la biquadratique sur le plan de symétrie soit un cercle, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une biquadratique quelconque ayant pour plan de symétrie un plan donné P, *par les extrémités d'une corde quelconque de cette courbe perpendiculaire au plan* P, *on peut mener trois sphères qui ont avec la courbe un double contact du second ordre; les six points de contact et les extrémités de la corde sont sur une même sphère dont le centre est dans le plan de symétrie.*

Si la biquadratique se projette suivant un cercle sur le plan de symétrie, on peut ajouter que :

Les centres des trois sphères qui ont un double contact sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre de la sphère qui contient les points de contact est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

19. Je reviens maintenant au cas précédemment étudié de l'ellipse E, quoique les considérations suivantes s'appliquent encore sans modification au cas plus général où l'on considère une biquadratique.

J'ai montré que, quand le point A se déplaçait sur l'ellipse, l'hypocycloïde H se déplaçait, sans changer de forme, dans le plan P.

Pour étudier la loi de ce déplacement, je remarque que, en désignant respectivement par φ et γ les points où H touche les droites f et g, la droite $\varphi\gamma$ a une longueur constante, que j'appellerai $4R$. Les normales à la courbe menées aux points φ et γ se rencontrent en un point dont la distance au point d'intersection de f et de g est constante et égale à $4R$. Le centre instantané de rotation décrit donc dans le plan un cercle de rayon égal à $4R$. On sait d'ailleurs que, relativement à la courbe, il décrit le cercle qui lui est circonscrit et dont le rayon est égal à $3R$.

On peut, par suite, se représenter ainsi qu'il suit le déplacement de l'hypocycloïde dans son plan :

Imaginons un cercle K *de rayon égal à* 4R, *puis deux autres cercles* K′ *et* K″ *de rayons respectivement égaux à* 3R *et à* 2R *et qui touchent tous les deux* K *au même point* M. *Si l'on considère le diamètre* Δ *du cercle* K″ *qui passe par le point* M, *et si l'on fait rouler ce cercle dans le cercle* K′, *supposé fixe, en entraînant avec lui ce diamètre, on sait que cette droite enveloppe une hypocycloïde* H *à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle* R′.

Si maintenant on suppose que, cette courbe restant invariablement liée au cercle K′, *on fasse rouler ce cercle dans le cercle* R, *l'hypocycloïde prendra successivement les diverses positions qui correspondent aux diverses positions du point* A *sur l'ellipse.*

Si, de plus, on imagine que le cercle K″ *roule, en même temps que le cercle* K′, *dans l'intérieur du cercle* K, *et de façon qu'ils le touchent tous les deux toujours au même point, la droite* Δ, *dans ce mouvement, enveloppera l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement qui est l'enveloppe des traces des plans normaux à l'ellipse, tandis que ses extrémités décriront les axes de cette hypocycloïde.*

20. Considérons les deux hypocycloïdes H et H′ qui correspondent à deux points donnés A et B de l'ellipse E.

Soit R un point quelconque de cette ellipse; les plans menés respectivement par les milieux des deux cordes AB et BR et normalement à ces cordes coupent le plan P suivant deux droites β et γ respectivement tangentes aux courbes H et H′.

Si, comme précédemment, nous appelons D la droite suivant laquelle le plan P est coupé par le plan mené par le milieu de AB et perpendiculairement à cette corde, nous savons que D est à la fois une tangente commune et une corde commune à H et à H′. D'ailleurs, les perpendiculaires élevées aux points milieux des côtés d'un triangle se coupant en un même point, il en résulte que les tangentes β et γ se rencontrent en un point de D. Elles sont, du reste, perpendiculaires aux projections sur le plan P des cordes AR et BR, et, comme ces cordes font un angle constant (leur point

de rencontre décrit, en effet, le cercle C, tandis qu'elles tournent autour de points fixes de ce cercle), il en est de même de ces tangentes.

D'où le théorème suivant, que j'ai déjà démontré plus haut :

Si l'on considère une droite quelconque tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite, tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une hypocycloïde égale à la première.

21. Les considérations géométriques très simples dont je me suis servi trouvent d'ailleurs, dans d'autres questions, des applications intéressantes. Je me bornerai ici à énoncer la proposition suivante :

Supposons que le sommet d'un angle de grandeur constante décrive une droite D, *tandis que ses côtés enveloppent deux courbes* K *et* K'; *pour une position donnée de l'angle, soient respectivement* a *et* a' *les points de contact des deux côtés.*

Cela posé, si l'on construit l'hypocycloïde à trois points de rebroussement qui oscule la courbe K *au point* a *et touche la droite* D, *puis l'hypocycloïde qui oscule la courbe* K' *au point* a' *et touche également la droite* D, *ces deux hypocycloïdes sont égales et rencontrent* D *aux deux mêmes points.*

SUR LA GÉOMÉTRIE DE DIRECTION.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1879-80.

I. — Définition des directions et des cycles.

1. Considérons une droite quelconque située dans un plan; on peut supposer qu'elle soit décrite dans un sens déterminé par un point mobile. J'appellerai *direction* une droite définie ainsi par sa position et par le sens dans lequel elle est supposée décrite.

L'angle que fait une direction avec une autre direction arbitraire est évidemment défini à un multiple près de 2π.

A chaque droite Δ du plan correspondent deux *directions opposées,* que je désignerai par les notations $+\Delta$ et $-\Delta$; D étant une direction arbitraire donnée, je désignerai par $-$ D la direction opposée.

2. Les deux directions correspondant à une droite isotrope doivent être considérées comme confondues entre elles; en d'autres termes, une direction isotrope se confond avec son opposée.

3. J'appellerai *cycle* un cercle défini non seulement par sa position, mais encore par le sens dans lequel on peut le supposer décrit par un point mobile.

A un cercle quelconque C du plan correspondent deux *cycles opposés,* que je désignerai par les notations $+$ C et $-$ C; K étant un cycle arbitraire donné, je désignerai par $-$ K le cycle opposé.

4. Une direction est tangente à un cycle si la droite correspondant à la direction est tangente au cercle correspondant au cycle et si, en outre, sur l'élément commun au cercle et à la droite, le sens de la direction est le même pour le cycle et pour la direction.

Si les sens sont inverses, je dirai que la direction est une tangente *apparente* du cycle.

Un cycle doit être considéré comme l'enveloppe des directions qui lui sont tangentes. En particulier, le cycle peut se réduire à un point P, qui est l'enveloppe des directions menées par ce point; si une direction quelconque passe par le point P, il est clair qu'il en est de même de la direction opposée.

Réciproquement, si deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$ sont tangentes à un cycle, ce cycle se réduit à un point situé sur la droite Δ.

5. Des définitions qui précèdent il résulte immédiatement qu'on ne peut mener à un cycle qu'une tangente parallèle à une direction donnée et que deux cycles n'ont que deux tangentes communes, par conséquent n'ont qu'un seul centre de similitude.

Trois cycles, pris deux à deux, ont trois centres de similitude qui sont en ligne droite.

On ne peut mener qu'un seul cycle tangent à trois directions données; l'expression de *cycle inscrit dans un triangle donné* aura donc une signification parfaitement déterminée.

II. — Rapport anharmonique de quatre directions. — Faisceaux et réseaux de directions. — Faisceaux en involution. — Réseaux en involution.

6. Étant données quatre directions arbitraires A, B, C, D et étant tracé un cycle arbitraire dans le plan, menons à ce cycle des tangentes parallèles à ces directions, et soient respectivement a, b, c, d leurs points de contact. J'appellerai *rapport anharmonique* de ces quatre directions, et je désignerai par la notation R(A, B, C, D), le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d, lesquels sont situés sur un même cercle.

7. J'appelle *faisceau de directions* un système de directions passant par un point fixe O.

Un faisceau de directions conjuguées deux à deux est en *involution,* si le rapport anharmonique de quatre quelconques d'entre elles est égal au rapport anharmonique des directions conjuguées.



Dans un faisceau en involution, il y a deux directions qui coïncident avec leurs conjuguées : ce sont les directions doubles du faisceau. En les désignant par P et P′, et par A et A′ deux directions conjuguées quelconques, on voit que les directions P, P′ et A, A′ sont harmoniques.

Les centres des cycles tangents aux directions P et P′ décrivent une droite qui est la bissectrice de ces deux directions et que j'appellerai l'*axe* du faisceau; l'involution est déterminée quand on se donne les deux directions doubles P et P′, ou encore quand on se donne le sommet O du faisceau et un cycle tangent aux directions doubles. On peut ainsi facilement déterminer une involution, même quand les directions doubles sont imaginaires.

Soit R la droite menée par le point O perpendiculairement à l'axe du faisceau; il est aisé de voir que les deux directions $+R$ et $-R$ sont conjuguées : je dirai que c'est la *droite double* du faisceau.

8. Considérons un faisceau en involution ayant pour sommet le point O, P et P′ pour directions doubles, et R pour droite double. Menons par O une droite quelconque Δ, et soient D et D′ les conjuguées des directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$; je dirai que D et D′ sont deux directions *associées* du faisceau.

Les directions associées du faisceau forment une involution ayant même axe et même droite double que l'involution donnée; ses directions doubles sont les conjuguées harmoniques des directions isotropes relativement à P et P′.

9. *Étant donnée une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques* Q *et* Q′, *si, par un point* O *pris arbitrairement dans le plan, on mène des tangentes à ces cycles, ces tangentes forment un faisceau en involution.*

Les directions doubles de ce faisceau sont évidemment les tangentes menées par le point O aux deux cycles qui, passant par ce point, touchent les deux directions fixes. La droite double est la droite qui joint le point O au point de rencontre des directions Q et Q′.

10. J'appellerai *réseau de directions* un système de directions tangentes à un même cycle.

Un réseau est en involution si les points de contact des directions avec le cycle forment une involution; dans tout réseau en involution, il y a deux directions doubles. Deux directions conjuguées quelconques et les deux directions doubles sont conjuguées harmoniques.

Quatre directions forment un système harmonique lorsque, étant tangentes à un même cycle, leurs points de contact forment un système harmonique. Par suite, pour obtenir la conjuguée harmonique d'une direction B relativement à deux directions données A et A', il suffit d'inscrire un cycle dans le triangle déterminé par les directions A, A' et B. Joignons le point de rencontre de A et A' avec le point de contact de B : la droite ainsi obtenue rencontre le cycle en un second point, et la direction menée tangentiellement en ce point est la conjuguée cherchée.

11. *Étant donnés une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques et un cycle fixe* K, *si l'on mène les tangentes communes au cycle fixe et aux cycles variables, ces tangentes communes forment un réseau en involution.*

Les directions doubles de cette involution se détermineront en construisant les deux cycles tangents à K et aux directions fixes.

III. — Longitude de quatre directions. — Systèmes projectifs.

12. Étant données quatre directions A, B, C et D, désignons respectivement par α, β, γ et δ les intersections de A avec B, de B avec C, de C avec D et de D avec A. Cela posé, la longueur

$$\alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha$$

est complètement définie en valeur absolue et en signe; le segment $\alpha\beta$, étant compté en effet sur la direction B, dont le sens est déterminé, a une valeur bien déterminée, et il en est de même des autres segments.

J'appellerai *longitude* des quatre directions A, B, C, D la longueur dont je viens de parler, et je la désignerai par la notation

$$L(A, B, C, D).$$



13. *Lorsque quatre directions sont tangentes à un même cycle, leur longitude est nulle.*

Réciproquement :

Si la longitude de quatre directions est nulle, elles sont tangentes à un même cycle.

14. Deux groupes de quatre directions sont dits *projectifs* si leurs rapports anharmoniques sont égaux, ainsi que leur longitude.

Deux systèmes de directions sont dits *projectifs* si, étant prises quatre directions quelconques du premier système et les directions correspondantes du second système, les deux groupes ainsi obtenus sont projectifs.

Tous les théorèmes qui ont lieu relativement à deux systèmes de points homographiques situés sur une même ligne droite s'appliquent également à deux systèmes projectifs de directions.

15. De ce que j'ai dit plus haut (nº 13) il résulte immédiatement que, si quatre directions d'un des systèmes sont tangentes à un même cycle, les directions correspondantes dans l'autre système sont également tangentes à un même cycle.

A un cycle (ou un point) du premier système correspond donc un cycle (ou un point) dans le second système.

16. Étant donnés deux cycles C et K, on peut leur mener deux tangentes communes : j'appellerai *distance tangentielle* des deux cycles la longueur comprise entre les deux points de contact sur l'une des tangentes communes; cette distance n'est déterminée qu'en valeur absolue.

Considérons deux figures projectives; soient C et K deux cycles appartenant à la première figure, A une de leurs tangentes communes touchant respectivement ces cycles aux points α et δ. Désignons par B une tangente à C infiniment voisine de A et passant par le point α, par D une tangente à K infiniment voisine de A et passant par le point δ, enfin par C une direction arbitraire, par β le point d'intersection de B et de C, et par γ le point d'intersection de D et de C.

La longitude des quatre directions A, B, C et D a pour expression

$$L(A, B, C, D) = \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha;$$

on peut remarquer que $\beta\gamma$ est infiniment petit et qu'en négligeant les infiniment petits on a

$$\alpha\beta = \alpha\varepsilon, \qquad \gamma\delta = \varepsilon\delta;$$

on a donc, en négligeant les infiniment petits,

$$L(A, B, C, D) = \alpha\varepsilon + \varepsilon\delta - \delta\alpha = 2\alpha\delta.$$

Si maintenant on remarque que, dans deux figures projectives, la longitude de quatre directions quelconques est égale à la longitude des quatre directions correspondantes, on pourra énoncer le théorème fondamental suivant :

Étant donnés, dans deux figures projectives, deux cycles C *et* K *appartenant à la première figure, soient* T *une tangente commune à ces deux cycles, c et k les points où cette tangente touche respectivement les cycles. Désignons par* C′ *et* K′ *les cycles correspondants dans la seconde figure, par* T′ *la tangente commune qui correspond à* T, *et par c' et k' les points où elle touche* C′ *et* K′.

Cela posé, la longueur ck est égale en grandeur et en signe à $c'k'$. C'est ce que j'exprimerai d'une façon plus concise (mais moins nette) en disant que *la distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.*

IV. — Involution.

17. Étant donnés trois couples de directions conjuguées (A, A′), (B, B′) et (C, C′), je dirai qu'ils forment une involution si quatre quelconques de ces directions et les quatre directions conjuguées sont projectives. On peut toujours déterminer deux directions P et P′ telles que ces directions forment avec les trois couples donnés un système harmonique.

Ces directions sont les directions doubles de l'involution, et il

est facile de les déterminer quand on se donne deux couples tels que (A, A′) et (B, B′) [1].

18. Un système de droites conjuguées est dit *en involution* si, étant prises quatre quelconques de ces directions, ces directions et les directions conjuguées forment un système projectif.

Il y existe alors deux directions P et P′, telles que P, P′, et deux directions conjuguées quelconques forment un système harmonique.

Une involution peut se définir au moyen des deux directions doubles P et P′, ou encore (ce qui sera préférable si ces directions sont imaginairement conjuguées) au moyen du point de rencontre de ces directions et d'un quelconque des cycles qui leur sont tangents.

En appelant O le point de rencontre des deux directions doubles P et P′, la droite passant par ce point, et qui est le lieu des centres des cycles tangents à P et à P′, sera dite l'*axe de l'involution,* la droite passant par ce même point perpendiculairement à l'axe la *droite double de l'involution.*

19. *Tous les théorèmes relatifs à un système de points en involution sur une même droite ont lieu relativement à un système de directions en involution.*

V. — Transformation par directions réciproques.

20. Soient O un point fixe et K un cycle pris arbitrairement dans le plan, P et P′ les tangentes (réelles ou imaginaires) que du point O on peut mener au cycle K; à chaque direction D du plan on peut faire correspondre une direction D′ telle que les directions D, D′ et P, P′ fassent un système harmonique.

Je désignerai cette transformation sous le nom de *transformation par directions réciproques;* il est clair, en effet, qu'à la direction D′ correspond la direction D.

---

[1] Je laisse de côté la solution de ce problème et des problèmes analogues; elle ne présente aucune difficulté, mais exigerait, pour être claire, d'assez nombreuses figures. Le lecteur y suppléera facilement.

Les deux droites P et P′ seront les deux directions doubles de la transformation, la droite qui joint le point O au centre de K l'axe de la transformation, et la droite R, menée par O perpendiculairement à l'axe, la droite double de la transformation.

Si une direction mobile Δ enveloppe une courbe M, la direction conjuguée (ou réciproque) Δ′ enveloppera une courbe M′ qui sera dite la *transformée* ou la *réciproque* de M.

21. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut sur l'involution, qu'un système de directions et le système transformé sont projectifs; on voit donc immédiatement que *tout cycle a pour réciproque un cycle* (*ou un point*).

Si deux cycles C *et* K *ont pour réciproques les cycles* C′ *et* K′, *la distance tangentielle des deux cycles* C *et* K *est égale à la distance tangentielle des cycles* C′ *et* K′ (¹).

22. *Deux directions réciproques rencontrent la droite double* R *en deux points équidistants du centre* O *de la transformation.*

23. Étant donnée une droite quelconque Δ, à cette droite correspondent les deux directions opposées + Δ et — Δ, auxquelles correspondent, après la transformation, deux directions D et D′ : je dirai que ces deux directions sont *associées*. Ainsi :

Deux directions sont associées si leurs réciproques sont opposées.

Un cycle se transforme généralement en un autre cycle; il peut, dans certains cas, se transformer en un point, et je dirai alors que c'est un *cycle singulier*.

24. *Les tangentes communes à deux cycles singuliers ont pour réciproques deux directions opposées et, par suite, sont deux droites associées.*

(¹) Cette proposition, des plus importantes dans la théorie de la transformation par directions réciproques, est analogue à la propriété suivante : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles se conserve après une transformation par rayons vecteurs réciproques.*



Réciproquement :

Tout cycle tangent à deux directions associées est un cycle singulier; un cycle est singulier, si les tangentes qu'il a en commun avec un autre cycle singulier quelconque sont des directions associées.

En particulier, le point O, centre de la transformation, est un cycle singulier; pour qu'un cycle soit singulier, il faut donc et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener par le point O soient des directions associées.

25. Soient Q et Q′ les conjuguées harmoniques des directions isotropes, relativement aux droites P et P′; il résulte de ce qui précède que :

Pour qu'un cycle soit singulier, il faut et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener du point O *constituent avec les directions* Q *et* Q′ *un système harmonique.*

26. *Étant donné un cycle singulier quelconque, pour qu'un autre cycle soit singulier, il faut et il suffit que leur centre de similitude soit sur la droite* R.

Deux droites associées quelconques se coupent sur la droite R.

Chaque point de la droite R *doit être regardé comme un cycle singulier, le point correspondant étant le symétrique du point donné relativement au point* O.

27. *Soient* C *et* C′ *deux cycles réciproques quelconques; désignons par* C″ *le symétrique de* C′ *relativement à l'axe de la transformation : les deux cycles* C *et* C″ *ont pour axe radical la droite double* R.

28. Étant donné un cercle quelconque K, à ce cercle correspondent deux cycles opposés + K et — K; en désignant par C et C′ leurs transformés, je dirai que C et C′ sont deux *cycles associés.*

29. La transformation par directions réciproques me paraît, dans l'étude de la Géométrie plane, devoir être employée avec avantage à côté de la transformation par rayons vecteurs réci-

proques (il est évident que cette dernière transforme un cycle en un autre cycle ou une direction).

On peut toujours effectuer la transformation de telle sorte qu'à deux directions données D et D′ correspondent deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$; on voit qu'alors aux cycles tangents à D et à D′ correspondent des points de la droite Δ.

Comme application, proposons-nous le problème suivant :

Mener un cycle tangent à trois cycles donnés.

Construisons les tangentes communes à deux des cycles, et effectuons une transformation telle que ces deux tangentes se transforment en deux directions opposées : les deux cycles dont je viens de parler se transformeront alors en deux points, et le problème sera ramené immédiatement au suivant, qui a deux solutions :

Mener par deux points un cycle tangent à un cycle donné.

Plus généralement, on peut toujours effectuer une transformation, de telle sorte que trois cycles donnés se transforment en trois points (1).

VI. — Cas particuliers importants de la transformation par directions réciproques.

30. Deux cas particuliers sont particulièrement à remarquer.

En premier lieu, les deux directions doubles P et P′ peuvent être opposées; il est facile de voir alors que la réciproque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport à la droite commune qui contient les deux directions.

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport à l'axe de la transformation.

En second lieu, les deux directions doubles peuvent être des directions isotropes. En désignant, comme plus haut, par O le point de rencontre de ces directions, on voit aisément que la réci-

(1) Depuis que cette Note a été communiquée à la Société, j'ai reconnu qu'il était utile de modifier légèrement la définition précédente de la transformation par directions réciproques; je développerai ce point dans une prochaine Communication.



proque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport au point O.

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport au point O.

VII. — Courbes en involution. — Hypercycles.

31. Considérons une transformation par directions réciproques définie par ses deux directions doubles P et P′, et une courbe M (j'entends ici par courbe une suite de points se suivant dans un sens déterminé, en sorte qu'en chaque point de cette courbe la tangente ait une *direction déterminée*).

La courbe M sera dite *en involution* si, D désignant une direction quelconque tangente à cette courbe et D′ la réciproque de D, la direction D′ est elle-même tangente à M.

Les tangentes à M sont ainsi conjuguées deux à deux, de telle sorte que chaque couple de tangentes conjuguées et les deux directions fondamentales P et P′ constituent un système harmonique.

32. Étant donnée une courbe en involution, considérons une direction A prise arbitrairement dans le plan et ses conjuguées harmoniques relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe : ces conjuguées enveloppent une courbe A′.

En considérant une autre direction B, on aurait une autre courbe B′, enveloppe des conjuguées harmoniques de B relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, si A′ est un cycle, je dis que B′ est également un cycle.

On peut, en effet, énoncer cette proposition :

Étant donné un système de directions en involution, les conjuguées harmoniques de deux directions quelconques relativement aux couples de directions conjuguées de l'involution forment deux systèmes projectifs [1].

---

[1] Comme je l'ai dit plus haut, tous les théorèmes relatifs aux systèmes de points situés en ligne droite ont leurs analogues relativement aux systèmes de directions dans un même plan ; la proposition sur laquelle je m'appuie ici découle immédiatement de la proposition bien connue qui suit :

Si quatre couples de points sont en involution, les conjugués harmoniques

Il résulte de là que B′ et A′ sont deux courbes projectives, ce qui démontre la proposition.

33. J'appellerai *hypercycle* une courbe en involution M jouissant de la propriété énoncée. Une telle courbe sera donc définie par les deux directions fondamentales P et P′, par une direction A et par le cycle K, qui est l'enveloppe des conjuguées harmoniques de A relativement aux tangentes conjuguées de M; je dirai que le cycle K est le *cycle polaire* de la direction A.

On voit qu'à chaque direction du plan correspond un cycle polaire, et l'on démontrera facilement les propositions suivantes :

Si K *est le cycle polaire d'une direction donnée* A *relativement à un hypercycle* M, *le cycle polaire de toute tangente à* K *est tangent à la direction* A.

Les tangentes communes aux cycles polaires de deux directions opposées + D *et* — D *ont pour cycles polaires deux points de la droite* D.

On conclut de là qu'il y existe une infinité de directions dont les cycles polaires se réduisent à des points.

34. Il est clair qu'un hypercycle M se transforme en un hypercycle M′ par une transformation par directions réciproques; si P et P′ sont les deux directions fondamentales de M, les réciproques de P et de P′ sont les directions fondamentales de M′.

De là résulte que, si P et P′ sont réelles, on peut toujours effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et P′ soient opposées, et par suite que la transformée ait un axe de symétrie.

Si, au contraire, P et P′ sont imaginairement conjuguées, on peut effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et de P′ soient deux directions isotropes, et alors la transformée a un centre de symétrie.

---

d'un point de la droite, pris à volonté, relatifs aux quatre couples de points, ont toujours le même rapport anharmonique, quel que soit ce point (CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 99).



SUR LA

TRANSFORMATION PAR DIRECTIONS RÉCIPROQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1881.

Dans une Note insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (*Sur la Géométrie de direction*, t. VIII, p. 196), j'ai fait connaître une transformation nouvelle qui présente la plus grande analogie avec la transformation par rayons vecteurs réciproques; je me propose d'exposer brièvement comment on peut l'étendre à l'espace.

1. Une surface S, étant donnée, partage l'espace en deux régions, et l'on peut fixer arbitrairement celle de ces régions que l'on regarde comme extérieure à la surface; je désignerai sous le nom de *semi-surface* une surface ainsi définie. A un plan correspondent, par exemple, deux semi-plans que l'on peut appeler *opposés* et que l'on doit regarder comme deux semi-surfaces distinctes; à une surface correspondent également deux demi-sphères opposées.

Pour que deux demi-surfaces se touchent en un point, il faut non seulement qu'elles aient même tangente en ce point, mais encore que les régions extérieures aux deux surfaces soient les mêmes dans le voisinage de ce point. De là résultent immédiatement les propositions suivantes :

On ne peut mener à une semi-sphère qu'un semi-plan parallèle à un semi-plan donné; une semi-sphère est déterminée par la condition qu'elle touche quatre semi-plans donnés, et un semi-cône de révolution par la condition qu'il touche trois semi-plans donnés.

Cela posé, la transformation par directions réciproques est entièrement définie par les conditions suivantes :

Deux semi-plans réciproques se coupent sur un plan fixe que j'appellerai *plan fondamental;* deux couples de semi-plans réciproques forment un système de quatre semi-plans tangents à un semi-cône de révolution.

La transformation est évidemment déterminée quand on se donne le plan fondamental et deux semi-plans réciproques.

2. Voici les propriétés fondamentales de cette transformation :

A un système de semi-plans parallèles correspond un système de semi-plans parallèles; à une semi-sphère correspond une semi-sphère qui peut se réduire à un point; à un semi-cône de révolution, une semi-surface de même nature qui peut se réduire à un cylindre de révolution ou à une droite.

On peut toujours effectuer une transformation telle que quatre semi-sphères données se transforment en quatre points.

Si trois semi-surfaces touchent un semi-plan aux points a, b, c et si les semi-surfaces réciproques touchent le semi-plan réciproque aux points α, β, γ, les triangles abc et $\alpha\beta\gamma$ sont égaux.

Les lignes de courbure des semi-surfaces sont conservées dans la transformation.

Deux cas sont particulièrement à remarquer. En premier lieu, si le plan fondamental est à l'infini, la transformée est une semi-surface parallèle à la semi-surface donnée; en second lieu, si un cône isotrope a pour réciproque un cylindre droit dont l'axe est perpendiculaire au plan fondamental, on a la transformation remarquable due à M. Bonnet [1].

3. Si l'on prend une surface algébrique quelconque et si l'on fixe arbitrairement la région que l'on regarde comme extérieure, la semi-surface ainsi obtenue ne forme généralement un être géométrique que si on lui adjoint la semi-surface opposée; elle doit être considérée comme une semi-surface composée de deux feuillets superposés et opposés entre eux, ces feuillets formant les deux

---

[1] *Note sur un genre particulier de surfaces réciproques* (*Comptes rendus*, t. XLII, p. 485).



nappes de l'enveloppe d'une sphère de rayon infiniment petit dont le centre décrit la surface. Une quadrique, par exemple, doit être regardée comme une semi-quadrique de quatrième classe. Cependant quelques semi-surfaces, composées d'une seule nappe, forment un être géométrique distinct : telles sont celles qui proviennent du plan, de la sphère, et en général de toutes les anticaustiques des surfaces algébriques.

4. La transformée d'une semi-surface S est une anticaustique; abaissons, en effet, de chaque point M de S une perpendiculaire MP sur le plan fondamental, et prenons sur MP un point M′ tel que le rapport de M′P à MP soit constant : le point M′ décrit une surface S′. Cela posé, si, l'indice de réfraction étant convenablement choisi, des rayons perpendiculaires au plan fondamental se réfractent sur S′, la réciproque de S est une des catacaustiques de S′; on obtiendra du reste toutes ses catacaustiques en déplaçant le plan fondamental parallèlement à lui-même.

Il résulte de là que l'on sait déterminer les lignes de courbure des anticaustiques de S′ si l'on sait les déterminer pour la semi-surface S. En particulier, si S′ est une semi-quadrique, il en est de même de S, et l'on voit que l'on peut obtenir les lignes de courbure des anticaustiques des surfaces du second ordre, les rayons incidents étant parallèles, proposition que j'avais déjà démontrée dans mon Mémoire *Sur une surface de quatrième classe*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 145).

M. Darboux qui, dans une Note présentée à l'Académie dans sa dernière séance, a bien voulu rappeler ce résultat, a démontré de plus que ces anticaustiques sont les surfaces les plus générales de la quatrième classe, qui ont pour ligne double l'ombilicale.

Des propositions qui précèdent il résulte qu'elles peuvent être considérées comme les transformées des semi-quadriques; or, si l'on considère une semi-surface quelconque Σ de quatrième classe ayant pour ligne double l'ombilicale, et pour autre ligne double la conique k, on voit que chaque point M de k est le sommet de deux semi-cônes de révolution circonscrits à Σ; tous ces semi-cônes peuvent, par une transformation convenable, être transformés en droites se partageant en deux systèmes tels qu'une droite quelconque de l'un des systèmes rencontre toutes les droites de l'autre

système. D'où il suit que la transformée est une semi-quadrique, ce qui démontre le beau théorème de M. Darboux; on voit également, comme l'a énoncé ce géomètre, que Σ peut être, de quatre façons différentes, considérée comme anticaustique d'une quadrique.

La surface la plus générale de quatrième classe, qui a pour ligne double l'ombilicale, est donc la transformée par directions réciproques d'une semi-quadrique, et un grand nombre de ses propriétés métriques se déduisent immédiatement des propriétés des génératrices rectilignes des quadriques et des propriétés des cônes de révolution qui leur sont circonscrits.

TRANSFORMATIONS PAR SEMI-DROITES RÉCIPROQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1882.

1. Une droite étant donnée, on peut supposer qu'elle soit décrite dans un certain sens par un point mobile; une telle droite, déterminée ainsi par sa position et le sens dans lequel elle est décrite, est désignée sous le nom de *semi-droite;* ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la droite (*fig.* 1).

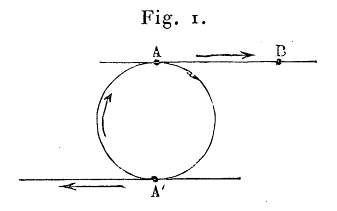
Une même droite pouvant être décrite dans deux sens différents détermine deux semi-droites distinctes, que l'on appelle *semi-droites opposées*.

2. Un cercle étant donné, on peut supposer également qu'il soit décrit dans un certain sens par un point mobile; un tel cercle, déterminé ainsi par sa position et le sens dans lequel il est décrit, est désigné sous le nom de *cycle;* ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la circonférence du cycle.

Un même cercle, pouvant être décrit dans deux sens différents, détermine deux cycles distincts que l'on appelle *cycles opposés*.

3. En un point A d'un cycle, la tangente doit être considérée,

Fig. 1.



le long de l'élément infiniment petit commun au cycle, comme décrite dans le même sens que le cycle; la tangente au point A est donc une semi-droite bien déterminée.

De là résultent les conséquences suivantes :

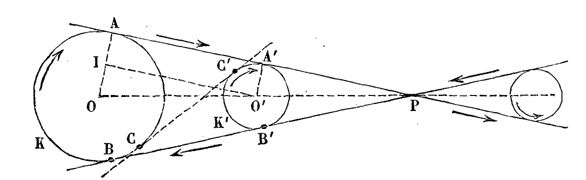
1° *On ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée.*

Il est clair, en effet, qu'on peut mener au cercle déterminé par le cycle deux tangentes parallèles à la droite déterminée par la semi-droite donnée; mais, si l'on désigne par A et par A' les points de contact de ces tangentes, on voit que les tangentes en ces points ont des directions opposées; une seule d'entre elles est donc parallèle à la semi-droite donnée.

2° *Deux cycles donnés ont deux tangentes communes et n'en ont que deux.*

Sur la *fig.* 2, on voit que les semi-droites AA' et BB' sont tangentes à la fois aux deux cycles K et K'. Les cercles déterminés par ces cycles ont quatre tangentes communes, dont deux sont précisément AA' et BB'; si l'on considère une quelconque des

Fig. 2.



deux autres, par exemple CC', il est aisé de voir que, quel que soit le sens dans lequel on suppose décrite cette droite, elle ne peut toucher les deux cycles donnés, d'après la définition donnée du contact d'un cycle et d'une semi-droite.

Deux cycles ont donc seulement deux tangentes communes; leur point de rencontre P est le centre de similitude des deux cycles.

Ce centre de similitude est unique (¹).

(¹) Une proposition bien connue peut, par suite de cette définition, s'énoncer de la façon suivante :

Étant donnés trois cycles, les trois centres de similitude de ces cycles pris deux à deux sont en ligne droite.

La distance AA′, comprise sur l'une des tangentes communes entre les points de contact avec les cycles, est la *distance tangentielle des cycles;* elle n'est déterminée qu'en valeur absolue, mais non en signe.

4. Le rayon d'un cycle sera regardé comme positif si ce cycle est décrit dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, comme négatif dans le cas contraire.

Par suite, en désignant par T la distance tangentielle des deux cycles dont les centres sont O et O′, la *fig.* 2 montre immédiatement que, en désignant par D la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2.$$

Cette formule détermine, dans tous les cas possibles, la distance tangentielle de deux cycles; en particulier, si nous considérons deux cycles opposés, si le rayon d'un de ces cycles est R, l'autre est — R; d'ailleurs, la distance de leurs centres est nulle; on a donc, dans ce cas,

$$T^2 = -4R^2.$$

5. Une semi-droite étant donnée, ainsi qu'un point P, le cycle qui a pour centre ce point et qui touche la semi-droite est bien déterminé; la distance du point P à la semi-droite est le rayon de ce cycle : elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

6. Un point doit être considéré comme un cycle d'un rayon infiniment petit; toutes les semi-droites passant par ce point doivent être considérées comme tangentes à ce cycle.

7. Étant données deux semi-droites quelconques, on peut construire une infinité de cycles qui leur soient tangents; les centres de ces cycles sont situés sur une même droite que l'on appellera la *bissectrice des semi-droites.*

Si, le point P d'intersection des semi-droites restant fixe, l'angle que font ces semi-droites diminue indéfiniment, en sorte qu'elles tendent toutes les deux à se confondre avec leur bissectrice, les rayons de tous les cycles inscrits diminuent indéfiniment et à la limite se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent deux semi-droites opposées.



On voit ainsi que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent.

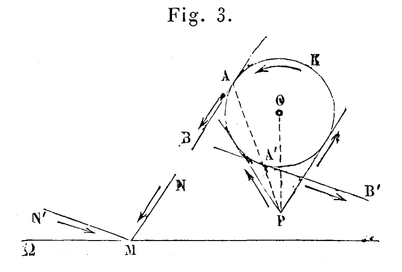
8. Il résulte aussi de ce qui précède qu'un cycle assujetti à toucher trois semi-droites données est entièrement déterminé. Son centre est le point de rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR SEMI-DROITES RÉCIPROQUES.

9. Considérons une droite fixe Ω; traçons dans le plan un cycle quelconque K ayant pour centre le point O et, sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite Ω, prenons un point arbitraire P (*fig.* 3).

Cela posé, à chaque semi-droite MN du plan on peut faire cor-

Fig. 3.



respondre une autre semi-droite de la façon suivante : menons au cycle K la tangente AB parallèle à MN, joignons le point de contact A au point P, et, au point A′ où la droite ainsi obtenue rencontre le cycle, menons la tangente A′B′; menons enfin, par le point M où la semi-droite donnée coupe la droite fixe Ω, une semi-droite MN′ parallèle à A′B′.

MN′ correspond ainsi à MN, et il est clair, en examinant les constructions effectuées, que MN correspond réciproquement à MN′; on dit que ces deux semi-droites sont réciproques.

Il résulte évidemment de ce qui précède que :

1° *Deux semi-droites réciproques se coupent sur la droite* Ω *que l'on appelle l'*axe de transformation;

2° *Des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles.*

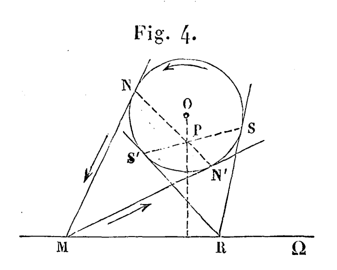
10. Si, du point P, on mène des tangentes au cycle K, on voit que les semi-droites parallèles à ces tangentes sont leurs réciproques à elles-mêmes. Il y a donc deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes; ces semi-droites font des angles égaux avec l'axe de transformation. Il est toutefois à remarquer que ces semi-droites ne sont réelles que si le point P est extérieur au cycle K.

11. Théorème. — *Deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.*

Soient, en effet, Ω l'axe de transformation, MN et MN′ deux semi-droites réciproques, SK une semi-droite quelconque du plan (*fig.* 4).

Construisons le cycle qui touche les semi-droites MN, MN′ et SR; menons la droite NN′ qui joint les points de contact de MN

Fig. 4.



et de MN′, et désignons par P le point où cette droite coupe la perpendiculaire abaissée du point O sur l'axe Ω. Il est clair, d'après ce qui précède, que la transformation qui a pour axe Ω et dans laquelle MN correspond à MN′ peut être définie au moyen du cycle K et du point P. Si maintenant on remarque que P est le pôle de la droite Ω relativement au cycle K, on voit que la tangente RS′ est la réciproque de SR; les deux couples de semi-droites réciproques MN et MN′, RS et RS′ sont deux tangentes au cycle K, ce qui démontre la proposition énoncée.

12. La transformation par semi-droites réciproques est aussi caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Deux semi-droites réciproques se coupent sur l'axe de trans-

formation; deux couples de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle (1).

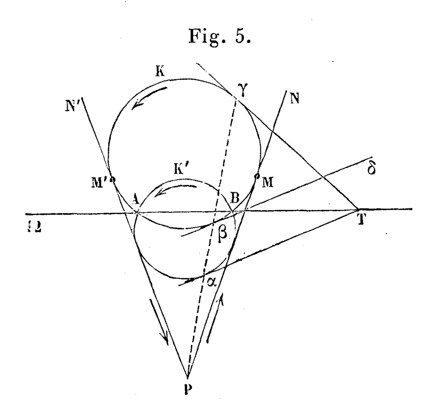
Il est clair que la transformation est entièrement définie quand on se donne l'axe de transformation et deux semi-droites réciproques D et D'. Pour obtenir la réciproque d'une semi-droite quelconque Δ, que l'on construise le cycle tangent à D, D' et Δ, et que, par le point M où Δ coupe l'axe de transformation, on mène la deuxième tangente au cycle, cette tangente sera la semi-droite cherchée.

13. Considérons une courbe K comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile Δ, la réciproque Δ' de Δ enveloppera une courbe K' qu'on appelle la *transformée de la courbe* K.

Théorème. — *Quand on effectue une transformation par semi-droites réciproques, un cycle a pour transformé un autre cycle.*

Soit Ω l'axe de transformation, et considérons un cycle quel-

Fig. 5.



conque K coupant l'axe aux points A et B. Menons à ce cycle des tangentes MN et M'N' parallèles à la direction des semi-droites

(1) La transformation par rayons vecteurs réciproques est également caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Deux points réciproques sont situés sur une droite passant par le pôle de transformation;

Deux couples de points réciproques sont situés sur un même cercle.

qui, dans la transformation, sont leurs réciproques à elles-mêmes, et désignons par P le point de rencontre de ces droites (*fig.* 5).

Cela posé, construisons le second cycle K′ qui, passant par les points A et B, touche les semi-droites PM et PM′; je dis que le cycle K′ est le transformé de K.

On voit en effet que la transformation est définie par l'axe Ω, le cycle K et le point P (9).

Par le point P, menons une sécante quelconque coupant le cycle K′ au point α et le cycle K aux points β et γ. On sait que les tangentes menées en α et γ se coupent en un point T de l'axe radical Ω des deux cycles; d'ailleurs, $\beta\delta$ est parallèle à αT : il résulte donc de la définition donnée plus haut (9) que αT et γT sont deux semi-droites réciproques. L'enveloppe des réciproques des semi-droites qui enveloppent K est donc le cycle K′ : ce qu'il fallait démontrer.

14. On voit ainsi qu'un cycle K a pour réciproque un cycle K′. La relation qui existe entre deux cycles réciproques est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1° *Leur axe radical est l'axe de transformation;*

2° *Leurs tangentes communes sont parallèles à deux directions fixes,* à savoir aux directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes.

Désignons respectivement par R et R′ les rayons des deux cycles (ces quantités étant données en grandeur et en signe) et par D et D′ les distances de leurs centres à l'axe [1].

La première propriété donne la relation suivante

$$D^2 - D'^2 = R^2 - R'^2,$$

et la deuxième, la relation

$$D - D' = \alpha(R - R'), \tag{1}$$

où α désigne une constante caractérisant la transformation; d'où

---

[1] On doit ici considérer l'axe de transformation comme une semi-droite, en lui donnant un sens arbitraire, de sorte que D et D′ sont aussi déterminées en grandeur et en signe.

encore, en combinant ces deux relations,

$$(2) \qquad D + D' = \frac{1}{\alpha}(R + R').$$

On en déduit

$$D' = \frac{D(\alpha^2 + 1) - 2\alpha R}{1 - \alpha^2}$$

et

$$R' = \frac{2\alpha D - R(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2}.$$

Le cycle K′ est ainsi complètement déterminé, quand le cycle K est donné, puisque l'on connaît la distance de son centre à l'axe et son rayon.

Remarques. — Le cycle K′ se réduit à un point, si $R' = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$R\alpha^2 - 2\alpha D + R = 0,$$

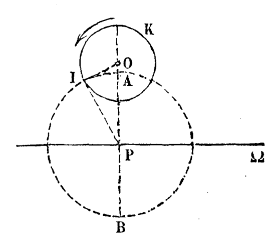
d'où

$$\alpha = D \pm \sqrt{D^2 - R^2}.$$

Il en résulte qu'un cycle étant donné, ainsi que l'axe de transformation, on peut toujours déterminer le module α de la transformation, de façon que ce cycle ait pour transformé un point, dans le cas où ce cycle ne coupe pas l'axe. En désignant, en effet, par R son rayon et par D la distance de son centre à l'axe, on voit que, $D^2 - R^2$ étant positif, l'équation précédente détermine pour le module α deux valeurs réelles.

Soit K (*fig.* 6) le cycle donné; de son centre O abaissons une

Fig. 6.



perpendiculaire OP sur l'axe de transformation, et de son pied P comme centre décrivons le cercle qui coupe orthogonalement le cycle donné. Ce cercle coupe la droite OP en deux points A et B;

on prouvera aisément qu'il existe une transformation telle que les tangentes au cycle K aient pour réciproques les semi-droites qui se croisent au point A. Il existe également une autre transformation dans laquelle le point B est le réciproque du cycle K.

Une transformation étant définie par l'axe de transformation Ω et par le module α, il y existe une infinité de cycles qui ont pour transformés des points; ils sont définis par la relation

$$\frac{R}{D} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Leur propriété caractéristique est que *leur rayon varie proportionnellement à la distance de leur centre à l'axe;* elle présente une grande importance dans l'application de la transformation par semi-droites réciproques à la théorie des anticaustiques par réfraction.

15. Théorème. — *La distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.*

Considérons, en effet, deux cycles; désignons respectivement par R et r leurs rayons, par D et d les distances de leur centre à l'axe de transformation, par p la projection sur cet axe de la droite qui joint leurs centres, et par T leur distance tangentielle; on aura évidemment

$$T^2 = p^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2.$$

Soient de même R' et r' les rayons des cycles transformés, D' et d' les distances de leurs centres à l'axe, et T' leur distance tangentielle. Si l'on remarque que deux cycles réciproques ont leurs centres sur une même perpendiculaire à l'axe, il est clair que l'on a

$$T'^2 = p^2 + (D' - d')^2 - (R' - r')^2.$$

Or les formules données plus haut donnent aisément

$$D' - d' = \frac{(D - d)(\alpha^2 + 1) - 2\alpha(R - r)}{1 - \alpha^2},$$

$$R' = r' = \frac{2\alpha(D - d) - (\alpha^2 + 1)(R - r)}{1 - \alpha^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, toutes réductions faites,

$$T'^2 = p^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2 = T^2;$$

ce qui démontre la proposition énoncée [1].

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE.

16. Soient trois cycles K, K′ et K″ ayant respectivement pour centre les points O, O′ et O″. Soient P″ le centre de similitude des cycles O et O′, P′ le centre de similitude des cycles O et O″. Supposons que la droite P′P″ ne coupe pas le centre O; en prenant cette droite pour axe de transformation, nous pourrons toujours, en choisissant convenablement le module de la transformation, transformer le cycle O en un point ω. Les deux tangentes P″A et P″B auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points P″ et ω; le cycle K′, étant tangent à P″A et P″B, aura pour transformé un cycle tangent à ces demi-droites opposées, et, par conséquent, un point ω′ qui sera l'intersection de P″ω avec la perpendiculaire abaissée de O′ sur l'axe P′P″.

Les deux tangentes P′C et P′D (*fig.* 7) auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par la droite P′ω, et il est clair que le cycle O″, qui touche P′C et P′D, aura pour transformé le point ω″, où P′ω rencontre la perpendiculaire abaissée de O″ sur l'axe P′P″. Si l'on considère maintenant les deux tangentes communes aux cycles K′K″, elles auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points ω′ et ω″. D'où il résulte que ces tangentes se coupent au point P où la droite ω′ω″ rencontre P′P″, et de là une démonstration nouvelle de cette proposition rappelée plus haut : *Les trois centres de similitude de*

---

[1] Relativement à la transformation par rayons vecteurs réciproques, le théorème analogue est le suivant : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles correspondants.*

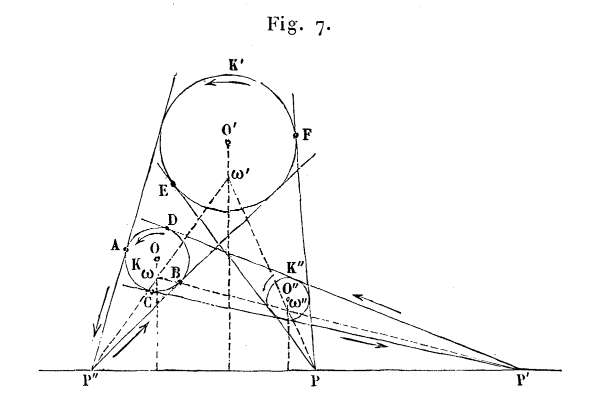
Ce théorème s'étend à deux courbes quelconques, et de même dans la transformation par semi-droites réciproques :

Si une semi-droite Δ touche deux courbes aux deux points a et b, et si la semi-droite réciproque Δ′ touche les courbes transformées aux points a′ et b′, les deux longueurs ab et a′b′ sont égales.



trois cycles considérés deux à deux sont en ligne droite; il suit de là également que *si trois cycles sont tels que la droite, qui contient leurs centres de similitude, ne les rencontre pas, on*

Fig. 7.



peut, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points (¹).

17. La transformation par semi-droites réciproques peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser diverses propriétés des figures.

18. Pour en donner un exemple simple, considérons le problème suivant : *Construire un cycle touchant trois cycles donnés.*

Supposons que les cycles donnés K, K′ et K″ soient tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les coupe pas, nous pouvons, d'après ce qui précède, en prenant cette droite pour axe de transformation, transformer les cycles donnés en trois points ω, ω′ et ω″. Le cercle passant par ces points détermine deux cycles opposés H et H′ dont les réciproques seront les solutions du problème. Deux cycles opposés rencontrant l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de leurs réciproques;

(¹) La propriété analogue dans la théorie de la transformation par rayons vecteurs réciproques est la suivante : *Lorsque deux cercles se coupent, on peut toujours les transformer en deux droites.*

d'où il suit que le problème proposé a deux solutions, et que l'axe radical des deux cycles qui satisfont à la question est l'axe de similitude des cycles donnés.

Le problème de *mener un cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent. On peut, en effet, donner à un des cercles un sens arbitraire, de façon à le transformer en un cycle; on transformera également les deux autres cercles en cycles en fixant leur direction, ce qui pourra se faire de quatre façons différentes. A chaque groupe de cycles correspondent deux solutions; le problème proposé aura donc en tout huit solutions.

19. Un point décrivant dans un sens déterminé une semi-droite ou un cycle, si l'on emploie la transformation par rayons vecteurs réciproques, on voit que le point transformé décrit une autre semi-droite ou un autre cycle (lequel peut se réduire à une semi-droite quand le pôle de transformation est sur le cycle considéré).

On peut souvent, avec avantage, employer simultanément la transformation par rayons vecteurs réciproques et la transformation par semi-droites réciproques. Ainsi, en général, *étant donnés cinq cycles, on peut, par deux transformations successives, les transformer en deux semi-droites et en trois points*. En effet, si deux des cycles se coupent, par une première transformation par rayons vecteurs réciproques, on pourra les transformer en deux semi-droites. Les trois autres cycles ayant pour transformées K, K′ et K″, si l'axe de similitude de ces cycles ne les rencontre pas, on pourra, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points, tandis que les semi-droites se transformeront en semi-droites.



SUR LES HYPERCYCLES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1882.

1. Une droite étant donnée, on peut la supposer décrite par un point mobile dans un sens déterminé; je désignerai une pareille droite, dont la position et la direction sont données, sous le nom de *semi-droite* (¹). A une droite donnée correspondent deux semi-droites ayant des directions différentes, et que j'appellerai *semi-droites opposées*.

Je désignerai sous le nom de *cycle* un cercle décrit dans un sens donné; en un point d'un cycle, la tangente est une semi-droite parfaitement déterminée. A un cercle correspondent deux cycles opposés. Il résulte immédiatement de ces définitions qu'à un cycle donné on ne peut mener qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée, que deux cycles n'ont que deux tangentes communes et un seul centre de similitude, qu'un cycle tangent à trois semi-droites données est complètement déterminé. Le rayon d'un cycle sera regardé comme positif si le point qui le décrit se meut dans le sens des aiguilles d'une montre, comme négatif dans le cas contraire. La distance d'un point à une semi-droite est égale au rayon du cycle qui a pour centre ce point et touche la semi-droite; elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

Deux couples de semi-droites (A, A') et (B, B') forment un système harmonique si elles touchent un même cycle et si les points de contact divisent harmoniquement le cycle; A' est dite la *conjuguée harmonique* de A relativement à B et B'.

(¹) Dans une Note précédemment publiée, *Sur la Géométrie de direction* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. VIII, p. 196), j'ai désigné la semi-droite sous le nom de *direction;* j'ai cru devoir modifier cette expression, le mot *direction* ayant en Géométrie un sens très précis.



Un point doit être considéré comme un cycle de rayon infiniment petit.

2. Si l'on considère une courbe algébrique comme l'enveloppe d'une semi-droite, elle ne constitue pas, en général, un être géométrique ; il faut lui adjoindre la même courbe, enveloppée par la semi-droite opposée. On doit la considérer comme composée de deux courbes opposées, qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit ; en sorte qu'en chaque point il y a deux tangentes opposées et que l'on doit considérer comme distinctes.

Certaines courbes algébriques (le cercle, par exemple) constituent elles-mêmes, quand on attribue à leurs tangentes un sens déterminé, un être géométrique. Un des caractères distinctifs de ces courbes, que j'appellerai *courbes de direction*, consiste en ce que l'enveloppe d'un cercle de rayon constant, dont le centre décrit la courbe, se décompose en deux courbes distinctes. Il en est de même des courbes que je désigne sous le nom d'*hypercycles ;* elles comprennent l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement, la parabole ainsi que les courbes qui leur sont parallèles, et plus généralement toutes les anticaustiques de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

Étant donnée une tangente quelconque A à un hypercycle, il lui correspond une autre tangente A' telle que A, A' et deux semi-droites fixes P et P' (que l'on peut appeler les *semi-droites fondamentales* de la courbe) forment un système harmonique. Je dirai que deux tangentes telles que A et A' constituent un couple de tangentes conjuguées.

Cela posé, l'hypercycle est défini par la propriété suivante : les conjuguées harmoniques d'une semi-droite du plan D, par rapport aux couples de tangentes conjuguées de la courbe, enveloppent un cycle K.

L'hypercycle est aussi entièrement déterminé quand on se donne les semi-droites D, P et P' et le cycle K, et l'on peut, en s'appuyant sur la définition précédente, construire autant de couples de tangentes conjuguées qu'on le veut. On peut, en particulier, remarquer que tout cycle touchant les semi-droites fondamentales a quatre tangentes communes avec l'hypercycle ; elles constituent deux couples de tangentes conjuguées, et peuvent se

construire avec la règle et le compas. Le *cercle* déterminé par le *cycle* a quatre autres tangentes communes avec l'hypercycle; mais ces quatre tangentes ne constituent pas des couples de tangentes conjuguées et ne peuvent pas se construire au moyen de la règle et du compas.

3. La propriété la plus importante de l'hypercycle est la suivante :

Soient A et A' un couple de tangentes conjuguées et a leur point de rencontre, B et B' un autre couple de tangentes conjuguées et b leur point de rencontre; T désignant une tangente quelconque à l'hypercycle, appelons respectivement α, α', β et β' les points où T rencontre les semi-droites A, A', B et B'. Cela posé, on peut énoncer cette proposition : quelle que soit la tangente considérée, la longueur

$$\alpha a + \alpha' a + b\beta + b\beta' - \beta\alpha - \beta'\alpha'$$

a une valeur constante en grandeur et en signe.

La même proposition peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Menons les cycles qui touchent respectivement les semi-droites A, A' et T et les semi-droites B, B' et T; si l'on désigne par α_0 et β_0 leurs points de contact avec T, la longueur $\alpha_0\beta_0$ a, en grandeur et en signe, une valeur constante.

4. Cette valeur constante de la distance des points de contact α_0 et β_0 varie suivant les couples de tangentes conjuguées que l'on considère. A chaque couple de tangentes conjuguées en correspond toujours un autre, tel que la constante dont je viens de parler soit nulle; je dirai que ces deux couples sont *conjoints*.

Ainsi, étant donnés un hypercycle et deux couples conjoints de tangentes conjuguées A, A' et B, B', si l'on construit deux cycles K_a et K_b tangents entre eux et touchant respectivement A, A' et B, B', la tangente commune aux deux cycles est tangente à l'hypercycle.

Autrement, si deux cycles roulent l'un sur l'autre, l'un d'eux touchant deux semi-droites A et A', l'autre touchant deux autres semi-droites B et B', la tangente commune aux deux cycles enveloppe un hypercycle, et tout hypercycle peut être ainsi engendré d'une infinité de manières.

5. Un hypercycle étant donné, il existe deux systèmes de cycles

qui lui sont doublements tangents. Le centre de similitude de deux cycles, pris arbitrairement dans l'un des systèmes, est situé sur une droite fixe $O\omega_0$, passant par le point de rencontre O des semi-droites fondamentales P et P'; parmi les cycles du système, il y en a un, Ω, qui touche ces semi-droites. Dans l'autre système existe également un cycle Θ qui touche P et P'; deux cycles appartenant à ce système ont leur centre de similitude sur une droite fixe $O\theta_0$. Je désignerai les cycles Ω et Θ sous le nom de *cycles principaux,* et les droites $O\omega_0$ et $O\theta_0$ sous le nom d'*axes de l'hypercycle.* Les axes et les droites déterminés par les semi-droites fondamentales constituent un faisceau harmonique.

Un cycle inscrit dans P et P' a, en commun avec l'hypercycle, deux couples de tangentes conjuguées; ces tangentes forment un quadrilatère dont deux sommets sont situés sur la polaire de O, relativement au cycle considéré. Les quatre autres sommets sont distribués deux à deux sur les axes de la courbe.

Le lieu des centres des cycles doublement tangents qui appartiennent au même système que Ω est une parabole Π_ω, et la courbe peut être considérée comme une anticaustique par réfraction de cette parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à la droite $O\omega_0$. A l'autre système de cycles doublement tangents correspond une autre parabole Π_θ, en sorte que, généralement, l'hypercycle peut être considéré de deux façons différentes, comme l'anticaustique d'une parabole.

Dans certains cas particuliers, ces paraboles peuvent se réduire à des droites; dans le cas où l'un des deux axes est rejeté à l'infini, l'hypercycle est une courbe parallèle à une parabole.

6. L'hypercycle a été précédemment défini par les propriétés suivantes : les tangentes se distribuent par couples, de telle sorte que deux tangentes appartenant à un même couple (tangentes conjuguées) et les deux semi-droites fondamentales forment un système harmonique; les conjuguées harmoniques d'une semi-droite fixe D, par rapport aux couples de tangentes conjuguées, enveloppent un cycle K.

Le même hypercycle peut être ainsi défini d'une infinité de façons; on peut, en effet, énoncer la propriété fondamentale suivante :

Étant donnée une semi-droite quelconque Δ, *les conjuguées harmoniques des tangentes à ce cycle, relativement aux couples de tangentes conjuguées, enveloppent un cycle* Π.

Je désignerai ce cycle sous le nom de *cycle polaire* de la semi-droite Δ; les propriétés de ces cycles présentent la plus grande analogie avec les propriétés des pôles des droites dans la théorie des coniques.

Voici les principales de ces propriétés :

Si une semi-droite Δ a pour cycle polaire le cycle Π, les cycles polaires de toutes les tangentes à Π sont tangents à Δ.

Le cycle polaire d'une tangente à l'hypercycle touche cette courbe au point de contact de la tangente.

En désignant par Π et Π' les cycles polaires de deux semi-droites Δ et Δ', on voit que les cycles polaires des tangentes communes à Π et Π' touchent Δ et Δ'. Il en résulte qu'il y a deux cycles polaires qui touchent deux semi-droites données (ou qui touchent une semi-droite en un point donné); en particulier, il y a deux cycles polaires ayant un centre donné.

Si les deux semi-droites Δ et Δ' sont opposées, les tangentes communes à Π et Π' ont pour cycles polaires deux points; il y a donc une infinité de semi-droites dont les cycles polaires se réduisent à des points. Le lieu de ces points est une conique H, ayant pour asymptotes les semi-droites fondamentales, et l'enveloppe des semi-droites correspondantes est un cycle $\mathfrak{K}$.

Si une semi-droite se déplace parallèlement à elle-même, les cycles polaires demeurent tangents à deux semi-droites parallèles aux semi-droites fondamentales P et P'; le point de rencontre de ces semi-droites est situé sur la conique H.

Réciproquement, si par un point quelconque de H on mène deux parallèles à P et P', tout cycle inscrit dans ces semi-droites est un cycle polaire de l'hypercycle.

7. Il ne sera peut-être pas inutile, pour éviter toute difficulté dans l'application des propositions précédentes, de présenter quelques observations sur certaines formes singulières sous lesquelles peut se présenter un cycle.

Un système de semi-droites parallèles détermine un point à l'infini et sur une droite donnée se trouvent deux points à l'infini,

correspondant aux deux semi-droites déterminées par la droite. Au point de vue où nous sommes placés, nous devons donc considérer les points à l'infini comme situés sur une conique aplatie, et se réduisant à la portion de la droite de l'infini comprise entre les deux ombilics du plan. A tout point de la *conique de l'infini* correspond ainsi un système de semi-droites parallèles.

L'ensemble de deux points α et β de la conique de l'infini (défini par les parallèles à deux semi-droites fixes A et B) doit être considéré comme un cycle. Les tangentes à ce cycle, menées par un point M du plan, sont les semi-droites tracées par ce point parallèlement à A et B. Le centre de ce cycle est le point situé à l'infini sur la bissectrice des deux semi-droites A et B, et j'entends par là la droite qui est le lieu des centres des cycles tangents à A et à B.

En s'appuyant sur les définitions précédentes, on peut dire que le cycle polaire d'une semi-droite parallèle à P se compose de deux points de la conique de l'infini, l'un de ces points étant situé sur la semi-droite P'. Semblablement, le cycle polaire d'une semi-droite parallèle à P' se compose de deux points à l'infini, dont l'un est situé sur P.

8. Étant donnés deux cycles A et A', désignons par a et a' les points où ils touchent une des tangentes communes, par b et b' leurs points de contact avec l'autre tangente commune, par α et β les points milieux des segments aa' et bb'. Je dirai que le cycle K qui touche les tangentes communes aux points α et β est le cycle moyen des cycles donnés et que A' est le symétrique du cycle A relativement au cycle K.

Cette notion a de fréquentes applications. Étant donnés deux couples de semi-droites (A, A') et (B, B'), proposons-nous, par exemple, de déterminer les deux semi-droites qui forment un système harmonique avec A et A', ainsi qu'avec B et B'. A cet effet, construisons le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans les semi-droites A, A', B et A, A', B', puis le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans les semi-droites B, B', A et B, B', A'; cela posé, les tangentes communes aux deux cycles moyens dont je viens de parler sont les semi-droites cherchées.

9. Un hypercycle est complètement déterminé quand on se



donne deux couples de tangentes conjuguées (A, A′) et (B, B′) et une tangente quelconque T. Si l'on détermine d'abord, comme je viens de le dire, les deux semi-droites qui forment avec (A, A′) et (B, B′) des systèmes harmoniques, on aura les semi-droites fondamentales de la courbe. Que l'on construise ensuite la conjuguée harmonique A_0 de T relativement à (A, A′), puis sa conjuguée harmonique B_0 relativement à (B, B′), le cycle polaire de T sera déterminé, puisqu'il doit toucher T, A_0 et B_0.

L'hypercycle est donc bien défini, puisque l'on connaît ses deux semi-droites fondamentales et le cycle polaire d'une semi-droite du plan, et l'on peut en construire autant de tangentes qu'on le veut.

10. Soit (A, A′) un couple de tangentes conjuguées de l'hypercycle; leurs cycles polaires ont en commun deux tangentes communes B et B′. Ces semi-droites constituent un couple de tangentes conjuguées de la courbe; leurs cycles polaires sont tangents à A et A′.

Les deux couples de tangentes conjuguées (A, A′) et (B, B′) sont conjoints; en d'autres termes, si deux cycles respectivement inscrits dans les semi-droites A, A′ et B, B′ roulent l'un sur l'autre en demeurant constamment tangents, la tangente commune enveloppe l'hypercycle défini par les couples conjoints de tangentes.

11. Si une semi-droite roule sur un cycle K, le lieu du centre de son cycle polaire est une conique. Si l'on considère les cycles polaires de deux tangentes quelconques à ce cycle, leur centre de similitude est situé sur une droite fixe D. Il en résulte que l'enveloppe des cycles est un anticaustique par réfraction de conique, les rayons incidents étant perpendiculaires à la droite D.

En particulier, les cycles polaires de toutes les semi-droites qui passent par un point P ont leur centre sur une droite Δ. A chaque point P du plan correspond ainsi une droite Δ; si plusieurs points sont sur la droite A, les droites Δ correspondantes passent par un point fixe Q auquel correspond la droite A. Le système des points P et des droites Δ constitue donc deux systèmes corrélatifs.

12. Soient K un cycle quelconque inscrit dans les deux semi-

droites fondamentales, Ω et Θ les cycles principaux de la courbe, Ω_k et Θ_k les symétriques de K relativement à Ω et Θ; ces cycles sont aussi évidemment inscrits dans les deux semi-droites fondamentales. En désignant par ω_1 et θ_1 les points où Ω et Θ touchent respectivement A, la longueur $\omega_1\theta_1$ est parfaitement déterminée en grandeur et en signe; j'appellerai cette longueur p le *paramètre de la courbe;* il est clair que la distance entre les points où Ω_k et Θ_k touchent A est égale à $2p$.

Cela posé, si une semi-droite roule sur K, son cycle polaire demeure constamment tangent à Ω_k et Θ_k. Si l'on désigne par ω et ω' les tangentes à la courbe menées aux points où elle touche Ω et si l'on se donne la semi-droite D, son cycle polaire sera entièrement déterminé, puisqu'il touche Ω_k au point de contact de ce cycle avec la conjuguée harmonique de D relativement aux semi-droites ω et ω'.

On peut ainsi déterminer aisément le cycle polaire d'une semi-droite donnée. Réciproquement, un cycle étant donné, il est facile de reconnaître si c'est un cycle polaire et, dans ce cas, de construire la semi-droite correspondante.

Que l'on mène à ce cycle les tangentes parallèles aux semi-droites fondamentales, le cycle, d'après une proposition énoncée plus haut, sera un cycle polaire si le point de rencontre de ces tangentes est sur la conique H lieu des cycles polaires qui se réduisent à des points.

Autrement : que l'on mène les deux cycles D_ω et D_θ qui touchent K et les semi-droites fondamentales; si la longueur comprise sur A entre les points de contact de ces cycles est égale à $2p$, le cycle est un cycle polaire. Les symétriques de D_ω et D_θ pris respectivement par rapport à Ω et Θ se confondent alors en un même cycle; et, D' désignant la tangente commune à D_ω et Ω en leur point de contact, la conjuguée harmonique de D' relativement à ω et à ω' a précisément K pour cycle polaire.

Il résulte de ce qui précède que, si deux cycles D_ω et D_θ inscrits dans les deux semi-droites fondamentales sont tels que la distance entre leurs points de contact avec A soit égale à $2p$, tout cycle tangent à D_ω et D_θ est un cycle polaire. Les deux points de rencontre de ces cycles sont donc des cycles polaires qui se réduisent à des points, et sont par suite situés sur la conique H.

Les propriétés précédentes conduisent à un assez grand nombre de propriétés des coniques, parmi lesquelles j'énoncerai seulement la suivante :

Étant donnée une conique, attribuons un sens quelconque à ses deux asymptotes A et A'. Par un point M quelconque de la conique, menons deux parallèles Q et Q' aux semi-droites A et A'; par un autre point N pris arbitrairement sur la conique, menons les deux cycles R et R' qui sont tangents à A et A'. Cela posé, les deux semi-droites Q et Q' et les cycles R et R' sont tangents à un même cycle K; l'axe radical de R et de R' est la droite qui joint les points de contact de K avec les semi-droites Q et Q'; la tangente à la conique au point M et les tangentes menées à K aux points où ce cycle touche R et R' concourent en un même point.

13. Soient D une semi-droite quelconque du plan et K son cycle polaire; menons à ce cycle la tangente D' qui est parallèle à D. La semi-droite, menée parallèlement à D et D' et qui en est également distante, est la tangente à l'hypocycle qui est parallèle à D.

14. Une des propriétés les plus utiles de l'hypercycle est la suivante :

Considérons les quatre tangentes communes A, B, C et D qui touchent à la fois la courbe et un cycle donné, et soient C' et D' les tangentes conjuguées de deux quelconques d'entre elles, C et D; les quatre semi-droites A, B, C' et D' sont également tangentes à un même cycle.

Soient A et B deux tangentes fixes de la courbe; inscrivons un cycle quelconque K dans ces semi-droites et soient C et D les deux autres tangentes communes au cycle et à l'hypercycle. Il résulte de la proposition précédente qu'en désignant par C' et D' les conjuguées de C et D, C' et D' sont tangentes à un cycle K' inscrit dans A et B. Le cycle moyen K_0 des deux cycles K et K' est fixe, quel que soit le cycle K que l'on considère, et il est complètement déterminé quand on se donne les deux tangentes A et B; c'est le cycle inscrit dans A et B et qui touche deux tangentes conjuguées (dans le cas où A et B sont elles-mêmes conjuguées, c'est le cycle qui touche ces tangentes et les semi-droites fondamentales); si les

deux tangentes A et B viennent se confondre, le cycle moyen K_0 correspondant est le cycle polaire de la tangente.

Il résulte de là que la courbe est entièrement définie quand on se donne deux tangentes quelconques A et B, le cycle moyen correspondant K_0 et les deux semi-droites fondamentales. Il est facile en effet de construire les tangentes communes à l'hypercycle et à un cycle quelconque K inscrit dans A et B; que l'on construise le cycle K' symétrique du cycle K relativement au cycle K_0. L'enveloppe des conjuguées harmoniques des tangentes à K' relativement aux semi-droites fondamentales est un cycle K'' et les deux tangentes communes à K et à K'' seront les droites cherchées.

De là résulte en particulier un moyen facile de construire le cercle osculateur en un point a de la courbe. A désignant la tangente en ce point, construisons la tangente conjuguée A', puis le centre G du cercle qui touche A' et la courbe au point a; cela posé, α désignant le centre du cycle polaire de la tangente A, le centre du cercle osculateur cherché est le symétrique du point G relativement à α. Un hypercycle a un seul foyer F qui est un foyer singulier; la somme des distances du foyer à deux tangentes conjuguées quelconques est constante.

15. Le cas particulier où les semi-droites A et B sont opposées mérite un examen spécial. L'hypercycle peut être défini comme une courbe de quatrième classe et du sixième ordre ayant trois tangentes doubles dont l'une est la droite de l'infini et passant par les ombilics du plan. Les tangentes doubles sont des *tangentes doubles apparentes;* car, aux points de contact, la courbe a des directions opposées; en réalité, on doit les considérer comme des tangentes distinctes, mais opposées.

Les quatre points doubles de la courbe déterminent trois couples de droites correspondant respectivement aux tangentes doubles; les deux droites dont l'ensemble correspond à la droite de l'infini sont les *axes* de la courbe et se croisent au point O, qui est l'intersection des semi-droites fondamentales, lesquelles passent d'ailleurs par les points de contact de la droite de l'infini avec l'hypercycle.

Soient A et B les deux autres tangentes doubles de la courbe et R leur point de rencontre; la droite menée par le point O per-

pendiculairement à la bissectrice des semi-droites fondamentales (j'entends par là le lieu des centres des cycles inscrits dans ces deux semi-droites) rencontre respectivement A et B en deux points a et b dont le milieu est précisément le point O. Désignons par α et β les milieux des segments Ra et Rb, nous pourrons énoncer la propriété suivante : Si une tangente à la courbe coupe A et B aux points α_1 et β_1 et si nous déterminons les points α_2 et β_2 qui sont respectivement les symétriques de α_1 et β_1 relativement à α et β, la semi-droite $\alpha_2\beta_2$ est tangente à la courbe et est la conjuguée de la tangente $\alpha_1\beta_1$.

La tangente double A rencontre la courbe en deux points distincts des points de contact; ces points sont équidistants du point α et les tangentes sont conjuguées. Une propriété analogue a lieu relativement à la tangente double B.

La courbe est entièrement déterminée quand on se donne les deux semi-droites fondamentales, une des tangentes doubles A et le point α; on peut énoncer en effet la proposition suivante :

Inscrivons dans les deux semi-droites fondamentales un cycle quelconque K; désignons par a' le point où la corde de contact coupe la tangente double A, par a le point symétrique du point a' relativement au point α. Cela posé, les tangentes menées du point a à la courbe sont parallèles aux tangentes que l'on mène du point α au cycle K.

Cette construction permet de déterminer facilement les tangentes parallèles à une direction donnée ou émanant d'un point quelconque de la tangente double, et par suite tous les éléments importants de la courbe.

16. Avant d'exposer de nouvelles propriétés de l'hypercycle, je rappellerai d'abord quelques notions fondamentales relativement à la transformation par semi-droites réciproques.

Cette transformation est complètement définie par les propriétés suivantes :

Deux semi-droites réciproques se coupent sur une droite fixe Δ que l'on peut appeler *axe de transformation;* deux *couples* quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.

J'ajouterai que deux couples de semi-droites harmoniques ont

pour réciproques deux couples de semi-droites harmoniques et que la distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des cycles réciproques; j'entends ici par distance tangentielle de deux cycles la longueur comprise sur l'une quelconque des deux tangentes communes entre leurs points de contact.

Cela posé, il résulte de la définition même des hypercycles que ces courbes ont pour transformées par semi-droites réciproques d'autres hypercycles; les semi-droites fondamentales de la transformée étant les transformées des semi-droites fondamentales de la courbe donnée.

Aux tangentes conjuguées de cette courbe correspondent les tangentes conjuguées de la transformée, etc. Je ferai remarquer à ce sujet qu'une tangente double de la proposée étant une tangente double apparente a pour transformées deux tangentes ordinaires de la transformée.

Considérons un cycle quelconque K inscrit dans les deux semi-droites fondamentales; il a en commun avec la courbe quatre tangentes qui se coupent deux à deux sur l'un des axes $O\omega_0$. Effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que ce cycle se transforme en un point : les quatre tangentes auront pour transformées deux couples de semi-droites opposées; de telle sorte que, relativement à la courbe transformée, deux couples de tangentes conjuguées se composeront de semi-droites opposées.

Si l'on coupe ces tangentes par une tangente quelconque rencontrant ces deux couples aux points α, α' et β, β', on a, d'après une propriété générale énoncée plus haut,

$$\alpha a + \alpha' a + b\beta + b\beta' - \alpha\beta - \alpha\beta' = \text{const.}$$

Or, dans ce cas particulier, les points α et β se confondent, ainsi que les points α' et β'; αa est opposée à $b\beta$ et $\alpha' a$ à $b\beta'$; on a donc $\alpha\beta = \alpha'\beta' = 0$, $b\beta = \alpha a$ et $b\beta' = \alpha' a$, et par suite

$$\alpha a + \alpha' a = \text{const.};$$

d'où il suit que la courbe transformée est une parabole.

Ainsi (si l'on admet des transformations imaginaires), tout

hypercycle, sauf un cas particulier que j'examinerai plus loin, est la transformée par semi-droites réciproques d'une parabole.

17. La transformation peut se faire de deux façons différentes, correspondant aux deux axes de la courbe. Les paraboles résultant de la transformation ont même paramètre; sa valeur est égale au paramètre p de l'hypercycle.

La proposition précédente est au fond identique avec une de celles que j'ai énoncées plus haut, à savoir que l'hypercycle peut être considéré comme une anticaustique par *réfraction* d'une parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'un des axes ([1]); mais la forme actuelle a l'avantage de montrer immédiatement comment on peut étendre à l'hypercycle les propriétés connues de la parabole.

La parabole elle-même peut être considérée comme un hypercycle composé de deux branches opposées, en sorte qu'en chaque point de la parabole passent deux tangentes distinctes, et la théorie que j'ai exposée précédemment fournit un grand nombre de propriétés nouvelles de cette conique.

Le cycle polaire d'une semi-droite du plan Δ, relativement à une parabole P, peut se construire facilement. Du pôle A de Δ, relativement à P, abaissons une perpendiculaire sur Δ et prenons son point de rencontre B avec l'axe de la courbe; le cycle cherché D a AB pour diamètre et son sens est entièrement déterminé par cette remarque qu'au point A la tangente est parallèle à Δ. On voit par cette construction que deux semi-droites opposées ont des cycles polaires opposés.

Les semi-droites fondamentales sont opposées et déterminées par la position de l'axe; deux tangentes conjuguées sont donc symétriques par rapport à l'axe.

18. Il y a un cas particulier remarquable, dans lequel il est évidemment impossible de transformer un hypercycle en une parabole; c'est celui où son paramètre p est nul. La courbe est alors de la troisième classe et je la désignerai sous le nom d'*hypercycle*

([1]) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur la transformation par directions réciproques* (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 71).

cubique; elle peut être définie comme une courbe de troisième classe ayant une tangente double, touchant la droite de l'infini et passant par les ombilics du plan.

Sa propriété caractéristique consiste en ce que tous les cycles polaires touchent une des demi-droites fondamentales P; celle-ci est elle-même tangente à la courbe, et je l'appellerai *tangente fondamentale.* L'autre semi-droite fondamentale est parallèle et de sens contraire à la tangente Θ à la courbe qui passe par le point de contact de celle-ci avec la droite de l'infini.

Un hypercycle étant défini par ses semi-droites fondamentales, une semi-droite Δ et son cycle polaire, cet hypercycle est de troisième classe si ce cycle polaire touche une des semi-droites fondamentales et tous les autres cycles polaires touchent également cette semi-droite.

Un hypercycle cubique étant donné, ses semi-droites fondamentales ne sont pas déterminées. Prenons arbitrairement une tangente Δ à cette courbe, nous pourrons la regarder comme une tangente fondamentale et lui adjoindre une semi-droite Δ' antiparallèle à Θ, de telle sorte qu'à chaque tangente T de la courbe en corresponde une autre T' constituant avec celle-ci et le couple (Δ, Δ') un système harmonique.

Tous les théorèmes généraux donnés précédemment relativement à l'hypercycle général s'appliquent à l'hypercycle cubique, mais l'application peut en être faite d'une infinité de manières, puisqu'il y a une infinité de modes de groupement des tangentes.

L'hypercycle cubique se relie encore à la parabole d'une façon étroite; c'est, en effet, une anticaustique *par réflexion* de parabole, les rayons incidents étant parallèles, et elle peut être d'une infinité de façons considérée comme une anticaustique d'une pareille courbe.

19. Les propositions relatives aux tangentes communes à un cycle et un hypercycle sont notablement modifiées quand la courbe est de la troisième classe, puisque dans ce cas il n'y a plus que trois tangentes communes.

J'énoncerai ici le théorème important qui suit : T et T' désignant deux tangentes quelconques conjuguées dans un mode de groupement caractérisé par la tangente fondamentale $D\delta$, A et B

deux autres tangentes *quelconques*, construisons les cycles K et K′ qui touchent respectivement A, B, T et A, B, T′; cela posé, le cycle [1] moyen de K et K′ est tangent à D.

Considérons en particulier le mode de groupement où les tangentes isotropes issues du foyer F de la courbe sont conjuguées et appelons Δ la tangente fondamentale correspondante (cette tangente est celle que l'on peut mener du pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente double); nous pourrons énoncer la proposition qui suit et qui donne une propriété de *deux tangentes quelconques :*

Étant données deux tangentes quelconques A *et* A′ *à l'hypercycle, soient* m *le centre du cycle tangent aux semi-droites* A, A′ *et* Δ, *et* α *le point de rencontre de* A *et* A′; *la droite menée par* m *perpendiculairement à* $m\alpha$ *passe par le foyer* F *de la courbe.*

En voici quelques conséquences : imaginons que, A restant fixe, A′ se déplace tangentiellement à la courbe; en désignant par a le point de rencontre de A et de Δ, le point m décrit la bissectrice am des deux semi-droites A et Δ (droite qui, comme je l'ai déjà rappelé plusieurs fois, est entièrement déterminée), et la bissectrice $m\alpha$ des deux tangentes A et A′ enveloppe une parabole P ayant F pour foyer.

Or de là résulte immédiatement que l'hypercycle peut être considéré comme l'enveloppe des cycles qui touchent A et ont leur centre sur la parabole P; en d'autres termes, l'hyperbole est une anticaustique par réflexion de la parabole P, les rayons incidents étant perpendiculaires à la tangente A.

La courbe peut donc être considérée d'une infinité de manières comme anticaustique de parabole; toutes les paraboles ont pour foyer F, et les tangentes menées aux sommets sont tangentes à l'enveloppe des bissectrices telles que $m\alpha$; c'est précisément celle

---

(1) Je rappelle que le cycle moyen de deux cycles ayant respectivement pour centre les points a et b, pour rayon R et R′, est le cycle ayant pour centre le point milieu du segment ab et pour rayon $\frac{R+R'}{2}$.

des paraboles considérées qui correspond à une direction des rayons lumineux perpendiculaires à Δ.

Cette parabole π a pour tangente au sommet la normale menée à la courbe au point où elle touche Δ; elle peut être également considérée comme le lieu des projections du foyer F sur les normales à l'hypercycle.

20. Je mentionnerai enfin un élégant théorème de Géométrie élémentaire qui résulte immédiatement de la proposition précédente :

Étant données quatre semi-droites quelconques A, B, C *et* Δ, *désignons par* a, b, c *les sommets du triangle déterminé par les côtés* A, B, C (a étant l'intersection de B et de C, etc.), *et par* α, β, γ *les centres des cycles inscrits dans les triangles déterminés par les côtés* B, C *et* Δ, C, A *et* Δ, A, B *et* Δ; *cela posé, les droites menées par les points* α, β *et* γ, *et respectivement perpendiculaires aux droites* αa, βb *et* γc, *se coupent en un même point.*

Ce point est, en effet, le foyer de l'hypercycle cubique déterminé par les cinq conditions suivantes, à savoir qu'il touche les semi-droites A, B, C, et que Δ soit la tangente fondamentale correspondant aux tangentes issues du foyer.

SUR LES

ANTICAUSTIQUES PAR RÉFLEXION DE LA PARABOLE

LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PARALLÈLES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1883.

1. J'appelle *bissectrice* de deux semi-droites données la droite parfaitement déterminée qui est le lieu des cycles tangents à ces demi-droites; la droite menée par leur point de rencontre et perpendiculairement à la bissectrice sera désignée sous le nom de *bissectrice impropre*.

Deux semi-droites sont symétriques par rapport à leur bissectrice impropre; je dirai qu'elles sont *anti-symétriques* par rapport à leur bissectrice.

Ces définitions étant posées, je m'appuierai sur les lemmes suivants :

Lemme I. — *Quatre semi-droites étant données, si l'on considère trois à trois ces semi-droites, on obtient quatre triangles; les centres des cycles inscrits dans ces triangles sont sur un même cercle.*

Considérons en effet (*fig.* 1) les quatre semi-droites AB, BE, EA et CF. Les bissectrices des côtés du triangle ABC le coupent au point δ, celle du triangle BCD au point α, celles du triangle EDF au point β et celles du triangle CFA au point γ. Pour établir que ces quatre points sont sur une même circonférence, il suffit d'établir que l'angle $\alpha\delta\beta$ est égal à l'angle $\alpha\gamma\beta$.

On a évidemment

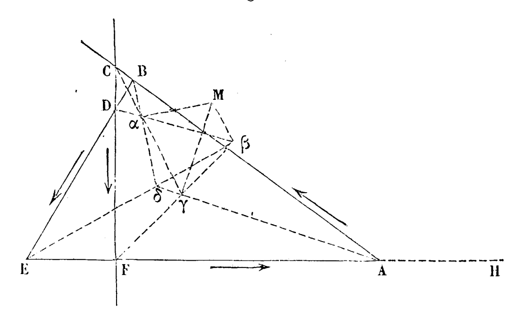
$$\widehat{\alpha\delta\lambda} = \widehat{BE\delta} + \widehat{EB\delta} = \tfrac{1}{2}\widehat{BEA} + \tfrac{1}{2}\widehat{EBA} - \tfrac{1}{2}\widehat{BAH};$$

d'autre part, on a

$$\widehat{\alpha\gamma\beta} = \widehat{FC\gamma} + \widehat{CF\gamma} = \tfrac{1}{2}\widehat{FCA} + \tfrac{1}{2}\widehat{CFA} = \tfrac{1}{2}\widehat{BAH}.$$

La proposition est donc démontrée.

Fig. 1.



2. Sur la circonférence $\alpha\gamma\beta\delta$, considérons le point M diamétralement opposé au point δ, on voit que les droites $M\alpha$, $M\beta$ et $M\gamma$ sont respectivement perpendiculaires aux droites $B\alpha$, $E\beta$ et $A\gamma$. Or α est le centre du cycle qui touche les semi-droites AB, BE et CF, β le centre du cycle qui touche les semi-droites BE, AE et CF, et γ le centre du cycle qui touche les semi-droites AE, AB et CF. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lemme II. — *Étant données quatre semi-droites* D, D', D'' *et* Δ, *soient* α, α', α'' *les centres des cycles inscrits respectivement dans les triangles déterminés par les semi-droites* (D', D'', Δ), (D'', D, Δ) *et* (D, D', Δ); *désignons par* β *le point de rencontre de* D' *et* D'', *par* β' *le point de rencontre de* D'' *et de* D *et enfin par* β'' *le point de rencontre de* D *et* D'.

Cela posé, les droites menées par les points α, α', α'' *et perpendiculaires respectivement aux droites* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ *concourent en un même point.*

3. Considérons maintenant deux semi-droites fixes A et Δ et une semi-droite mobile B assujettie à la condition suivante, à sa-

voir que, p désignant le point de rencontre de A et de Δ, q le centre du cycle inscrit dans le triangle formé par les semi-droites A, A et Δ, la droite menée par q perpendiculairement à pq passe par un point fixe F.

La semi-droite B enveloppera dans son mouvement une courbe parfaitement déterminée; elle est de l'espèce de celles que j'ai appelées *hypercycles* et de la troisième classe; c'est donc un *hypercycle cubique*. Dans tout le cours de cette Note, quand il n'y aura aucune confusion à craindre, je la désignerai simplement sous le nom d'*hypercycle;* comme je le montrerai plus tard, le point fixe F est le foyer de cette courbe ([1]).

4. Un hypercycle étant ainsi défini par les deux semi-droites A et Δ, considérons une autre tangente quelconque à la courbe C; en désignant par r le point de rencontre de A et de C, par s le centre du cycle tangent aux semi-droites A, C et Δ, il suit de la définition de la courbe que la droite menée par s perpendiculairement à rs passe par le foyer de la courbe. Soient maintenant α le point de rencontre des tangentes C et B, β le centre du cycle tangent à B, C et Δ, il résulte du lemme II que la droite menée par β perpendiculairement à $\beta\alpha$ passe également par le foyer F.

Nous pouvons donc énoncer cette propriété fondamentale.

Théorème I. — *Étant données deux tangentes quelconques de l'hypercycle, considérons le centre du cycle qui touche ces deux tangentes et la semi-droite* Δ; *les droites, qui joignent ce centre au foyer de la courbe et au point de rencontre des tangentes, sont perpendiculaires entre elles.*

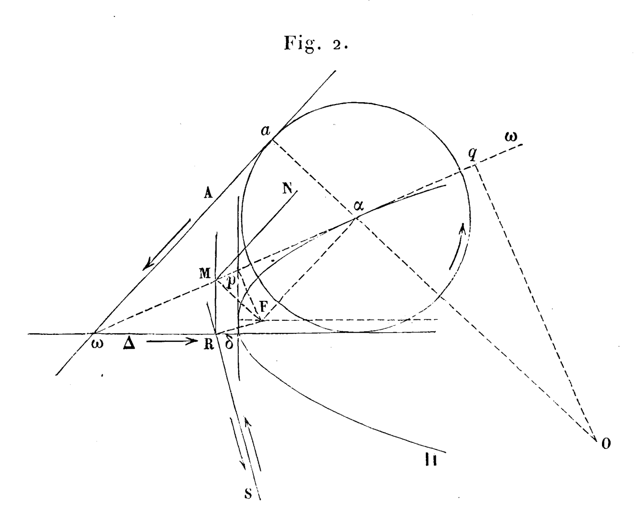
5. Considérons une tangente A (*fig.* 2) à un hypercycle H et a le point où elle touche la courbe; la tangente infiniment voisine A' passe par le point A et la bissectrice de deux semi-droites A et A' est la normale menée au point a; soit α le point où cette normale rencontre la bissectrice des semi-droites A et Δ; d'après le théo-

([1]) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les hypercycles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séances des 20 mars, 3, 10 et 24 avril 1882).

rème précédent, la droite $F\alpha$ est perpendiculaire à la normale et, par suite, parallèle à A. D'où la proposition suivante :

Étant donnée une tangente A *à l'hypercycle* H, *que par le foyer* F *de la courbe on mène une parallèle à* A, *et que l'on*

Fig. 2.



prenne son point de rencontre α *avec la bissectrice des semi-droites* A *et* Δ; *que du point* α *on abaisse ensuite une perpendiculaire de la tangente* A, *le pied* a *de cette perpendiculaire est le point de contact de* A *avec la courbe.*

6. La semi-droite Δ est tangente à la courbe. Supposons en effet (*fig.* 2) l'hypercycle défini par la semi-droite Δ et une tangente quelconque A. Soit $\omega\omega'$ la bissectrice des demi-droites A et Δ; abaissons du point F une perpendiculaire Fp sur $\omega\omega'$, puis, du point p, une perpendiculaire $p\delta$ sur Δ. Si nous imaginons une semi-droite Δ' infiniment voisine de Δ et passant par le point d, la bissectrice de Δ et de A est la droite $\omega\omega'$, le centre du cycle tangent à A, Δ et Δ' est évidemment le point p et, comme pF est perpendiculaire à $p\omega$, il résulte du théorème I que Δ' (et par suite Δ) est tangente à l'hypercycle; son point de contact est le point A.

Je dirai que Δ est la tangente principale de la courbe.

Dans la démonstration précédente, A est une tangente quelconque de l'hypercycle; lorsque cette tangente varie, on voit que

la bissectrice $\omega\omega'$ enveloppe une parabole Π ayant F pour foyer, et $p\delta$ pour tangente au sommet : cela résulte immédiatement de ce que l'angle $Fp\omega$ est un angle droit.

Il est aisé de voir que la droite $\omega\omega'$ touche la parabole Π au point α; de ce point, comme centre, décrivons un cycle touchant à la fois Δ et A; son enveloppe, lorsque A se déplace tangentiellement à l'hypercycle, et que le point α décrira la parabole Π, se compose de la semi-droite Δ et de l'hypercycle H : on peut donc dire que *le lieu des centres des cycles, qui touchent l'hypercycle et la tangente fondamentale* Δ, *est la parabole* Π.

En d'autres termes :

L'hypercycle H *est une anticaustique* (¹) *par réflexion de la parabole* Π, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe de cette parabole.*

Remarque. — On voit que la parabole Π est le lieu des points α; il en résulte que *la parabole* Π *est le lieu des projections du foyer* F *sur les normales à l'hypercycle.*

7. *Tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point situé sur une tangente donnée.*

Soient un hypercycle H défini par son foyer F, sa tangente principale Δ et une tangente quelconque A; soit, de plus, $\omega\omega'$ la bissectrice des semi-droites A et Δ. Étant pris sur A un point quelconque M, si nous imaginons une tangente quelconque menée de ce point à la courbe, il suit du théorème I que, du centre du cycle inscrit dans cette tangente, A et Δ, on doit voir sous un angle droit le segment MF. Soit MF comme diamètre décrivant un cercle, et soient α, β les points où ce cercle coupe la bissectrice $\omega\omega'$; il est clair, d'après ce qui précède, que les tangentes que, du point M, on peut mener à la courbe (et qui sont distinctes de A), sont les *antisymétriques* de A relativement aux droites $M\alpha$ et $M\beta$.

Remarque I. — Il résulte de la construction précédente que par chaque point du plan passent trois tangentes à la courbe : l'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe.

(¹) Dans la suite de cette Note, chaque fois que je parlerai d'une anticaustique, sans rien mentionner de plus, je supposerai expressément que les rayons incidents sont parallèles.

Remarque II. — Par le foyer F, menons une droite qui soit parallèle à la bissectrice $\omega\omega'$ et qui rencontre A au point p ; soit q le point symétrique de p relativement au point ω, intersection de A et de Δ. Si, sur qF comme diamètre, nous décrivons un cercle rencontrant la bissectrice $\omega\omega'$ aux points α et β, le centre de ce cercle est évidemment sur cette bissectrice ; l'angle $\alpha q \beta$ est par conséquent droit, et les deux tangentes, que du point q on peut mener à l'hypercycle (indépendamment de la tangente A), sont des semi-droites opposées : cela résulte immédiatement de la construction donnée ci-dessus.

Ces deux tangentes sont distinctes, ainsi que leurs points de contact ; la droite qui correspond à ces deux semi-droites opposées est donc une *tangente double* de la courbe ; mais elle doit être considérée comme une *tangente double apparente* ([1]).

L'hypercycle, étant de la troisième classe et ayant une tangente double, est du quatrième degré.

Remarque III. — Supposons que le cercle décrit sur MF comme diamètre soit tangent à la bissectrice $\omega\omega'$; les points α et β étant confondus, il en est de même des droites Mα et Mβ ; par suite, les tangentes menées du point M à la courbe (et distinctes de A) sont confondues. Le point M est donc situé sur la courbe ; d'où la conclusion suivante :

Soit P *le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la tangente* A ; *par les deux points* F *et* P *on peut mener deux cercles tangents à la bissectrice de* A *et de la tangente fondamentale, les points où ces cercles coupent* A *sont les deux points (distincts du point de contact) où cette tangente coupe l'hypercycle.*

([1]) Au point de vue où nous sommes placé ici, une semi-droite est tangente double d'une courbe, si, en deux de ses points, elle a même direction que cette courbe ; c'est alors une *tangente double effective*. Mais, si une droite est telle, qu'en la prenant d'abord dans un sens déterminé elle touche la courbe et qu'elle la touche encore en la prenant dans le sens inverse, on a une *tangente double apparente*.

Lorsqu'on effectue une transformation par directions réciproques, une tangente double effective a pour transformée une tangente double effective, tandis qu'une tangente double apparente (qui résulte de la superposition de deux tangentes opposées) a pour transformées deux tangentes ordinaires distinctes.

8. *Tangente parallèle à une semi-droite donnée.* — L'hypercycle étant défini comme précédemment par son foyer F, la tangente fondamentale Δ et une tangente quelconque A, proposons-nous de mener à cette courbe une tangente parallèle à une semi-droite donnée D.

Construisons à cet effet la bissectrice (D, A) [1] et menons par le foyer F une perpendiculaire à (P, A); par le point β, où cette perpendiculaire coupe la bissectrice (A, Δ), menons une parallèle à (D, A) rencontrant au point α la tangente A. Il résulte du théorème I que l'antisymétrique de A relativement à la droite αβ est une tangente à la courbe qui est évidemment parallèle à la semi-droite donnée D.

On peut donc mener une tangente et une seule, qui soit parallèle à la semi-droite donnée; comme on peut mener également une tangente parallèle à la semi-droite opposée, il en résulte que, par un point situé à l'infini, on peut généralement mener deux tangentes à la courbe. La courbe étant de troisième classe, on voit qu'elle est nécessairement tangente à la droite de l'infini.

Deux cas particuliers sont à remarquer : si la droite donnée est antiparallèle à Δ, les bissectrices (D, A) sont (Δ, A) perpendiculaires, et le point β est répété à l'infini. La tangente antiparallèle à Δ étant rejetée à l'infini, on voit que le point de contact de l'hypercycle avec la droite de l'infini est sur Δ; en d'autres termes :

La tangente principale est la tangente que l'on peut mener à la courbe par le point où elle touche la droite de l'infini.

Considérons, en second lieu, le cas où D est une direction isotrope; je ferai remarquer à ce sujet qu'*une semi-droite isotrope doit être considérée comme se confondant avec son opposée* [2].

Si donc on considère un des ombilics du plan (c'est-à-dire des deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan), on voit que par ce plan on ne peut mener à la courbe qu'une tangente

---

[1] Ici et comme dans tout ce qui suit, je désigne, pour abréger, par la notation (P, Q) la bissectrice de deux semi-droites données P et Q.

[2] On voit qu'il n'y a pas besoin de distinguer le sens dans lequel est décrite une droite isotrope; ainsi *droite isotrope* et *semi-droite isotrope* ont exactement la même signification.

distincte de la droite de l'infini : d'où il résulte que ce point est situé sur la courbe.

L'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe et du quatrième degré, tangente à la droite de l'infini et passant par les ombilics. Elle a un seul foyer, qui est un foyer singulier; la construction donnée ci-dessus montre aisément que ce foyer est le point F [1].

Réciproquement, toute courbe de la troisième classe et du quatrième degré qui touche la droite de l'infini et passe par les ombilics du plan est un hypercycle.

9. Voici encore une conséquence de la construction donnée ci-dessus. Une tangente A étant donnée, cherchons à déterminer la tangente A′ parallèle à la direction opposée. La bissectrice (A, A′) est une droite parallèle à A, et la perpendiculaire abaissée du foyer F sur cette droite rencontre la bissectrice $\omega\omega'$ au point M (*fig.* 2) : d'où il résulte que A′ est l'antisymétrique A par rapport à la droite MN menée par le point M parallèlement à A.

Or l'enveloppe de cette droite est aisée à trouver; l'angle MFα étant droit, le point M décrit la directrice de la parabole Π, et l'angle NMF étant également droit, MN enveloppe une parabole Π', qui a pour foyer F et pour tangente au sommet la directrice MR de la parabole Π.

Je ferai remarquer que la droite RS, menée par le point R perpendiculairement à RF, est la tangente double de la courbe.

10. L'hypercycle étant défini comme enveloppe d'une semi-droite mobile est, comme le cycle, une *courbe de direction;* je veux dire par là qu'en chacun de ses points la tangente est déterminée de position et de direction.

Considérons un cycle C et le cercle K déterminé par ce cycle; le cercle K étant de seconde classe et l'hypercycle de la troisième, ces deux courbes ont en commun six tangentes dont la direction est déterminée, puisqu'elles touchent l'hypercycle. De ces six

[1] Il suffit de remarquer que la bissectrice d'une semi-droite donnée et d'une drotie isotrope est cette droite isotrope elle-même.



demi-droites, trois seulement sont tangentes à C, les autres étant tangentes au cycle opposé.

Ainsi, *un cycle et un hypercycle ont trois tangentes communes.*

11. *Détermination des tangentes communes à un cycle qui touche une tangente à l'hypercycle.* — Considérons un cycle C qui touche une tangente A à l'hypercycle; il a en commun, avec cette courbe, deux tangentes que l'on peut déterminer par la règle et le compas.

A cet effet, Δ désignant la tangente principale de la courbe, F son foyer et $\omega\omega'$ la bissectrice (A, D), appelons O le centre du cycle donné, et qui est ainsi bien défini; sur OF comme diamètre, décrivons un cercle K qui coupe $\omega\omega'$ aux points γ et δ; joignons $O\alpha$ et $O\beta$, et soient γ' et δ' les points où ces droites rencontrent la tangente A.

Cela posé, on vérifiera facilement qne les tangentes menées des points α' et β' au cycle C sont les tangentes cherchées.

12. *Construction du cycle osculateur en un point donné.* — Soit (*fig.* 2) à construire le cycle osculateur au point a où la tangente A touche la courbe. Si le cycle C est osculateur, les points γ' et δ' doivent se confondre avec le point a, et par conséquent les points γ et δ avec le point α. Le cercle K touche donc la bissectrice $\omega\omega'$ au point α, et son centre est déterminé, puisqu'il est, en outre, sur la droite élevée par le milieu du segment $F\alpha$ perpendiculaire à ce segment.

De là la construction simple suivante :

F*p étant la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la bissectrice* $\omega\omega'$, *déterminons le point* q *symétrique de* p *par rapport à* α *et au point* q, *menons une droite perpendiculaire à* $\omega\omega'$: *le point* O *où cette droite rencontre la normale est le centre du cycle osculateur de la courbe au point* a.

13. *Lieu des centres des cycles qui touchent l'hypercycle et une tangente donnée de cette courbe.* — En conservant les mêmes notations que ci-dessus, supposons que le cycle qui a pour centre le point O soit tangent à l'hypercycle; les deux points γ'

et δ' seront alors confondus, ainsi que les points γ, δ. Le cercle décrit sur OF comme diamètre touche donc $\omega\omega'$; son centre O', étant également distant du point F et de $\omega\omega'$, décrit une parabole ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ comme directrice, et, par suite, le centre O décrit une parabole P ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ pour tangente au sommet.

La même proposition peut s'énoncer de la façon suivante :

L'hypercycle est une anticaustique de la parabale P, *les rayons incidents étant perpendiculaires à la tangente* A.

Un hypercycle peut être ainsi considéré d'une infinité de façons comme une anticaustique de parabole; toutes les paraboles qui correspondent à ce mode de génération sont homofocales, et leurs tangentes au sommet enveloppent la parabole Π.

14. Il résulte également de là le théorème suivant, qui exprime une propriété de six semi-droites quelconques tangentes à un même hypercycle :

Théorème II. — *Si six semi-droites* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *et* A_6 *sont tangentes à un même hypercycle, les cinq bissectrices* (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5) *et* (A_1, A_6) *sont tangentes à une même parabole.*

Le foyer de cette parabole est le foyer de l'hypercycle.

15. Comme je l'ai dit plus haut, l'hypercycle est une courbe de direction; en d'autres termes, en chaque point de cette courbe, la tangente est déterminée non seulement en position, mais encore en direction. Il en est de même du cycle; mais une courbe algébrique, prise au hasard, n'est pas une courbe de direction.

Étant donnée une courbe algébrique K de classe n, si, en la supposant décrite dans un certain sens, on peut la transformer en une courbe de direction K_0, il faut que, étant donné un cycle quelconque C, des $2n$ tangentes communes à K et à C, n soient seulement des tangentes effectives à K_0, les n autres étant des tangentes apparentes.

De là résulte que l'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit, par l'extraction d'une simple racine carrée,

se ramener à la résolution des deux équations du degré n; et, comme (en coordonnées rectangulaires) l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2 + v^2 = (\alpha u + \beta v + \gamma)^2,$$

il en résulte que l'équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme

$$F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v),$$

F et Φ désignant deux fonctions rationnelles de u et de v.

16. Lorsque l'équation d'une courbe algébrique K du degré n n'est pas de la forme que je viens d'indiquer (telle est, par exemple, une conique quelconque différente du cercle), pour la transformer en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, et comme le résultat de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la courbe K.

Une telle courbe doit être considérée comme double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées, et, au point de vue où nous sommes placés, elle est de la classe $2n$.

17. Étant données une courbe algébrique quelconque K et une semi-droite Δ, considérons les cycles qui, ayant leur centre sur K, sont tangents à Δ; ils enveloppent évidemment une courbe de direction G qui est une anticaustique de K, les rayons incidents étant perpendiculaires à Δ.

Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction; réciproquement, étant donnée une courbe de direction quelconque G, elle est une anticaustique d'une infinité de courbes algébriques que l'on déterminera de la façon suivante.

Étant prises arbitrairement une semi-droite Δ et une tangente quelconque T à la courbe G, que l'on construise la bissectrice (T, Δ); lorsque T se déplace tangentiellement à G, la droite (T, Δ) enveloppe une courbe algébrique K, qui est le lieu des centres des cycles qui touchent à la fois Δ et la courbe G.

Si la courbe G est une courbe double, en chaque point M de

cette courbe, on peut mener deux tangentes opposées, et si N désigne le point où elles rencontrent Δ, par N passent deux bissectrices rectangulaires entre elles, dont l'enveloppe est la courbe K.

Dans ce cas, l'enveloppe des cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K est la *courbe double* G, chaque point M de G étant le point de contact de deux cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K; ou, si l'on veut encore, chaque point de G étant situé sur deux rayons réfléchis sur K.

18. On peut encore énoncer les résultats qui précèdent sous la forme suivante : G désignant une courbe algébrique, traçons dans le plan une droite arbitraire D, menons une tangente T à G et construisons les deux bissectrices rectangulaires des droites T et D; cela posé, lorsque T se déplace tangentiellement à la courbe, ces bissectrices enveloppent une autre courbe. Si cette dernière courbe se décompose en deux autres, on peut transformer la courbe G en une courbe de direction en donnant en chacun de ses points une direction à la tangente. On retrouverait ainsi la condition analytique que j'ai donnée plus haut, à savoir que l'équation en coordonnées tangentielles d'une courbe de direction est de la forme $F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\Phi^2(u, v)$.

Les courbes parallèles à une courbe de direction et l'enveloppe de ses normales sont également des courbes de direction; il en est de même des caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant parallèles.

19. Considérons une courbe de direction G qui est l'enveloppe des cycles dont les centres décrivent la courbe K, tandis qu'ils demeurent tangents à une semi-droite Δ.

Effectuons une transformation par semi-droites réciproques; soient G_0 la transformée de G, et Δ_0 la semi-droite transformée de Δ. G_0 peut être considéré comme l'enveloppe de cycles tangents à Δ_0, et dont les centres parcourent une courbe K_0.

Il est aisé d'établir que K_0 est une transformée homographique de K, la transformation étant de telle nature que la droite de l'infini se correspond à elle-même.

Prenons en effet pour axe des x l'axe de la transformation, et pour axe des y une droite perpendiculaire. Soient x, y les coor-

données du centre d'un cycle tangent à Δ et à G, et r son rayon; soient X, Y les coordonnées du cercle transformé et R son rayon. On aura les formules suivantes ([1]) :

$$Y = x, \qquad Y - y = \alpha(R - r), \qquad Y + y = \frac{1}{\alpha}(R + r);$$

en éliminant R entre les deux dernières relations, il vient

$$Y = \frac{(\alpha^2 - 1)y - 2\alpha r}{\alpha^2 + 1}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle de rayon r demeure tangent à une semi-droite fixe du plan, on voit que, *en grandeur et en signe*, r est exprimé par une fonction linéaire de x et de y.

On a donc une relation de la forme

$$Y = Ax + By + C,$$

où A, B, C désignent des constantes, et cette formule, jointe à la formule $X = x$, démontre la proposition énoncée.

Une transformation homographique, qui conserve la droite de l'infini, transformant une conique en conique et une parabole en parabole, il en résulte qu'une anticaustique de conique se transforme, par une transformation par directions réciproques, en une anticaustique de conique, et qu'un hypercycle (qui est une anticaustique de parabole) a pour transformée un autre hypercycle ([2]).

20. *Un hypercycle est déterminé quand on se donne cinq de ses tangentes.* — Cinq tangentes A, B, C, D, E étant en effet données, que l'on construise, par exemple, les quatre bissectrices (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), et la parabole P tangente à ces quatre droites; il est clair, d'après ce qui précède, que l'hypercycle est l'enveloppe des cycles qui touchent A, et dont le centre décrit P; son foyer est du reste le foyer de P.

La proposition précédente signifie qu'il y existe un seul hyper-

---

([1]) *Voir* le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 5e édition, p. 270, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 550.

([2]) Sur ce point et sur d'autres propriétés de l'hypercycle, *voir* ma Note *Sur les hypercycles,* insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séances des 20 et 27 mars, 3, 10 et 24 avril 1882.

cycle touchant *cinq semi-droites données*, mais il y existe seize hypercycles touchant *cinq droites données*. Ayant en effet attribué un sens arbitraire à l'une des droites pour la transformée en semi-droites, on peut attribuer à chacune des quatre autres un sens arbitraire, ce qui donne lieu à seize combinaisons différentes.

21. *Indépendamment de la droite de l'infini, deux hypercycles quelconques* H *et* H′ *ont quatre tangentes communes.* — Soient, en effet, H_0 la courbe H′ considérée indépendamment de son sens; H_0 et H, étant toutes les deux de troisième classe, ont neuf tangentes communes. Abstraction faite de la droite de l'infini, il en reste huit autres qui sont tangentes soit à H, soit à la courbe H_1 opposée à H. Deux hypercycles ne peuvent d'ailleurs, d'après le théorème précédent, avoir plus de quatre tangentes communes; des huit tangentes considérées, quatre sont donc tangentes à H et quatre tangentes à H_1, ce qui démontre la proposition énoncée.

22. *Faisceaux d'hypercycles.* — Je dirai que l'ensemble des hypercycles qui touchent quatre semi-droites données constitue un faisceau.

Il est clair, d'après ce qui précède, que, parmi les hypercycles d'un faisceau, il n'y en a qu'un qui touche une semi-droite donnée; on prouvera facilement qu'il y en a quatre qui passent par un point donné.

Le lieu des foyers des hypercycles du faisceau déterminé par quatre semi-droites données A, B, C, D est le cercle qui contient (lemme I) les centres des cycles inscrits dans les triangles que l'on détermine en considérant trois à trois les semi-droites données.

Considérons en effet les bissectrices (A, B), (A, C) et (A, D); on voit que les foyers des hypercycles du faisceau sont les foyers des paraboles tangentes à ces trois droites; or, d'après un théorème connu, le lieu de ces foyers est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites, d'où la proposition énoncée.

23. *Hypercycles exceptionnels.* — Un point d à l'infini étant défini par un système (D) de semi-droites parallèles entre elles, on peut considérer l'ensemble du point d et d'un cycle quel-

conque C comme constituant un hypercycle. Les tangentes que l'on peut, d'un point quelconque M du plan, mener à cet hypercycle exceptionnel se composent des tangentes menées du point M au cycle et de la semi-droite menée par M parallèlement au système (D).

Étant donné un tel hypercycle exceptionnel (d, C), si l'on mène à C une tangente antiparallèle au système (D) (1), cette tangente est la tangente principale du cycle exceptionnel, et la droite correspondante en est la tangente double.

C'est ce que l'on verra facilement sur la *fig.* 2, en supposant que le foyer F se rapproche indéfiniment de la bissectrice $\omega\omega'$ et vient se placer sur cette droite, auquel cas l'hypercycle se réduit à un cycle et à un point à l'infini.

24. Un faisceau déterminé par quatre semi-droites A, B, C, D renferme quatre cycles exceptionnels, à savoir :

Celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans A, B, C et le point à l'infini sur D, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans B, C, D et le point situé à l'infini sur A, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans C, D, A et le point situé à l'infini sur B, et enfin celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans D, A, B et le point à l'infini sur C.

La considération de ces cycles exceptionnels est d'une grande importance dans la théorie des faisceaux d'hypercycles, théorie sur laquelle j'aurai occasion de revenir.

---

(1) Je rappellerai que deux semi-droites sont dites *antiparallèles* lorsque, les droites qu'elles déterminent étant parallèles, elles sont dirigées en sens inverse.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CYCLES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1883.

1. Étant donnés deux cycles A et B, menons-leur une tangente commune; la distance comprise entre les points de contact de cette semi-droite est la distance tangentielle des deux cycles. Elle n'est évidemment déterminée qu'en valeur absolue; dans tout ce qui suit, je la désignerai simplement sous le nom de *distance des deux cycles*.

On sait que, si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, la distance de deux cycles est égale à la distance des deux cycles correspondants.

2. Étant donnés trois cycles A, B et C, on peut chercher de quelle façon sont distribués dans le plan les cycles équidistants de ces trois cycles. Si nous effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, les cycles α, β et γ correspondant aux cycles donnés, α et β soient opposés, il suffira évidemment de résoudre le problème proposé relativement à la nouvelle figure.

Il est aisé de voir que les cycles équidistants de deux cycles opposés α et β se réduisent aux points du plan. Désignant, en effet, par R et $-$R les rayons des cycles opposés, par ρ le rayon d'un cycle équidistant de α et de β, par d la distance de son centre au centre commun de α et de β, on a

$$d^2-(\mathrm{R}-\rho)^2=d^2-(\mathrm{R}+\rho)^2,$$

d'où

$$\mathrm{R}\rho=0;$$

et, comme R est supposé différent de zéro, il suit nécessairement

$$\rho = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Les cycles équidistants de α, β et γ devant se réduire à des points, on les obtiendra tous en considérant les divers points de l'axe radical D des cycles α et γ; et de là, si l'on revient à la première figure, on voit que les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B, C sont tangents à deux semi-droites fixes Δ et Δ' qui sont les transformées des deux semi-droites opposées définies par la droite D. Ces deux semi-droites passent d'ailleurs par les points p et q, intersections des cycles α et γ, lesquels points peuvent être considérés comme les cycles tangents à α, β et γ.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B *et* C *touchent deux semi-droites fixes* Δ *et* Δ', *qui sont les tangentes communes aux deux cycles qui sont tangents à* A, B *et* C.

J'appellerai ces semi-droites les *semi-droites radicales* des cycles A, B et C; leur point de rencontre est évidemment le centre radical des trois cycles.

3. Proposons-nous de trouver les cycles équidistants de quatre cycles donnés, A, B, C et D. Dans ce but effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que α, β, γ et δ correspondent respectivement à A, B, C et E, α et β soient des cycles opposés.

Les cycles équidistants de α et de β se réduisant aux points du plan, il est clair qu'il n'y a qu'un seul cycle qui soit équidistant des cycles α, β, γ et δ : c'est le centre radical des cycles α, γ et δ; et de là, en revenant à la figure primitive, on peut conclure que :

Il n'y a dans le plan qu'un seul cycle équidistant de quatre cycles donnés A, B, C *et* D.

Je le désignerai sous le nom de *cycle radical* des cycles A, B, C et D.

4. Le cycle radical de A, B, C et D étant équidistant de A, B

et C touche les semi-droites radicales de ces trois cycles; d'où la proposition suivante :

Étant donnés quatre cycles, les semi-droites radicales de trois quelconques de ces cycles touchent leur cycle radical; en groupant de toutes les façons possibles trois à trois les quatre cycles donnés, on a donc quatre systèmes de deux semi-droites qui touchent le cycle radical.

Un cas particulièrement remarquable est le suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre semi-droites données; A_i désignant l'une quelconque d'entre elles, appelons K_i le cycle qui touche les trois autres. Nous déterminerons ainsi quatre cycles K_1, K_2, K_3 et K_4; soit K leur cycle radical.

Il résulte de ce qui précède que K est tangent aux trois semi-droites radicales de K_1, K_2 et K_3; or ces cycles touchent tous les trois la semi-droite A_4 et il est aisé de voir que, quand trois cycles sont tangents à une même semi-droite Δ, leurs deux semi-droites radicales se confondent entre elles ou, pour parler plus exactement, se composent de deux semi-droites se coupant en leur centre radical et différant infiniment peu de la semi-droite menée en ce point parallèlement à la semi-droite Δ.

On conclut de là que le cycle K passe par le centre radical de K_1, K_2 et K_3 et est tangent à la semi-droite menée par ce point parallèlement à A_4.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère de toutes les façons possibles trois quelconques des cycles K_1, K_2, K_3 *et* K_4 *et leur centre radical, on obtient quatre points qui sont sur un même cycle* K *et les tangentes menées à ce cycle en ces points sont respectivement parallèles aux semi-droites* A_1, A_2, A_3 *et* A_4.

Ce cycle K *est le cycle radical de* K_1, K_2, K_3 *et* K_4.

5. Les quatre cycles K_i qui sont ainsi déterminés par les semi-droites A_1, A_2, A_3 et A_4 jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables. J'énoncerai ici la suivante :

Si, parallèlement à une semi-droite donnée Δ, *on mène des tangentes à* K_1, K_2, K_3 *et* K_4, *le rapport anharmonique de ces*



quatre semi-droites est constant quelle que soit la direction de Δ.

Pour démontrer cette proposition, j'énoncerai d'abord le lemme suivant dont l'application est fréquente :

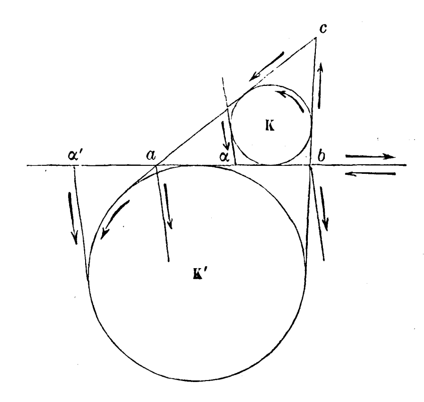
Lemme. — *Si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, à quatre semi-droites parallèles entre elles correspondent également quatre semi-droites parallèles.*

Le rapport anharmonique de celles-ci est égal au rapport anharmonique des quatre premières.

La démonstration de ce lemme résulte immédiatement de ce que deux semi-droites correspondantes se coupent au même point de l'axe de transformation.

Cela posé, je remarque que l'on peut toujours effectuer une transformation par semi-droites réciproques, de telle façon que deux semi-droites données aient pour transformées deux semi-droites opposées ; le théorème que nous voulons démontrer étant projectif, il suffira donc de le démontrer dans ce cas.

Soient donc (*fig.* 1) *ca*, *bc*, *ab* et *ba* quatre semi-droites



données (¹), K le cycle tangent à *bc*, *ca* et *ab*, K' le cycle tangent

(¹) Lorsque je désigne une semi-droite par deux lettres, l'ordre dans lequel sont placées ces lettres indique le sens de la semi-droite ; ainsi PQ désigne une semi-droite décrite par un point mobile allant du point P au point Q. Il en résulte que PQ et QP sont deux semi-droites opposées.

ba, ca et bc. Il est clair que le cycle tangent à ca, ab et ba se réduit au point a et que le cycle tangent à bc, ab et ba se réduit au point b.

Cela posé, menons aux deux cycles K et K′ des tangentes parallèles à une semi-droite prise arbitrairement et soient respectivement α et α' les points où ces tangentes coupent la droite ab. Les points α et α' se correspondent de façon qu'à un point α correspond un seul point α' et réciproquement à un point α' correspond un seul point α. En effet, si l'on se donne par exemple le point α, on ne peut par ce point mener au cycle K qu'une seule tangente distincte de ab; d'autre part, on ne peut mener au cycle K′ qu'une seule tangente qui soit parallèle à celle-ci; le point α' où elle coupe ab est donc déterminé.

Il résulte de là que les points α et α' déterminent sur la droite ab deux divisions homographiques dont les points doubles sont évidemment les points a et b, et par suite, en vertu d'une propriété bien connue, le rapport anharmonique des quatre points α, α', a et b est constant. Il en est évidemment de même du rapport anharmonique des tangentes passant par les points α et α' et des parallèles à ces tangentes menées par les points a et b. En d'autres termes, le rapport anharmonique des semi-droites, menées parallèlement à la semi-droite prise arbitrairement et tangentiellement aux cycles K, K′, a et b, est constant; ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Étant données deux semi-droites quelconques Δ et Δ', circonscrivons à K_1 un angle dont les côtés soient parallèles à Δ et Δ', et soit P_1 le sommet de cet angle.

Soient de même P_2, P_3 et P_4 les sommets des angles analogues circonscrits aux cycles K_2, K_3 et K_4. Le rapport anharmonique de quatre côtés de ces angles étant égal au rapport anharmonique des quatre autres, il suit de la proposition fondamentale de la théorie des coniques que *les quatre points* P_i *sont sur une conique ayant ses asymptotes parallèles à* Δ *et à* Δ'.

En particulier, supposons que Δ et Δ' soient deux droites isotropes de système différent; les points P_i sont les centres des cycles K_i. On peut donc énoncer la proposition suivante, que j'ai

déjà démontrée directement dans une Note antérieure (¹) :

Les centres des cycles K_i *sont situés sur un même cercle.*

7. J'énoncerai encore la proposition suivante :

Étant donnés deux cycles K *et* K', *si l'on considère quatre cycles quelconques* H_1, H_2, H_3 *et* H_4 *doublement tangents à* K *et à* K', *et si, à ces quatre cycles, on circonscrit des angles ayant leurs côtés parallèles aux deux tangentes communes à* K *et à* K', *les quatre sommets de ces angles sont sur une conique ayant leurs asymptotes parallèles à ces tangentes communes.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que le rapport anharmonique des semi-droites, menées tangentiellement aux cycles K_i parallèlement à l'une des tangentes est égal au rapport anharmonique des semi-droites menées à ces cycles parallèlement à l'autre tangente; et, comme cette propriété est projective, il suffit de la démontrer dans un cas particulier. Or on peut toujours effectuer une transformation par directions réciproques, de telle sorte que les cycles K et K' soient opposés entre eux; les cycles H_i se réduisent alors à quatre points du cercle K_0 déterminé par K et K'; les deux tangentes communes à K et à K' sont des droites isotropes et l'on sait, par la propriété fondamentale du cercle, que les droites isotropes d'un système qui passent par ces quatre points ont leur rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des droites isotropes de l'autre système qui passent par les mêmes points.

La proposition est donc entièrement démontrée.

Une conique dont la direction des asymptotes est donnée étant déterminée par trois de ses points, la proposition précédente peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Si l'on considère tous les cycles H *qui touchent deux cycles donnés* K *et* K' *et si, à chacun des cycles* H, *on circonscrit un angle dont les côtés soient parallèles aux tangentes communes*

(¹) *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole* (*Nouvelles Annales*), même tome, p. 16.

à K *et à* K′, *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à ces deux tangentes.*

Il est facile de voir que cette conique a effectivement ces deux tangentes pour asymptotes et qu'elle passe par les points d'intersection des cycles K et K′; d'où encore la proposition suivante :

Étant donnée une conique quelconque, attribuons un sens quelconque aux asymptotes de cette conique de façon à les transformer en deux semi-droites Δ *et* Δ′. *Cela posé, considérons deux points quelconques* M *et* N *de la conique; par le point* M, *on peut mener deux cycles tangents à* Δ *et à* Δ′; *par* N *on peut mener deux parallèles à* Δ *et* Δ′ : *ces deux cycles et ces deux parallèles sont tangents à un même cycle* P.

J'ajouterai que la corde qui joint les points de contact de P avec Δ et Δ′ est l'axe radical des cycles qui, passant par M, touchent ces deux semi-droites.

8. Il est aisé de voir que le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit :

Par deux points donnés γ *et* δ, *on peut mener deux cercles* K *et* K′ *qui touchent un cercle donné* C; *par les points où la droite* γδ *rencontre* C, *menons des tangentes à ce cercle, soit* ε *leur point de rencontre. Par les points* γ, δ *et* ε, *faisons passer une conique ayant ses asymptotes parallèles aux tangentes dont je viens de parler; les asymptotes de cette conique sont deux tangentes communes à* K *et à* K′.

On peut généraliser ce théorème en faisant une transformation homographique de telle sorte que les ombilics du plan deviennent deux points quelconques α et β; on obtient alors la proposition suivante :

Étant donnés deux points quelconques α *et* β *sur une conique* C, *par deux points* γ *et* δ *du plan et les points* α *et* β *on peut mener deux coniques* K *et* K′ *qui touchent* C; *par les points où la droite* γδ *coupe* C, *menons des tangentes à cette conique et soit* ε *leur point de rencontre; soient de plus* λ *et* μ *les points où la corde* αβ *rencontre ces tangentes. Cela posé, si l'on con-*

struit la conique déterminée par les cinq points λ, μ, γ, δ *et* ε, *les tangentes menées à cette conique aux points* λ *et* μ *sont deux tangentes communes à* K *et à* K′ (¹).

9. En particulier, supposons que les points γ et δ soient les ombilics du plan; la proposition précédente pourra s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés sur une conique C *deux points* α *et* β, *on peut par ces points mener deux cercles qui touchent* C; *ces deux cercles ont pour tangentes communes les tangentes menées au cercle qui passe par le centre de la courbe et les points où la droite* $\alpha\beta$ *coupe les asymptotes, aux points situés sur la droite* $\alpha\beta$.

Il est d'ailleurs évident que ces tangentes communes aux deux cercles se coupent en un de leurs centres de similitude.

10. Proposons-nous maintenant le problème suivant (proposé cette année comme sujet de la composition d'admission à l'École Polytechnique) :

Étant donnés deux cercles K *et* K′ *se coupant aux points* α *et* β, *construire les diverses coniques qui, passant par* α *et* β, *touchent ces cercles.*

Construisons deux tangentes communes à K et à K′ passant par un de leurs centres de similitude, puis le cercle H qui touche ces tangentes en leurs points de rencontre avec la droite $\alpha\beta$. En désignant par λ et μ ces deux points, il est clair, d'après la proposition précédente, que si l'on prend un point O quelconque sur le cercle H et si l'on joint $O\lambda$ et $O\mu$, la conique qui, passant par les points α et β, a pour asymptotes $O\lambda$ et $O\mu$ touche les deux cercles K et K′.

Le lieu des centres des coniques cherchées est donc le cercle H, et l'on voit que l'angle formé par les asymptotes de toutes ces coniques est constant.

(¹) La détermination des deux autres tangentes communes à K et à K′ donnerait lieu à des recherches intéressantes.

Un théorème analogue au précédent a lieu à l'égard des coniques qui touchent une conique donnée, deux tangentes à cette conique et deux droites données.

En considérant les deux tangentes communes qui passent par le second centre de similitude, on obtiendrait un autre système de solutions, le lieu des centres de ces coniques étant un second cercle ayant, comme il est facile de le voir, même centre que le premier.

SUR LES

COURBES DE DIRECTION DE LA TROISIÈME CLASSE.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1883.

I.

1. Étant donnée une semi-droite quelconque Δ, si l'on considère l'ensemble des semi-droites qui lui sont parallèles, on peut les regarder comme concourant en un même point situé à l'infini et que je désignerai par Δ_∞. Les semi-droites parallèles à la semi-droite opposée $-\Delta$ [1] peuvent être regardées comme concourant en un même point $-\Delta_\infty$ situé à l'infini.

Ces deux points doivent être considérés comme distincts, et, si l'on appelle D la droite définie par les semi-droites Δ et $-\Delta$, on voit que D renferme deux points situés à l'infini, à savoir Δ_∞ et $-\Delta_\infty$.

Nous considérerons les points à l'infini comme situés sur une conique infiniment aplatie et ayant pour sommets les ombilics du plan, et, pour plus de clarté, j'appellerai le point Δ_∞ un *semi-point,* en sorte que la *conique de l'infini* sera le lieu des semi-points du plan.

Un *point* de la *droite de l'infini* doit être considéré comme la réunion de deux semi-points opposés.

Si l'on imagine un cycle variable qui touche constamment deux semi-droites opposées Δ et $-\Delta$, ce cycle, lorsque son centre est rejeté à l'infini, se réduit aux deux semi-points Δ_∞ et $-\Delta_\infty$.

Un semi-point peut être considéré comme une courbe de direc-

---

[1] En général, D désignant une semi-droite quelconque, j'appellerai $-$D la semi-droite opposée.

tion de la classe *un*; il n'y a du reste pas d'autre courbe de direction qui soit de cette classe.

Les courbes de direction de la deuxième classe ne comprennent que les cycles; je me propose, dans cette Note, d'étudier les courbes de direction de la troisième classe.

2. Soit μ le nombre des tangentes que l'on peut mener à une courbe de direction de la troisième classe et parallèlement à une semi-droite donnée; comme on peut lui mener également μ tangentes parallèles à la semi-droite opposée, il résulte de là que, par un point de la droite de l'infini, on peut mener à la courbe 2μ tangentes distinctes de cette droite. En désignant par ρ le nombre des points de contact de la droite de l'infini et de la courbe, on a donc

$$2\mu + \rho = 3,$$

et, comme ρ ne peut être égal à 3, il en résulte que $\rho = 1$ et $\mu = 1$.

Ainsi la courbe considérée touche la droite de l'infini; une semi-droite isotrope coïncidant avec son opposée, on voit en outre que les deux tangentes (distinctes de la droite de l'infini) que l'on peut, d'un ombilic du plan, mener à la courbe, sont confondues; la courbe passe donc par les deux ombilics.

3. Il est clair qu'on ne peut mener à une courbe de direction de la troisième classe qu'une seule tangente T parallèle à une semi-droite donnée. Traçons dans le plan un cycle arbitraire K et menons à ce cycle une tangente Θ parallèle à T; je dirai que cette tangente est l'image de T. Si l'on imagine un nombre quelconque de tangentes à la courbe considérée et si l'on mène tangentiellement à K des tangentes parallèles, ces dernières (ou si l'on veut encore leurs points de contact) formeront l'image des tangentes à la courbe. On voit qu'une tangente à la courbe est déterminée quand on se donne son image sur le cycle K.

4. Considérons une courbe de direction de la troisième classe H et une tangente quelconque T à cette courbe. Par chaque point de cette semi-droite, on peut mener à la courbe deux tangentes distinctes de T; soient αA et $A\alpha'$ les tangentes issues d'un point quelconque A de T. Inscrivons dans ces deux semi-droites un cycle

quelconque K sur lequel nous ferons l'image des tangentes à H.

Soit B un autre point quelconque de T; désignons par $B\beta$ et $\beta'B$ les tangentes issues de ce point et soient γb et $\gamma' b$ leurs images sur le cycle fixe K. Il est clair que si l'on se donne la semi-droite $b\gamma$, la tangente $B\beta$ est déterminée et, par suite, le point B ainsi que la deuxième tangente $B\beta'$ et son image $b\gamma'$. Des deux

Fig. 1.

tangentes au cycle K, $b\gamma$ et $b\gamma'$, l'une étant déterminée quand on se donne l'autre, il en résulte qu'elles forment un système en involution et que leur point de rencontre b décrit une droite du plan. Cette droite U passe du reste par le point A, puisque les tangentes $A\alpha$ et $A\alpha'$ se confondent avec leurs images.

A chaque point B de la droite T correspond un point b de la droite U; les points B et b déterminent donc sur ces droites des divisions homographiques et, comme le point A se correspond évidemment à lui-même, on en conclut que la droite Bb passe par un point fixe du plan.

Pour déterminer la position de ce point fixe, je remarquerai que, si le point B s'éloigne à l'infini sur la tangente T, l'une des tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe est la tangente opposée à T. Si donc nous menons au cycle K la tangente Θ antiparallèle à T, le point b est situé sur cette semi-droite et la droite bB se confond avec Θ qui, par suite, contient le point fixe cherché.

Soit P ce point fixe; par ce point menons une droite parallèle à U et coupant T au point ω. Le point ω' où $P\omega$ rencontre U étant situé à l'infini, les tangentes menées de ω' au cycle K sont oppo-

sées et ont pour directions celles déterminées par la droite Pω; il résulte donc de ce qui précède que les tangentes issues de ω sont les deux semi-droites opposées déterminées par la droite Pω, qui est ainsi *une tangente double apparente de la courbe*.

Ainsi la courbe de direction de la troisième classe la plus générale passe par les ombilics du plan, touche la droite de l'infini et a une tangente double apparente; c'est donc un hypercycle cubique, ou, en d'autres termes, une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

5. La proposition que je viens de démontrer peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Considérons une tangente quelconque T à un hypercycle cubique H; d'un point A, pris arbitrairement sur cette semi-droite,

Fig. 2.

menons les deux tangentes à la courbe Aα et Aα' qui sont distinctes de T, puis inscrivons dans ces semi-droites un cycle quelconque K.

Menons à ce cycle la tangente Θ antiparallèle à T et soit P le point où cette tangente rencontre la tangente double PP$'$ de la courbe; soit de plus AU la droite menée par A parallèlement à P.

Cela posé, *si, par le point fixe* P, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement* T *et* U *aux points* B *et* b, *les tangentes que l'on peut mener à l'hypercycle par le point* B *sont parallèles aux tangentes menées du point* b *au cycle* K.

6. Par le point P menons au cycle K la tangente PCc qui est distincte de Θ; il est clair, d'après la proposition précédente, que

cette semi-droite est également tangente à l'hypercycle, et qu'en faisant varier le cycle K, qui est assujetti à la seule condition de toucher les tangentes $A\alpha$ et $A\alpha'$, on obtiendra ainsi toutes les tangentes à la courbe.

Remarquons maintenant que le cycle qui touche à la fois les tangentes $A\alpha$, $A\alpha'$, PC est précisément le cycle K, que celui qui touche PC et les deux tangentes opposées PP' et P'P se réduit au point P; enfin que, des deux tangentes communes à ces cycles, l'une est C et l'autre la semi-droite Θ dont la direction reste constante, quelle que soit la tangente PC considérée; nous pourrons alors énoncer la proposition fondamentale suivante :

Théorème I. — *Soient* A, A' *et* B, B' *deux couples de tangentes à un hypercycle cubique* H *et* T *une tangente quelconque à cette courbe; construisons les deux cycles qui touchent respectivement* A, A' *et* T, B, B' *et* T; *ces deux cycles ont* T *pour tangente commune, la seconde tangente commune* Θ *est parallèle à une semi-droite fixe.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cubique en une courbe de même espèce et que l'on peut toujours effectuer la transformation de telle sorte que les tangentes B et B' se transforment en une tangente double apparente de la courbe transformée; auquel cas le théorème résulte immédiatement des remarques qui précèdent.

6. Le théorème précédent donne une propriété remarquable de *six tangentes quelconques* à un hypercycle. En voici d'autres conséquences :

Étant donnés deux couples de semi-droites fixes A, A' et B, B' et une direction fixe Θ_0, menons une semi-droite quelconque Θ parallèle à Θ_0, puis construisons les cycles qui touchent respectivement A, A' et Θ, B, B' et Θ. Ces cycles, qui touchent Θ, ont en outre une deuxième tangente commune T; cette tangente, lorsque Θ se déplace parallèlement à elle-même, enveloppe un hypercycle cubique tangent à A, A', B et B'.

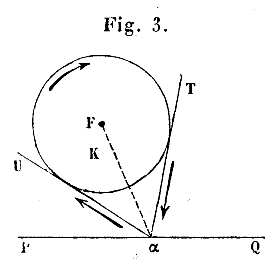
Si l'on fait varier la direction Θ_0, on déterminera ainsi tous les

hypercycles cubiques qui touchent les quatre semi-droites A, A′, B et B′.

7. Comme application, supposons que les tangentes A et A′ soient les tangentes isotropes issues du foyer F de la courbe et que les tangentes B et B′ soient les semi-droites opposées définies par la tangente double apparente PQ.

En désignant par T une tangente quelconque à l'hypercycle, on voit que le cycle, qui touche T et les droites isotropes issues de F,

Fig. 3.



est le cycle K qui a précisément F ponr centre; le cycle qui touche T, B et B′ se réduit au point de rencontre α de T et de PQ. La seconde tangente commune à ces deux cycles est la semi-droite U qui est l'antisymétrique de T par rapport à la droite αF.

On peut donc énoncer la proposition suivante, qu'il serait très facile du reste de démontrer directement :

Un hypercycle ayant pour foyer le point F *et pour tangente double la droite* PQ, *si* α *désigne le point où une semi-droite quelconque* T *tangente à la courbe coupe la droite* PQ, *l'antisymétrique de* T *relativement à la droite* Fα *a une direction constante.*

II.

8. Étant données quatre semi-droites quelconques A_1, A_2, A_3 et A_4, construisons les bissectrices (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4) [1]; les foyers des paraboles qui touchent ces trois droites sont les foyers

---

[1] Je rappelle que je désigne par la notation (C, D) la bissectrice de deux semi-droites données C et D, c'est-à-dire la *droite parfaitement déterminée* qui est le lieu des centres des cycles qui touchent ces semi-droites.

des hypercycles cubiques qui touchent les semi-droites données; on sait d'ailleurs, par un théorème connu, que le lieu des foyers de ces paraboles est le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois bissectrices.

Ainsi le lieu des foyers des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données est un cercle K, et, comme il est facile de le voir, ce cercle est celui qui contient les centres des quatre cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former avec les semi-droites données en les prenant trois à trois.

Soient K_1, K_2 et K_3 trois de ces cycles et α_1, α_2, α_3 leurs centres; F désignant le foyer de l'un quelconque H des hypercycles qui touchent les semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4, il résulte de ce qui précède que F, α_1, α_2 et α_3 sont situés sur le cercle K.

En d'autres termes, si l'on appelle I et J les deux ombilics du plan, le rapport anharmonique des semi-droites FI, α_1I, α_2I et α_3I est égal au rapport anharmonique des semi-droites FJ, α_1J, α_2J et α_3J; ce que l'on peut encore énoncer de la façon suivante :

Si l'on mène à l'hypercycle H et aux cycles K_1, K_2 et K_3 des tangentes parallèles à une droite isotrope d'un système, puis des tangentes parallèles à une droite isotrope de système différent, les deux systèmes de semi-droites ainsi obtenues ont même rapport anharmonique.

Remarquons maintenant qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cubique en une courbe de même espèce, que le rapport anharmonique de quatre semi-droites parallèles se conserve après la transformation et que la transformation peut toujours être choisie de façon que deux semi-droites prises arbitrairement aient pour transformées des droites isotropes : nous en conclurons immédiatement que la proposition précédente subsiste pour des directions quelconques prises dans le plan.

D'où le théorème suivant :

Théorème II. — *Soient* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *quatre semi-droites et* K_1, K_2, K_3 *les cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former en adjoignant successivement à* A_4 *deux quelconques des semi-droites* A_1, A_2 *et* A_3; *soit de plus* H *un hypercycle cubique quelconque qui touche les semi-droites données. Cela*

posé, si l'on mène à la courbe et aux trois cycles des tangentes parallèles à une direction quelconque, le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant.

On peut encore l'énoncer ainsi qu'il suit :

Théorème III. — *Étant donnés trois cycles qui touchent une même semi-droite* Δ, *si une semi-droite* T *se déplace de telle sorte que le rapport anharmonique de cette semi-droite et des tangentes, menées aux trois cycles dans une direction parallèle, ait une valeur constante* k, T *enveloppe un hypercycle cubique tangent à* Δ *et aux trois semi-droites qui touchent à la fois deux des cycles donnés* [1].

Remarque. — En faisant varier le nombre k, on déterminera ainsi tous les hypercycles qui touchent les quatre semi-droites dont je viens de parler.

9. Considérons le faisceau des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4. Soient Δ et Δ' deux semi-droites prises arbitrairement; à chacune des courbes du faisceau on peut circonscrire un angle, et un seul, dont les côtés soient parallèles à Δ et à Δ'; il résulte de ce qui précède que *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à* Δ *et à* Δ'.

En particulier, quand les semi-droites Δ et Δ' viennent à se confondre, on obtient la proposition suivante :

Si, à chacune des courbes du faisceau, on mène une tangente parallèle à une semi-droite donnée Δ, *le lieu du point de contact est une parabole dont l'axe est parallèle à* Δ.

III.

10. L'étude des courbes de direction de la troisième classe se rattache à un autre genre de considérations d'une grande importance dans la théorie générale des courbes de direction.

---

[1] Si les trois cycles donnés n'étaient pas tangents à une même semi-droite, l'enveloppe de T serait un hypercycle de la quatrième classe.



Étant donnée dans un plan fixe une droite quelconque D, on peut, par cette droite, mener deux plans isotropes qui sont distincts si la droite n'est pas elle-même une droite isotrope; nous rattacherons respectivement ces deux plans aux deux semi-droites Δ et $-\Delta$ déterminées par la droite D.

Ainsi, par toute semi-droite du plan, passera *un plan isotrope parfaitement déterminé*. Cela posé, étant donnée une courbe quelconque de direction K, si l'on imagine les divers plans isotropes qui contiennent les tangentes à cette courbe, ces plans envelopperont une surface Σ; en d'autres termes, si l'on considère la *développable isotrope* (1) *complète* qui est circonscrite à K, cette développable se décompose en deux surfaces distinctes, qui correspondent à K et à la courbe qui lui est opposée.

11. Il résulte de là que la classification des courbes planes de direction se ramène à la classification des surfaces développables isotropes.

Étant donnée une surface développable isotrope Σ de classe r, tout plan sécant P la coupe suivant une courbe de direction K qui est de la même classe. Je ferai remarquer en outre qu'en désignant par Θ l'arête de rebroussement de Σ la projection orthogonale de Θ sur le plan P est la développée de la courbe K suivant laquelle le plan coupe la développable.

Les cônes isotropes qui ont pour sommets les divers points de Θ coupent le plan P suivant les cycles osculateurs de la courbe K.

12. On voit, en particulier, que l'étude des courbes de direction de la troisième classe se ramène à celle des développables isotropes de troisième classe et ces courbes sont toutes de la même espèce, puisqu'il n'y a qu'une seule espèce de développables de la troisième classe.

---

(1) J'appelle *développable isotrope* une surface développable dont toutes les génératrices sont des droites isotropes et dont, par suite, les plans osculateurs sont des plans isotropes. *Voir*, à ce sujet, mon *Mémoire sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XI, 1872).

Des considérations analogues à celles que je développe ici ont été employées par M. Stephanos dans diverses Communications orales faites à la *Société mathématique de France*.

Soient Θ une cubique gauche isotrope et Σ la développable isotrope dont elle est l'arête de rebroussement; on voit que toute section plane de Σ est un hypercycle cubique (en d'autres termes, une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles); la projection orthogonale de Θ sur un plan quelconque est par suite une caustique de parabole.

13. Comme application, considérons un hypercycle cubique K; soient Σ la développable qui est l'enveloppe des plans isotropes, qui contiennent les diverses tangentes à l'hypercycle, et Θ la cubique gauche qui forme son arête de rebroussemant.

Considérons trois tangentes quelconques A, B et C à l'hypercycle; désignons respectivement par a, b et c les points où elles touchent la courbe et par α, β et γ les points où les plans isotropes menés par A, B et C touchent la cubique Θ. Ces plans osculateurs de Σ se coupent en un point δ qui, d'après un théorème connu, est situé dans le plan déterminé par les trois points α, β et γ; soit T la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan P de l'hypercycle K.

Les cônes isotropes ayant respectivement pour sommets α, β et γ coupent le plan P suivant les trois cycles R_a, R_b et R_c qui osculent K aux points a, b et c, et l'axe de similitude de ces trois cycles est évidemment la droite T. Le cône isotrope ayant pour sommet le point δ a pour trace sur le plan P le cycle inscrit dans le triangle ABC et, comme le point δ est dans le plan $\alpha\beta\gamma$, il en résulte que le centre de similitude de ce cycle et de l'un quelconque des cycles R_a, R_b et R_c est situé sur T.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés trois points quelconques a, b, c d'un hypercycle cubique, si l'on imagine les cycles R_a, R_b *et* R_c *qui osculent la courbe en ces points et le cycle* R *qui touche les tangentes menées en ces mêmes points, les six centres de similitude de ces quatre cycles considérés deux à deux sont sur une même droite.*

14. On doit remarquer en particulier le cas où le plan, qui contient les points α, β et γ, est un plan isotrope; la proposition précédente peut alors s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés un hypercycle cubique K *et une semi-droite*

arbitraire Δ *située dans son plan; il y a trois cycles osculateurs de* K *qui touchent* Δ. *Les tangentes menées aux points d'osculation et la semi-droite* Δ *sont tangentes à un même cycle.*

15. J'énoncerai encore le corollaire suivant :

Si, par un point quelconque P, *pris dans le plan d'un hypercycle cubique* K, *on mène des tangentes à la courbe et si l'on considère les trois cycles qui l'osculent aux points de contact, l'axe de similitude de ces trois cycles passe par le point* P.

SUR L'APPLICATION DES INTÉGRALES

ELLIPTIQUES ET ULTRA ELLIPTIQUES

A LA THÉORIE DES COURBES UNICURSALES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1883.

1. En désignant par t un paramètre variable, considérons une courbe unicursale dont la tangente soit déterminée par l'équation

$$xf(t) + y\varphi(t) + \theta(t) = 0,$$

où $f(t)$, $\varphi(t)$ et $\theta(t)$ désignent des polynomes entiers. L'expression de la distance d'un point quelconque du plan à cette tangente renferme le radical $\sqrt{f^2(t) + \varphi^2(t)}$, que j'écrirai sous la forme $P(t)\sqrt{F(t)}$, en mettant en évidence la partie rationnelle. Si $F(t)$ est une constante, la distance d'un point du plan à la tangente est déterminée en grandeur et en signe; alors la courbe est de l'espèce de celles que j'ai étudiées sous le nom de *courbes de direction*. Dans le cas contraire, la courbe doit être considérée comme double, en sorte qu'en chaque point on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées.

Une tangente étant donnée (en position et en direction), il lui correspond non seulement une valeur du paramètre t, mais encore une valeur déterminée du radical $\sqrt{F(t)}$. Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, $F(t)$ est du quatrième degré; en considérant ces coniques comme enveloppes de semi-droites, on doit donc dire qu'elles sont du genre *un*, et il y existe, à ce point de vue, une infinité d'autres courbes unicursales du genre *un*, à

savoir celles pour lesquelles on a

$$f^2(t) + \varphi^2(t) = P^2(t)\,F(t),$$

$F(t)$ étant un polynome du troisième ou du quatrième ordre.

Soient K une conique donnée, A et B deux tangentes fixes à cette courbe. Menons une tangente quelconque T et construisons le cycle bien déterminé qui touche A, B et T; ce cycle et la conique ont en commun une quatrième tangente Θ et il est clair, d'après cette construction, que Θ est parfaitement déterminée quand on se donne T et réciproquement; ces deux tangentes forment une involution sur la courbe.

T étant déterminée par le paramètre t et une valeur de $\sqrt{F(t)}$, soient Θ et $\sqrt{F(\theta)}$ les valeurs du paramètre et du radical correspondant à la tangente Θ; il résulte immédiatement de ce qui précède que l'on doit avoir des relations de la forme

$$\theta = \Phi\left[t, \sqrt{F(t)}\right], \qquad \sqrt{F(\theta)} = \Psi\left[t, \sqrt{F(t)}\right],$$

où Φ et Ψ désignent des fonctions rationnelles, et, en même temps,

$$t = \Phi\left[\theta, \sqrt{F(\theta)}\right], \qquad \sqrt{F(t)} = \Psi\left[\theta, \sqrt{F(\theta)}\right].$$

Ces relations font prévoir le rôle que jouent dans cette question les fonctions elliptiques. En général, si l'on a une courbe quelconque de direction dont l'équation renferme des paramètres variables et si l'on considère les tangentes communes à cette courbe et à la conique H, on déduit du théorème d'Abel la relation

$$\frac{dt}{\sqrt{F(t)}} + \frac{dt'}{\sqrt{F(t')}} + \frac{dt''}{\sqrt{F(t'')}} + \ldots = 0,$$

où les quantités t, $\sqrt{F(t)}$, t', $\sqrt{F(t')}$, ... sont déterminées par les diverses tangentes communes. Considérant en particulier les cycles qui touchent les tangentes fixes A et B, on a, par suite,

$$\frac{dt}{\sqrt{F(t)}} + \frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} = 0.$$

Les tangentes correspondantes T et Θ se coupent en un point M dont il est aisé d'avoir le lieu; si l'on désigne par α et β les points

où T est rencontrée par les tangentes correspondant à T et à la semi-droite opposée — T, on voit que T ne rencontre le lieu qu'aux points α et β; d'où il suit que le lieu est une conique. D'ailleurs, si T est isotrope, comme elle se confond avec son opposée, les points α et β sont confondus : donc cette droite touche le lieu qui est ainsi une conique ayant les mêmes foyers que H. Cette conique passe d'ailleurs par le point de rencontre des tangentes fixes A et B et elle est entièrement déterminée par la condition que la bissectrice ([1]) de A et de B lui est tangente.

On retrouve ainsi une proposition donnée déjà par Chasles, mais avec moins de précision; les signes des radicaux qui entrent dans la relation (1) sont, comme on le voit, parfaitement déterminés par les directions des tangentes considérées.

2. Il résulte de ce qui précède que, si l'on détermine chaque tangente à la conique H par l'argument d'une fonction elliptique, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre tangentes touchent un même cycle est que la somme des arguments soit congrue à zéro, suivant les deux périodes de la fonction. Comme un hypercycle cubique est déterminé par cinq tangentes, on peut énoncer également cette proposition : *Pour que six tangentes à* H *touchent un même hypercycle cubique, il faut et il suffit que la somme de leurs arguments soit nulle.*

En particulier, le problème de construire un cycle osculateur d'une conique ([2]) qui touche une tangente donnée se ramène à la résolution de l'équation $\sin \operatorname{am} 3x = \sin \operatorname{am} \alpha$.

([1]) Je rappelle que je nomme *bissectrice* de deux semi-droites la droite parfaitement déterminée qui est le lieu des centres des cycles qui touchent ces semi-droites.

([2]) Dans le cas de la parabole, le polynome $F(t)$ est du second degré : cette courbe est donc du genre zéro et l'on ne peut plus mener que trois cycles osculateurs qui touchent une tangente donnée. Cette tangente et les tangentes menées aux points d'osculation touchent un même cycle, proposition analogue à la suivante, due à Steiner : *Il y a trois cercles osculateurs à une conique, qui passent par un point de cette courbe; ce point et les trois points d'osculation sont sur un même cercle.*

Étant donnée une parabole, on peut du reste, à chaque tangente menée à cette courbe, faire correspondre un point d'une hyperbole, de telle sorte que, quand quatre tangentes à la parabole touchent un même cycle, les quatre points correspondants de l'hyperbole sont sur un même cercle.

3. Des considérations entièrement analogues s'appliquent aux intégrales ultra-elliptiques. On peut aussi étudier des courbes non unicursales et déterminer leur genre quand on les considère comme enveloppes de semi-droites; dans l'espace, les courbes gauches donnent lieu à une étude et à des propositions semblables et, bien que cette extension se présente d'elle-même très aisément, je reviendrai sur ce sujet, si l'Académie veut bien me le permettre.

SUR LES

ANTICAUSTIQUES PAR RÉFRACTION DE LA PARABOLE

LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PERPENDICULAIRES A L'AXE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1885.

I.

1. L'hypercycle est la transformée, par semi-droites réciproques, de la parabole; c'est une courbe de direction de la quatrième classe et dont l'équation la plus générale, en coordonnées tangentielles et les axes étant rectangulaires, est de la forme

$$(\alpha u + \beta v + \gamma)^2(u^2 + v^2) = (A u^2 + 2 B uv + C v^2 + 2 D u + 2 E v)^2.$$

Ses propriétés les plus importantes sont les suivantes :

1° Les tangentes à la courbe peuvent être associées deux par deux, de telle sorte que deux tangentes conjuguées quelconques et deux semi-droites fixes (les semi-droites fondamentales de la courbe) forment un système harmonique ([1]).

2° L'enveloppe des conjuguées d'une semi-droite D, par rapport à tous les couples de tangentes conjuguées, est un cycle K que j'appellerai le *cycle polaire* de D.

Il est clair qu'un hypercycle est entièrement déterminé quand on se donne les semi-droites fondamentales, une droite quelconque du plan et son cycle polaire.

([1]) Deux couples de semi-droites forment un système harmonique, quand elles touchent un même cycle et que leurs points de contact partagent harmoniquement la circonférence.

Sur les propriétés mentionnées dans le texte, *voir* mon Mémoire sur les hypercycles (*Comptes rendus,* mars et avril 1882); dans toute la suite de cette Note, les renvois à ce Mémoire seront simplement indiqués par la lettre H.

3° Le cycle polaire d'une tangente touche cette tangente en son point de contact avec la courbe.

4° En désignant par A, A′ et B, B′ deux couples quelconques de tangentes conjuguées, si l'on considère une tangente mobile quelconque T et si l'on construit les cycles inscrits dans les triangles AA′T et BB′T, la longueur comprise sur T entre les points de contact est constante en grandeur et en ligne [1].

2. Je rappellerai encore cette proposition importante :

A, B, C et D désignant les quatre tangentes communes à un cycle et à un hypercycle, si l'on considère les tangentes conjuguées C′ et D′ de deux quelconques d'entre elles C et D, les semi-droites A, B, C′ et D′ touchent un même cycle.

En voici quelques conséquences : étant prises arbitrairement cinq semi-droites P, Q, A, B, C du plan, il existe un hypercycle généralement bien déterminé pour lequel P et Q sont les semi-droites fondamentales et qui touche A, B, C.

Soient D la quatrième tangente que cette courbe a en commun avec le cycle inscrit dans le triangle ABC, et A′, B′, C′, D′ les conjuguées harmoniques de A, B, C, D relativement à P et à Q; il résulte de la proposition précédente que les semi-droites A, B, C′, D′ touchent un même cycle et il en est de même des semi-droites A, B′, C, D′ et des semi-droites A′, B, C, D′.

Les cycles inscrits dans les triangles ABC′, AB′C et A′BC touchent donc tous les trois la semi-droite D′; ce qui permet de déterminer la quatrième tangente commune D.

3. On peut encore énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne par (A, A′), (B, B′), (C, C′) *trois couples de semi-droites formant une involution, les cycles inscrits dans les triangles* ABC′, AB′C *et* A′BC *touchent une même semi-droite.*

Supposons, en particulier, que les semi-droites doubles de l'involution soient les droites isotropes passant par un point O du

---

[1] II, n° 14.

plan, deux semi-droites conjuguées sont alors symétriques par rapport au point O; d'où cette conclusion

Si (A, A′), (B, B′) *et* (C, C′) *sont trois couples de semi-droites symétriques par rapport à un point* O *du plan, les cycles inscrits dans les triangles* ABC′, AB′C *et* A′BC *touchent une même semi-droite.*

Le même théorème aurait encore lieu si la symétrie des couples avait lieu par rapport à une droite quelconque du plan.

II.

4. Une parabole peut être considérée comme un hypercycle et comme une courbe double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées. Ses semi-droites fondamentales sont les semi-droites opposées déterminées par l'axe de la courbe; il en résulte que deux tangentes conjuguées sont *symétriques* par rapport à l'axe.

Toutes les propriétés des hypercycles appartiennent donc à la parabole et constituent des propriétés nouvelles de cette courbe.

5. Transformons une parabole par semi-droites réciproques en prenant pour axe de transformation l'axe de la courbe elle-même; il est clair que les semi-droites fondamentales de la transformée seront encore les semi-droites opposées déterminées par l'axe et que les tangentes conjuguées seront symétriques par rapport à cet axe.

Réciproquement tout hypercycle jouissant de la propriété, que deux tangentes conjuguées sont symétriques par rapport à une droite D, est la transformée d'une parabole P ayant cette droite pour axe; l'axe de transformation est également D.

Un point quelconque M de la parabole a pour transformé un cycle K dont le centre décrit une parabole P′ ayant pour axe D, tandis que son rayon varie proportionnellement à sa distance à l'axe; la transformée est donc une des anticaustiques par réfraction de la parabole P′, lorsque les rayons incidents sont perpendiculaires à l'axe.

Je la désignerai sous le nom d'*anticaustique principale*.

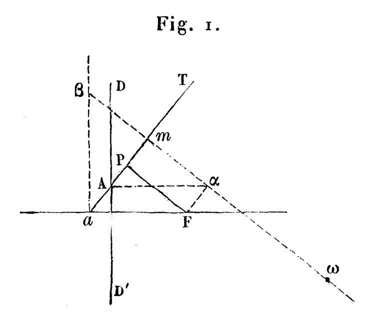
6. Ainsi les anticaustiques principales sont les hypercycles pour lesquels les semi-droites fondamentales sont opposées.

Considérons une telle courbe et soit F le point où une tangente isotrope coupe son axe, la tangente symétrique étant la seconde droite isotrope qui passe par ce point, on voit que F est le foyer de la courbe et que les droites isotropes, qui se croisent en ce point, forment un couple de tangentes conjuguées.

Menons une tangente parallèle à une direction perpendiculaire à l'axe, sa symétrique lui est opposée; nous avons donc une tangente double apparente perpendiculaire à l'axe, et les deux semi-droites opposées qu'elle détermine constituent également un couple de tangentes conjuguées.

Soient (*fig.* 1) une anticaustique principale ayant F pour foyer et DD′ comme tangente double, AT une tangente quelconque à

Fig. 1.



cette courbe. Les deux droites opposées DD′ et D′D formant un système de tangentes conjuguées, on voit que le cycle qui touche ces tangentes et la tangente AT se réduit au point A où cette tangente coupe DD′; son point de contact avec ce cycle est également le point A. D'autre part, le cycle qui touche les droites isotropes issues du point F et la tangente AT est le cycle qui a pour centre F; son point de contact avec AT est donc le pied P de la perpendiculaire abaissée du point F.

D'une proposition fondamentale énoncée plus haut, il résulte d'ailleurs, puisque les droites isotropes issues du point F constituent un système de tangentes conjuguées, que *la distance* AP *est constante en grandeur et en signe;* ainsi :

Toute anticaustique principale peut être considérée comme

l'enveloppe d'un des petits côtés d'un triangle rectangle de forme invariable dont l'extrémité, située sur l'hypoténuse, décrit une droite, tandis que l'autre petit côté passe par un point fixe.

Les autres anticaustiques étant des courbes parallèles à l'anticaustique principale, on peut énoncer encore la proposition suivante :

Soit ABCD *un quadrilatère de forme invariable, dans lequel les deux angles* B *et* C *sont droits; si l'on déplace ce quadrilatère de façon que le côté* BC *passe par un point fixe* F *et que le sommet* A *décrive une droite* Δ, *le côté* CD *enveloppe une anticaustique d'une parabole ayant pour foyer le point* F, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe.*

7. La proposition que je viens de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Si, du foyer d'une anticaustique principale, on abaisse une perpendiculaire à une tangente à cette courbe, la distance Δ, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double, est constante.

Plusieurs cas particuliers sont à remarquer : dans le cas où $\Delta = 0$, la courbe se réduit à une parabole; quand la tangente double passe par le foyer, la courbe a alors le foyer pour centre.

Enfin, quand Δ est égal à la distance du foyer à la tangente double (c'est le cas de la *réflexion*), la classe de la courbe s'abaisse et elle devient un *hypercycle cubique,* ou plus exactement elle se décompose en un hypercycle cubique et un semi-point situé à l'infini sur la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente double.

De là une propriété nouvelle de l'hypercycle cubique, que l'on peut énoncer ainsi :

Si des rayons, menés parallèlement à une direction quelconque, se réfléchissent sur une parabole, parmi toutes les anticaustiques correspondantes, il y en a une qui a un axe de symétrie; si, du foyer de la parabole, on mène une perpendiculaire à une tangente quelconque à cette courbe, la distance, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où

la tangente rencontre la tangente double, est constante et égale à la distance du foyer à cette tangente double.

8. Soit une anticaustique principale ayant pour foyer le point F et pour tangente double la droite DD'.

Considérons (*fig.* 1) une tangente AT à cette courbe et construisons le cycle polaire de cette semi-droite; nous savons qu'il lui est tangent. Il touche également la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux tangentes opposées DD' et D'D, qui constituent un couple de tangentes conjuguées; le centre de ce cycle est donc sur la droite menée par le point A perpendiculairement à DD'. Ce cycle touche la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux droites isotropes issues du point F (ces droites forment en effet un couple de tangentes conjuguées); et, comme cette conjuguée est la symétrique de AT relativement au point F, le centre cherché est sur la droite menée par le point F parallèlement à AT.

Ce centre est donc le point α et, le cycle polaire d'une tangente touchant cette semi-droite en son point de contact avec la courbe, on voit que le point de contact de AT est le pied m de la perpendiculaire abaissée du point α.

On serait arrivé à ce résultat en considérant l'anticaustique comme l'enveloppe du côté d'un triangle rectangle de forme invariable dont un sommet A décrit la droite DD' pendant que le côté PF passe par le point fixe F; il est clair, en effet, que le centre instantané de rotation de la figure est le point α que j'ai déterminé précédemment.

Pour construire le centre de courbure correspondant au point m, je remarque que, la tangente conjuguée de AT étant la symétrique relativement à l'axe de la courbe, le cycle, qui touche l'anticaustique au point m et la conjuguée de AT, a son centre au point de rencontre de la normale $m\alpha$ avec la droite, menée parallèlement à DD', par le point a où la tangente AT rencontre l'axe.

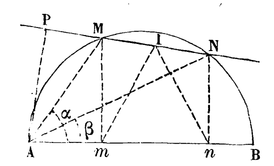
En désignant par β ce point de rencontre, il résulte d'un théorème, que j'ai donné dans mon Mémoire sur les hypercycles, que le centre de courbure cherché est le point ω symétrique de β par rapport à α.

III.

9. Une anticaustique principale étant donnée, il importe de construire la parabole sur laquelle se sont réfractés les rayons.

Pour la solution de cette question, je démontrerai d'abord quelques lemmes préliminaires. Un cercle étant décrit sur un segment AB comme diamètre (*fig.* 2), soient m et n les projections

Fig. 2.



sur ce diamètre de deux points M et N de la courbe, et P la projection sur la droite MN de l'extrémité A du diamètre. Cela posé,

Lemme I. — On a l'égalité

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Pn}^2} = \frac{Bm}{Bn}.$$

Lemme II. — En désignant par I le milieu de la corde MN, on a

$$Im = In = IP;$$

en d'autres termes,

$$\overline{AP}^2 = Am.An.$$

10. Pour les démontrer, je remarque que l'angle APM étant droit, l'angle $\widehat{PAN}$ est égal à l'angle $\widehat{MAB}$; faisons, pour un instant,

$$\widehat{MAB} = \alpha, \qquad \widehat{NAB} = \beta.$$

Les deux triangles PAN et NAn donnent

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Nn}^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\overline{Mm}^2.\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2.\overline{Nn}^2} = \frac{Am.Bm.An.AB}{Am.AB.An.Bn} = \frac{Bm}{Bn}.$$

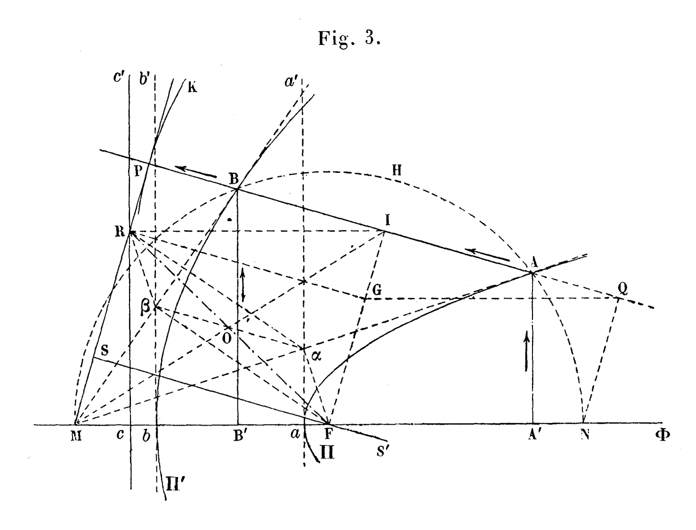
En second lieu, le triangle APN donne

$$\overline{AP}^2 = \overline{AN}^2.\cos^2\alpha = \frac{\overline{AN}^2.\overline{Am}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{An.AB.Am^2}{Am.AB} = Am.An.$$

C. Q. F. D.

11. Considérons maintenant deux paraboles Π et Π′ (*fig.* 3) ayant le point F pour foyer et pour sommets respectifs les deux points a et b de la droite FΦ.

Fig. 3.



Par un point quelconque M de cette droite, menons une tangente à chacune des paraboles et soient respectivement A et B leurs points de contact; on sait que le cercle, ayant pour centre le foyer F et passant par le point M, contient les points A et B; j'appellerai N le point où il rencontre de nouveau l'axe FΦ.

Du point M abaissons une perpendiculaire MP sur la droite AB, et, par le point I milieu du segment AB, menons une parallèle à l'axe qui rencontre MP au point R, il est clair que la figure MRIF est un parallélogramme.

Soient maintenant α et β les milieux respectifs des segments MA et MB; la droite αβ est évidemment parallèle à AB et partagée en parties égales par la droite MI en son point milieu O; d'où il suit que la figure RβFα est un parallélogramme.

Ainsi les segments Rβ et αF sont égaux et parallèles; c, b et a

étant les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points R, β et α, on a donc

$$Fc = Fa + Fb;$$

d'où il résulte que Fc est constant et que, quand le point M varie, le point R décrit la droite cc'.

J'abaisse maintenant du point F la perpendiculaire FS sur la droite MP, du point R la perpendiculaire RG sur la droite FI et du point N la perpendiculaire NQ sur la droite AB; il est clair que RS est égal à FG, et encore à NQ, car il est aisé de voir que la figure GQFN est un parallélogramme.

Or, en désignant par A′ et B′ les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points A et B, il suit du lemme II que l'on a

$$\overline{NQ}^2 = \overline{RS}^2 = NA'.NB' = \frac{Fa.Fb}{4}.$$

D'où il suit que la longueur RS est constante lorsque le point M se déplace; nous avons ainsi un triangle rectangle RSF dont un petit côté passe constamment par le point F, tandis que l'autre petit côté est constant et que le sommet R décrit la droite cc'.

Il en résulte donc, d'après ce que j'ai démontré plus haut, que RS enveloppe une anticaustique principale de parabole; le centre instantané de rotation étant d'ailleurs évidemment le point I, la tangente RS touche son enveloppe au point P.

12. Soit K l'hypercycle symétrique enveloppé par RS; si, du point A comme centre, on décrit un cercle ayant AP pour rayon, il est clair que son enveloppe est la courbe K; or, il résulte du lemme I que l'on a

$$\frac{AP}{AA'} = \sqrt{\frac{NB'}{NA'}} = \sqrt{\frac{Fb}{Fa}}.$$

D'où il suit que ce rapport est constant et que K est l'anticaustique principale de la parabole Π, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{Fb}{Fa}}.$$

On démontrerait de même que K est l'anticaustique principale de la parabole Π′, les rayons incidents étant perpendiculaires à

l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{Fa}{Fb}}.$$

13. Il est maintenant facile de résoudre le problème suivant :

Un hypercycle K est l'enveloppe du côté RS d'un triangle rectangle RSS', dont le côté SS' passe constamment par le point fixe F (*fig.* 3), dont le côté RS a une longueur constante et dont le sommet R décrit la droite cc'; trouver les paraboles pour lesquelles cette courbe est une anticaustique principale.

A cet effet, que du point F on abaisse une perpendiculaire à cc' rencontrant le côté RS en M, et que de ce même point comme centre on décrive un cercle H passant par M; que l'on détermine le point de rencontre I de la droite menée par F perpendiculairement à SS' et de la droite menée par R perpendiculairement à cc', puis que par I on mène une droite Δ parallèle à SS'. Cela posé, si l'on imagine les deux paraboles qui, ayant F pour foyer et ayant leur axe perpendiculaire à cc', passent respectivement par les points de rencontre de Δ et du cercle H, on obtiendra les deux paraboles pour lesquelles K est une anticaustique principale.

Il est à remarquer que ces deux paraboles ne sont pas toujours réelles; elles seront imaginaires si la droite Δ et le cercle H ne se rencontrent pas.

SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTIONS CONTINUES

D'UNE

FRACTION QUI SATISFAIT A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

DU PREMIER ORDRE

DONT LES COEFFICIENTS SONT RATIONNELS [1].

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1885.

I.

1. Je considère une série z, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et qui satisfait identiquement à l'équation différentielle linéaire

$$\mathrm{W}z' = 2\mathrm{V}z + \mathrm{U}, \tag{1}$$

où U, V et W désignent des polynomes entiers, et je me propose d'étudier son développement en fractions continues.

La série z peut, d'ailleurs, être divergente pour toute valeur de x; rien n'empêche de la réduire en fractions continues; il sera seulement nécessaire de déterminer pour quelles valeurs de x les réduites forment une suite convergente et quelle est la fonction dont elles donnent la valeur.

Dans tout ce qui suit, étant donné un polynome ou une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, j'appellerai *degré du polynome* ou *de la série* le degré de son premier terme,

[1] Ce Mémoire aurait dû figurer à la fin du Tome I.

et je représenterai simplement par la notation $\left(\frac{1}{x^n}\right)$, en faisant abstraction de ses coefficients, une série commençant par un terme du degré $-n$.

2. Cela posé, on sait que, f_n désignant un polynome entier de degré n, on peut toujours disposer des $(n+1)$ coefficients qu'il renferme, de telle sorte que, φ_n désignant la partie entière de zf_n, le développement de l'expression $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ commence par un terme du degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; une telle fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ se nomme une *réduite de z*. Pour certaines valeurs du nombre entier n, il peut même arriver que l'approximation soit plus grande et que le premier terme du développement de $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ soit d'un degré inférieur à celui de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; dans ce cas, il y a surapproximation.

En général, on aura donc, d'après la définition des réduites,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right),$$

où ρ désigne un nombre entier positif ou zéro; de là

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)$$

et, en portant ces valeurs de z et z' dans la relation (1),

$$U + 2V\frac{\varphi_n}{f_n} - W\frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + 2V\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) - W\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right) = 0$$

ou encore

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = f_n^2\left[V\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) + W\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)\right].$$

Soit μ le degré de la série $V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$; il est clair que le premier membre de cette égalité est un polynome entier; il en est de même du second, qui est du degré $(\mu - \rho)$; on pourra donc poser, en désignant par A_n une constante dont la valeur dépendra du nombre entier n et par Θ_n un polynome entier du degré $\mu - \rho$,

$$(2) \qquad Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = A_n \Theta_n.$$

Θ_n est un polynome entier du degré $\mu - \rho$, il est, par conséquent, d'un degré égal ou inférieur à μ. En général, il est du degré μ, et son degré ne s'abaisse que quand, pour certaines valeurs du nombre n, il y a surapproximation. Le maximum d'approximation aura lieu pour $\rho = \mu$, auquel cas Θ est une constante; une approximation plus grande ne peut avoir lieu : autrement, Θ étant nul, on voit que z serait égal à la fonction rationnelle $\frac{\varphi_n}{f_n}$, cas que j'écarte expressément.

3. Réciproquement, si l'on peut déterminer deux polynomes entiers φ_n et f_n, tels que le premier membre de l'égalité (2) se réduise à un polynome du degré μ ou d'un degré inférieur, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

Ayant posé, en effet,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + u,$$

d'où

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + u',$$

l'identité (2) devient

$$\frac{A_n \Theta_n}{f_n^2} = U + 2Vz - Wz' - 2Vu - Wu'$$

ou encore, par suite de l'équation (1),

$$\frac{A_n \Theta_n}{f_n^2} = -2Vu - Wu'.$$

Le premier membre de cette égalité est au plus du degré de

$$\frac{1}{x^{2n+1}}\left(V + \frac{W}{x}\right),$$

et le second, du degré

$$u\left(V + \frac{W}{x}\right);$$

d'où il résulte que u est au plus de degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$, et, par suite, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

4. Toute la question se réduit ainsi à la solution par des polynomes entiers de l'équation (2), le polynome Θ_n étant d'un degré au plus égal à μ; et, tout d'abord, j'en déduirai que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre.

A cet effet, je forme l'équation

$$My'' - Ny' + Py = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n \quad \text{et} \quad y_2 = e^{-2\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - z f_n).$$

En posant, pour abréger,

$$\omega = y'_1 y_2 - y'_2 y_1,$$

on a, d'après une formule connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log \omega;$$

or un calcul facile donne

$$\omega = e^{-2\int \frac{V}{W} dx} \frac{U f_n^2 + 2V \varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n)}{W},$$

et, en tenant compte de l'identité (2),

$$\omega = e^{-2\int \frac{V}{W} dx} \frac{A_n \Phi_n}{W};$$

d'où

$$\frac{N}{M} = \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} - \frac{W'}{W} - \frac{2V}{W};$$

et de là résulte immédiatement que l'équation cherchée est de la forme

$$(3) \qquad W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n] y' + K_n y = 0.$$

Cette équation doit, d'ailleurs, être satisfaite quand on y fait $y = f_n$; K_n est donc un polynome entier dont le degré est indépendant du nombre n.

5. Supposons maintenant que, K_n et Θ_n désignant des polynomes entiers dont le dernier soit d'un degré égal ou inférieur à μ, un polynome entier f_n satisfasse à l'équation (3), je dis que l'on

peut déterminer le polynome U qui figure dans l'équation différentielle (1), de telle sorte que la série z qui satisfait à cette équation ait une réduite dont le dénominateur soit f_n.

Soient, en effet, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les diverses racines de l'équation $f_n(x) = 0$; décomposons en éléments simples la fraction $\frac{A_n \Theta_n}{W f_n^2}$, et posons

$$\frac{A_n \Theta_n}{W f_n^2} = \frac{G_n}{W} + \sum \frac{p_\alpha}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q_\alpha}{x-\alpha}.$$

Pour avoir les coefficients p_α et q_α, il faut diviser

$$A_n[\Theta_n(\alpha) + \Theta'_n(\alpha) h]$$

par

$$f'_n(\alpha)\{W(\alpha) f'_n(\alpha) + [W(\alpha) f''_n(\alpha) + W'(\alpha) f'_n(\alpha)] h\};$$

or, $f_n(x)$ satisfaisant à l'équation (3), on a évidemment

$$\Theta_n(\alpha)[W(\alpha) f''_n(\alpha) + W(\alpha) f'_n(\alpha)] = f'_n(\alpha)[W(\alpha)\Theta'_n(\alpha) - 2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)];$$

le diviseur devient, par suite,

$$f'^2_n(\alpha)\left[W(\alpha) + \frac{W(\alpha)\Theta'_n(\alpha) - 2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)}{\Theta_n(\alpha)} h\right],$$

et le quotient

$$\frac{A_n \Theta_n(\alpha)}{f'^2_n(\alpha) W(\alpha)}\left[1 + \frac{2V(\alpha)}{W(\alpha)} h\right];$$

d'où l'on déduit la relation suivante

$$q_\alpha = 2 p_\alpha \frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}.$$

Je pose maintenant

$$\sum \frac{p_\alpha}{x-\alpha} = \frac{\varphi_n}{f_n},$$

$$\sum \frac{q_\alpha}{x-\alpha} = \frac{P_n}{f_n},$$

en sorte que l'on ait

$$(4) \qquad \frac{A_n \Theta_n}{W f_n^2} = \frac{G_n}{W} + \frac{P_n}{f_n} - \frac{d}{dx}\frac{\varphi_n}{f_n} \quad [1];$$

---

[1] Il résulte d'une remarque importante due à M. Hermite que la détermination des polynomes G_n, P_n et φ_n n'exige pas la résolution de l'équation $f_n = 0$.



et je considère l'expression

$$\frac{P_n}{f_n} - 2\frac{V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \sum\left(q_\alpha - \frac{2V}{W}p_\alpha\right)\frac{1}{x+\alpha}.$$

L'identité démontrée plus haut,

$$q_\alpha = 2\frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}p_\alpha,$$

montre que cette expression ne devient infinie pour aucun des zéros de f_n; on a donc, H_n désignant un polynome entier,

$$(5) \qquad \frac{P_n}{f_n} - \frac{2V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \frac{H_n}{W}.$$

Éliminons P_n entre les identités (4) et (5), il viendra, après avoir chassé le dénominateur,

$$A_n\Theta_n = (G_n + H_n)f_n^2 + 2V\varphi_n f_n = W(\varphi_n' f_n - f_n'\varphi_n);$$

et de là résulte la proposition que je voulais démontrer.

Θ_n étant, en effet, d'un degré au plus égal à μ, il est clair que $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z qui satisfait à l'équation différentielle

$$Wz' = 2Vz + G_n + H_n.$$

II.

6. Pour déterminer complètement l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur f_n d'une réduite, il est nécessaire de connaître les polynomes Θ_n et K_n qui y figurent.

Afin de trouver leur expression ou de montrer au moins comment on peut les calculer par voie de récurrence, je m'appuierai sur les considérations suivantes :

On sait qu'entre les termes de deux réduites consécutives on a la relation suivante

$$\varphi_{n+1}f_n - f_{n+1}\varphi_n = A_{n+1},$$

A_{n+1} étant une constante dont on peut choisir arbitrairement la valeur, puisque les deux termes de la réduite ne sont déterminés qu'à un facteur constant près; je supposerai que cette constante est précisément celle que j'ai introduite dans l'identité (2).

Cela posé, de la relation précédente et de la relation

$$\varphi_n f_{n-1} - f_n \varphi_{n-1} = A_n \tag{6}$$

qui s'en déduit, on tire

$$(A_n \varphi_{n+1} + A_{n+1} \varphi_{n-1}) f_n = (A_n f_{n+1} + A_{n+1} f_{n-1}) \varphi_n;$$

d'où, en posant

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = R_n,$$

les formules suivantes, où Q_n est un polynome du premier degré,

$$(7) \qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Portons maintenant, dans la relation (2), la valeur de A_n tirée de l'équation (6), cette relation pourra se mettre sous la forme suivante

$$(U f_n + V \varphi_n - W \varphi'_n + \Theta_n \varphi_{n-1}) f_n = (\Theta_n f_{n-1} - W f'_n - V f_n) \varphi_n;$$

d'où ces formules, où Ω_n désigne un polynome entier,

$$(8) \qquad \begin{cases} W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ W \varphi'_n = (\Omega_n + V) \varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + U f_n. \end{cases}$$

7. Ω_n est un polynome entier dont il est facile de déterminer le degré; on déduit, en effet, de la première des formules (8),

$$\Omega_n = V + W \frac{f'_n}{f_n} - \Theta_n \frac{f_{n-1}}{f_n};$$

il en résulte que le terme du degré le plus élevé de ce polynome est le premier terme du développement de l'expression $V + \frac{nW}{x}$; la fraction $\Theta_n \frac{f_{n-1}}{f_n}$ est, en effet, du degré de $V\left(\frac{1}{x^2}\right) + W\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

8. En dérivant la première des identités (7) et en multipliant par W le résultat obtenu, il vient

$$W f'_{n+1} - W Q_n f'_n - W Q'_n f_n + W R_n f'_{n-1} = 0$$

on a, d'ailleurs, les identités

$$\begin{aligned} Wf'_{n+1} &= (\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} + \Theta_{n+1}f_n, \\ Wf'_n &= (\Omega_n - V)f_n + \Omega_n f_{n-1}, \\ Wf'_{n-1} &= (\Omega_{n-1} - V)f_{n-1} + \Omega_{n-1}f_{n-2}; \end{aligned}$$

portant ces valeurs dans la relation précédente, on a

$$\begin{aligned} &(\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} + [\Theta_{n+1} - WQ'_n - Q_n(\Omega_n - V)]f_n \\ &\qquad + [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n\Theta_n]f_{n-1} + R_n\Omega_{n-1}f_{n-2} = 0, \end{aligned}$$

puis, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_n f_n - R_n f_{n-1}$,

$$\begin{aligned} &[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) - WQ'_n + \Theta_{n+1}]f_n \\ &\quad - [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n\Theta_n]f_{n-1} + R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

On a, d'ailleurs,

$$f_n - Q_{n-1}f_{n-1} + R_{n-1}f_{n-2} = 0;$$

d'où les deux formules suivantes :

(9) $$Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \frac{R_n}{R_{n-1}}\Theta_{n-1} = WQ'_n,$$

(10) $$R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) = \frac{R_n}{R_{n-1}}Q_{n-1}\Theta_{n-1} - Q_n\Theta_n.$$

9. On déduit de la première des identités (8)

$$Wf''_n = (\Omega_n - V - W')f'_n + (\Omega'_n - V')f_n + \Theta_n f'_{n-1} + \Theta'_n f_{n-1}$$

ou, en multipliant par W et remplaçant Wf'_n et Wf'_{n-1} par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} W^2 f''_n &= [(\Omega_n - V - W')(\Omega_n - V) + W(\Omega'_n - V')]f_n \\ &\quad + [\Theta_n(\Omega_n + \Omega_{n-1} - 2V - W') + W\Theta'_n]f_{n-1} + \Theta_n\Theta_{n-1}f_{n-2}: \end{aligned}$$

portons cette valeur et la valeur précédemment trouvée de Wf'_n dans la relation

$$W_2\Theta_n f''_n + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n]Wf'_n + K_nWf_n = 0;$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} &\{\Theta_n(\Omega_n^2 - V^2) + W[\Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V) + K_n]\}f_n \\ &\qquad + \Theta_n^2(\Omega_n + \Omega_{n-1})f_{n-1} + \Theta_n^2\Theta_{n-1}f_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Le polynome qui multiplie W dans le coefficient de f_n est évidem-

ment divisible par Θ_n; posant donc

$$\Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V) + K_n = - \Theta_n S_n,$$

d'où l'on déduit

$$K_n = \Theta'_n(\Omega_n - V) - \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta_n S_n, \tag{11}$$

l'identité précédente deviendra

$$(\Omega_n^2 - V^2 - WS_n)f_n + \Theta_n(\Omega_n + \Omega_{n-1})f_{n-1} + \Theta_n\Theta_{n-1}f_{n-2} = 0,$$

où S_n désigne un polynome entier.

Ayant, d'ailleurs, la relation

$$f_n - Q_{n-1}f_{n-1} + R_{n-1}f_{n-2} = 0,$$

on déduit de là les formules suivantes :

$$\Omega_n^2 - V^2 - \frac{\Theta_n\Theta_{n-1}}{R_{n-1}} = WS_n, \tag{12}$$

$$\Omega_n + \Omega_{n-1} = - \frac{\Theta_{n-1}Q_{n-1}}{R_{n-1}}. \tag{13}$$

10. De la relation (12) résulte l'égalité

$$W(S_{n+1} - S_n) = (\Omega_{n+1} - \Omega_n)(\Omega_{n+1} + \Omega_n) - \frac{\Theta_{n+1}\Theta_n}{R_n} + \frac{\Theta_n\Theta_{n-1}}{R_{n-1}}$$

ou, en remplaçant $\Omega_{n+1} + \Omega_n$ par sa valeur déduite de l'identité (13),

$$W(S_{n+1} - S_n) = \Theta_n\left[-\frac{\Theta_{n+1}}{R_n} + \frac{\Theta_{n-1}}{R_{n-1}} - \frac{Q_n}{R_n}(\Omega_{n+1} - \Omega_n)\right]$$

ou encore, en vertu de (9),

$$W(S_{n+1} - S_n) = - \frac{WQ'_n\Theta_n}{R_n};$$

d'où enfin

$$S_{n+1} - S_n = - \frac{Q'_n\Theta_n}{R_n}. \tag{14}$$

III.

11. Je résumerai ici les conséquences très simples de l'analyse un peu longue qui précède.

On a, entre les termes des diverses réduites, les relations suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ W \varphi'_n = (\Omega_n + V) \varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + V f_n, \end{cases}$$

où R_n désigne un nombre que l'on peut choisir arbitrairement, Θ_n un polynome entier du degré μ, Ω_n un polynome entier du degré $\mu + 1$ dont le terme du degré le plus élevé est le premier terme du développement de $V + \frac{nW}{x}$, et Q_n un polynome du premier degré.

Ces polynomes sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$(9)\qquad Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \frac{R_n}{R_{n-1}}\Theta_{n-1} = W Q'_n,$$

$$(13)\qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = -\frac{\Theta_n Q_n}{R_n};$$

on a, en outre, l'égalité suivante, où S_n est un polynome entier,

$$(12)\qquad \Omega_n - V^2 - \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}} = W S_n.$$

On peut ajouter que, si l'on pose, pour abréger,

$$K_n = \Theta'_n(\Omega_n - V) - \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta_n S_n,$$

f_n satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(3)\qquad W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n] y' + K_n y = 0.$$

12. Je me propose maintenant de montrer que les relations (9) et (13) suffisent pour déterminer par voie récurrente les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n, et, à cet effet, j'établirai le lemme suivant :

Lemme. — *Si des polynomes f_n, φ_n, Q_n, Θ_n, Ω_n et les nombres R_n sont liés entre eux par les relations* (7), (9) *et* (13) *et si l'on définit deux suites de polynomes A_n et B_n par les égalités suivantes :*

$$A_n = (\Omega_n - V) f_n - W f'_n + \Theta_n f_{n-1},$$
$$B_n = (\Omega_n + V) \varphi_n - W \varphi'_n + \Theta_n \varphi_{n-1},$$

on a, entre trois polynomes consécutifs de chacune des suites, les relations

$$A_{n+1} - Q_n A_n + R_n A_{n-1} = 0$$

et

$$B_{n+1} - Q_n B_n + R_n B_{n-1} = 0.$$

Démonstration. — Je ne m'occuperai que des polynomes A_n, la marche à suivre étant exactement la même pour les polynomes B_n.

On a, en vertu même de la définition donnée,

$$W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1} - A_n$$

et de même

$$W f'_{n+1} = (\Omega_{n+1} - V) f_{n+1} + \Theta_{n+1} f_n \quad - A_{n+1},$$
$$W f'_{n-1} = (\Omega_{n-1} - V) f_{n-1} + \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n-1}.$$

Portons ces valeurs dans l'égalité

$$W f'_{n+1} = Q_n W f'_n + W Q'_n f_n + R_n W f'_{n-1}$$

qui résulte immédiatement de la première des équations (7); il viendra

$$\begin{aligned}(\Omega_{n+1} - V) f_{n+1} &+ [\Theta_{n+1} - W Q'_n - Q_n(\Omega_n - V)] f_n \\ &+ [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n \Theta_n] f_{n-1} \\ &+ R_n \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0\end{aligned}$$

ou, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_n f_n - R_n f_{n-1}$,

$$\begin{aligned}&[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - W Q'_n] f_n \\ &\quad - [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n \Theta_n] f_{n-1} \\ &\quad + R_n \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0\end{aligned}$$

ou encore, en vertu des identités (9) et (13),

$$\begin{aligned}&\frac{R_n}{R_{n-1}} \Theta_{n-1} f_n - \frac{R_n}{R_{n-1}} \Theta_{n-1} Q_{n-1} f_{n-1} \\ &\quad + R_n \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Ce qui, par suite de l'identité,

$$f_n - Q_{n-1} f_{n-1} + R_{n-1} f_{n-2} = 0,$$

se réduit à

$$A_{n+1} - Q_n A_n + R_n A_{n-1} = 0.$$

Une démonstration analogue s'appliquerait aux polynomes B.

13. Supposons maintenant que l'on ait déterminé trois suites de polynomes Θ_n, Ω_n et Q_n par les relations (9) et (13), puis deux suites de polynomes φ_n et f_n par les relations (7); qu'enfin, pour deux valeurs consécutives de l'indice, on ait

$$A_i = A_{i-1} = 0 \quad \text{et} \quad B_i = B_{i-1} = 0.$$

Il résulte du lemme précédent que l'on a également

$$A_{i+1} = A_{i+2} = A_{i+3} = \ldots = 0$$

et

$$B_{i+1} = B_{i+2} = B_{i+3} = \ldots = 0,$$

et, par suite, les polynomes φ_n et f_n satisfont aux équations (8).

Or, en éliminant Ω_n, on en déduit

$$W(f'_n\varphi_n - \varphi'_n f_n) = -2V\varphi_n f_n + \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}) - Uf_n^2;$$

ce que l'on peut écrire

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) = \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}),$$

et, $(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1})$ étant une constante en vertu des relations (7), on voit que le second membre est un polynome du degré μ, et, par suite, la fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

14. Ainsi toute la question est ramenée à déterminer par les identités (9) et (13) les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n.

Si l'on met en évidence leurs coefficients inconnus, en égalant à zéro les multiplicateurs des puissances de x, on obtiendra un certain nombre d'équations qui permettront de déterminer les coefficients de Q_n, Ω_{n+1}, Θ_{n+1} au moyen des coefficients de Ω_n, Θ_n et Θ_{n-1}.

IV.

15. Comme application, je considérerai d'abord le cas le plus simple, à savoir : celui où les fonctions Θ_n sont des constantes et où $\mu = 0$. C'est ce qui a lieu si W est au plus du second degré et si V est au plus du premier degré.

Comme Θ_n est une constante et que R_n, jusqu'à présent, est resté arbitraire, je poserai

$$\Theta_n = R_n,$$

et les équations (12) et (13) deviendront alors

$$(15) \qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = - Q_n,$$

$$(16) \qquad \Omega_n^2 - V^2 - R_n = WS_n,$$

et, ayant déterminé les polynomes entiers qui satisfont à ces équations, on aura les relations

$$(7) \qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0; \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + R_n f_{n-1}, \\ W \varphi'_n = (\Omega_n + V) \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} + U f_n; \end{cases}$$

en outre, f_n satisfait à l'équation différentielle

$$W y'' + (2V + W') y' - (\Omega'_n - V' + S_n) y = 0,$$

où le coefficient de y est nécessairement une constante.

16. Considérons, par exemple, la fonction $z = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1) z' = 2x,$$

on a ici

$$W = x^2 - 1, \qquad V = 0 \qquad \text{et} \qquad U = 2x.$$

Le polynome Ω_n, dont le terme du degré le plus élevé est le premier terme du développement de $n \frac{x^2 - 1}{x}$, est de la forme

$$nx + \alpha_n,$$

l'identité

$$(nx + \alpha_n)^2 - R_n = (x^2 - 1) S_n$$

donne

$$\alpha_n = 0, \qquad R_n = n^2, \qquad S_n = n^2;$$

d'où, en vertu de l'équation (15),

$$Q_n = -(2n + 1) x;$$

puis les relations

$$\begin{aligned} f_{n+1} + (2n+1) x f_n + n^2 f_{n-1} &= 0, \\ \varphi_{n+1} + (2n+1) x \varphi_n + n^2 \varphi_{n-1} &= 0; \\ (x^2 - 1) f'_n &= n x f_n + n^2 f_{n-1}, \\ (x^2 - 1) \varphi'_n &= n x \varphi_n + n^2 \varphi_{n-1} + 2 x f_n; \end{aligned}$$

d'où l'on déduirait aisément les relations connues entre les polynomes X_n de Legendre.

L'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait f_n est, d'ailleurs,

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

17. Comme second exemple, je choisirai la fonction

$$z=e^x x^{-\alpha}\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$xz'=(x-\alpha)z-1;$$

son développement suivant les puissances décroissantes de x est, d'ailleurs, la série

$$\frac{1}{x}+\frac{\alpha-1}{x^2}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^3}+\ldots,$$

qui, si elle ne se termine pas, est toujours divergente, quelle que soit la valeur donnée à x.

On a ici

$$W=x,\qquad V=\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2},\qquad U=-1.$$

Le terme du degré le plus élevé de Ω_n étant le premier terme du développement de $V+\frac{nW}{x}$, on peut poser

$$\Omega_n=\frac{x}{2}+\beta_n.$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est

$$xy''+(x+1-\alpha)y'-S_n y=0;$$

d'où résulte évidemment $S_n=n$.

L'identité

$$S_n W=nx=\left(\frac{x}{2}+\beta_n\right)^2-\left(\frac{x}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)^2-R_n$$

donne alors

$$\beta_n=n-\frac{\alpha}{2}\qquad\text{et}\qquad R_n=n(n-\alpha);$$

d'où

$$Q_n = -x - \beta_n - \beta_{n+1} = -x + \alpha - 2n - 1,$$

et les formules suivantes :

$$f_{n+1} = -(x + 2n + 1 - \alpha) f_n - n(n - \alpha) f_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = -(x + 2n + 1 - \alpha) \varphi_n - n(n - \alpha) \varphi_{n-1};$$

ou plutôt si l'on change les signes des deux termes des réduites de rang impair (ce qui est permis, puisque cela ne change pas la valeur de la réduite),

$$(17) \qquad \begin{cases} f_{n+1} = (x + 2n + 1 - \alpha) f_n - n(n - \alpha) f_{n-1}, \\ \varphi_{n+1} = (x + 2n + 1 - \alpha) \varphi_n - n(n - \alpha) \varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Un calcul direct donne d'ailleurs les valeurs suivantes pour les termes des premières réduites,

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = x + 1 - \alpha, \qquad f_2 = x^2 + 2(2 - \alpha)x + (2 - \alpha)(1 - \alpha)$$

et

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_1 = 1, \qquad \varphi_2 = x + 3 - \alpha;$$

en sorte que les formules précédentes permettent de calculer facilement, par voie récurrente, les valeurs de f_n et de φ_n.

18. En partant de l'équation différentielle

$$(18) \qquad xy'' + (x + 1 - \alpha) y' - ny = 0,$$

à laquelle satisfait le polynome f_n, on trouve aisément

$$f_n = x^n + n(n - \alpha) x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} (n - \alpha)(n - \alpha - 1) x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (n - \alpha)(n - \alpha - 1) \ldots (1 - \alpha).$$

Une deuxième solution de l'équation (18) est donnée (nº 3) par la fonction

$$u_n = e^{-2\int \frac{V}{W} dx} (z f_n - \varphi_n) = f_n \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} dx - x^\alpha e^{-x} \varphi_n;$$

il est facile de trouver une autre expression de u_n.

En effet, en dérivant n fois l'équation (18), il vient

$$xy^{(n+2)} + (x + n + 1 - \alpha) y^{(n+1)} = 0;$$

d'où l'on voit que $y^{(n+1)}$ est égal, à une constante près, à $\frac{e^{-x}}{x^{n+1-\alpha}}$.

Par suite, on a, K désignant une constante et $F(x)$ un polynome entier,

$$y = F(x) + K\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

La fonction u_n est en particulier donnée par cette formule, et, comme elle s'évanouit quand on donne à x une valeur positive infiniment croissante, on a simplement

$$u_n = f_n\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx - x^\alpha e^{-x}\varphi_n = K\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

Si l'on suppose x et n constants (et je supposerai x positif, en sorte que les intégrales contenues dans l'égalité précédente sont toujours finies, quel que soit α), K est une fonction de α bien déterminée.

Pour en trouver la valeur, je supposerai que l'on fait tendre x vers zéro et que α a une valeur positive; de l'égalité précédente, on déduit alors

$$f_n(0)\,\Gamma(\alpha) = K\,\Gamma(\alpha),$$

d'où

$$K = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)$$

et, par suite,

$$f_n\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx - z^\alpha e^{-x}\varphi_n = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

19. On tire de là

$$\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = e^{-x}x^\alpha\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}};$$

l'intégrale contenue dans le second membre a une valeur finie, car elle a une valeur plus petite que l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-z}z^{\alpha-1}\,dx;$$

il serait même facile de démontrer qu'elle tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{f_n}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} = 1 + \frac{n}{1}\frac{x}{1-\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \ldots;$$

quel que soit le nombre α, les termes de ce développement finiront par être tous du même signe, et, comme leur degré par rapport à n va toujours en croissant, on voit que la valeur absolue de la série croîtra indéfiniment avec le nombre n.

Le coefficient

$$\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}$$

a ainsi pour limite zéro, et l'on a

$$\int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx = e^{-x}x^\alpha \lim \frac{\varphi_n}{f_n}.$$

Les réduites $\frac{\varphi_n}{f_n}$, quoique provenant de la réduction en fractions continues d'une série divergente, fournissent donc, avec une approximation indéfinie, la valeur de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$, pourvu que x ait une valeur positive.

20. Soit, par exemple, à calculer l'intégrale

$$\int_a^\infty e^{-t^2 dt};$$

en posant $t = \sqrt{z}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}},$$

dont la valeur approximative, en prenant seulement la réduite $\frac{\varphi_1}{f_1}$, est

$$\frac{ae^{-a^2}}{2a^2+1}.$$

Faisant $a = 3$, on trouve, comme valeur approchée,

$$\frac{3e^{-9}}{19} = 0{,}000\,019\,54,$$

dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts.

21. Les formules précédentes permettent de calculer aisément les valeurs de la fonction de Prym,

$$eQ(\alpha) = \int_6^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Que l'on désigne, en effet, par $F_0(\alpha)$, $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, ..., $\Phi_0(\alpha)$, $\Phi_1(\alpha)$, $\Phi_2(\alpha)$, ... deux suites de polynomes liés entre eux par les relations suivantes :

$$F_{n+1}(\alpha) = (2n+2-\alpha)\,F_n(\alpha) - n(n-\alpha)\,F_{n-1}(\alpha),$$
$$\Phi_{n+1}(\alpha) = (2n+2-\alpha)\,\Phi_n(\alpha) - n(n-\alpha)\,\Phi_{n-1}(\alpha);$$

avec les valeurs initiales

$$F_0(\alpha) = 1, \qquad F_1(\alpha) = 2 - \alpha,$$
$$\Phi_0(\alpha) = 0, \qquad \Phi_1(\alpha) = 1;$$

il résulte des formules précédentes que l'on a

$$eQ(\alpha) = \lim \frac{\Phi_n(\alpha)}{F_n(\alpha)}.$$

Soit, par exemple, $x = 1$.

On obtiendra successivement, pour les valeurs approximatives de $eQ(0)$, les valeurs suivantes :

$$\frac{4}{7}, \quad \frac{20}{34}, \quad \frac{124}{209}, \quad \frac{920}{1546}, \quad \frac{7940}{13327}, \quad \ldots,$$

qui vont en croissant et en restant inférieures à la valeur cherchée.

Il est facile d'obtenir d'autres suites de nombres allant constamment en diminuant et ayant cette valeur pour limite; on trouve en effet les expressions suivantes des réduites du nombre $eQ(-1)$:

$$0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{13}, \quad \frac{29}{73}, \quad \frac{201}{501}, \quad \frac{1631}{4051}.$$

De la formule connue

$$Q(0) = 1 - Q(-1)$$

on déduit que les fractions

$$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{13}, \quad \frac{44}{73}, \quad \frac{300}{501}, \quad \frac{2420}{4051}$$

ont pour limite $Q(0)$.

Ces fractions sont plus simples et convergent plus rapidement que les fractions déterminées plus haut; elles vont d'ailleurs toujours en décroissant.

En particulier, on a

$$\frac{2420}{4051} = 0,5973\ldots$$

et

$$\frac{7940}{13327} = 0,5958\ldots;$$

ces deux fractions comprenant la valeur de $e\mathrm{Q}(0)$, on a, avec une erreur de moins de $\frac{1}{1000}$,

$$e\mathrm{Q}(0) = 0,5965.$$

Le développement en série donne (§ *Compendium de Schlömilch,* t. II, p. 266) :

$$e\mathrm{Q}(0) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{2}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} - \frac{14}{2.3.4.5.6} + \frac{38}{2.3.4.5.6.7}.$$

La convergence est sensiblement moins rapide que celle des réduites.

V.

22. Pour les applications qui suivent, afin de simplifier les formules, je prendrai le nombre A_n, qui était resté arbitraire, égal à l'unité.

Les relations qui existent entre les termes des réduites et les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n deviennent alors

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}f_n^2 + 2\mathrm{V}\varphi_n f_n - \mathrm{W}(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = \Theta_n, \\ \varphi_{n+1} f_n - f_{n+1}\varphi_n = 1, \\ f_{n+1} - \mathrm{Q}_n f_n + f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - \mathrm{Q}_n \varphi_n + \varphi_{n-1} = 0, \\ \mathrm{W}f'_n = (\Omega_n - \mathrm{V})f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ \mathrm{W}\varphi'_n = (\Omega_n + \mathrm{V})\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + \mathrm{U}f_n; \end{array}\right.$$

et les identités qui déterminent les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n,

$$(19)\quad \mathrm{Q}_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \Theta_{n-1} = \mathrm{W}\mathrm{Q}'_n,$$

$$(20)\quad \Omega_{n+1} + \Omega_n = -\mathrm{Q}_n\Theta_n;$$

on peut y joindre la relation

$$(21) \qquad \Omega_n^2 - V^2 - \Theta_n \Theta_{n-1} = W S_n,$$

où S_n désigne un polynome entier.

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est d'ailleurs

$$W\Theta_n y'' + [(2V + W) - W\Theta'_n] y' - [\Theta_n S_n + \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V)] y = 0.$$

23. Pour fixer les idées, je supposerai que le développement de z commence par un terme qui soit au moins du degré de $\frac{1}{x}$.

Pour le dénominateur de la réduite de rang zéro, je prendrai l'unité, en sorte que l'on aura $f_0 = 1$ et que φ_0 sera l'ensemble des termes entiers de z (lequel pourra se réduire à zéro).

Je considérerai les deux quantités

$$\frac{-1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{z}{-1}$$

comme constituant deux réduites précédentes, en posant

$$f_{-1} = 0, \qquad \varphi_{-1} = -1$$

et

$$f_{-2} = -1, \qquad \varphi_{-2} = z.$$

Il est facile de voir, en effet, qu'en posant

$$\Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0, \qquad \Theta_{-1} = 0, \qquad \Omega_0 = V, \qquad \Omega_{-1} = -V,$$

toutes les relations du tableau (A) qui existent entre les réduites consécutives sont satisfaites.

On aura donc

$$\Theta_{-1} = 0, \qquad \Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0$$

et

$$\Omega_0 = V.$$

24. Soit, comme exemple, la fonction

$$z = \sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1} \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle du premier ordre

$$(x^4 + 2\lambda x^2 + 1) z' = 2(x^3 + \lambda x) z - (x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on a ici

$$W = x^4 + 2\lambda x^2 + 1, \qquad V = x^3 + \lambda x, \qquad U = -(x^4 + 2\lambda x^2 + 1).$$

Je remarquerai tout d'abord que, z étant une fonction impaire de x, les polynomes φ_n et f_n sont des fonctions paires ou impaires de la variable, et que le produit $\varphi_n f_n$ est une fonction impaire.

Il en résulte que Θ_n est une fonction paire, et l'on peut poser

$$\Theta_n = a_n x^2 + b_n;$$

Ω_n est une fonction impaire dont le terme de degré le plus élevé est le premier terme du développement de

$$V + \frac{nW}{x} = x^3 + \lambda x + \frac{n}{x}(x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on peut donc poser

$$\Omega_n = (n+1)x^3 + \alpha_n x;$$

enfin Q_n, qui est une fonction impaire, sera de la forme $A_n x$.

Portons ces valeurs dans les identités (19) et (20); en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on obtiendra les formules suivantes :

$$A_n = -\frac{2n+3}{a_n},$$

$$(22) \quad \begin{cases} a_{n+1} = -\alpha_n + (2n+3)\dfrac{b_n}{a_n}, \\ b_{n+1} = b_{n-1} - \dfrac{2n+3}{a_n}, \\ a_{n+1} = a_{n-1} - \dfrac{2n+3}{a_n}(2\lambda + \alpha_n - \alpha_{n+1}, \end{cases}$$

dont les trois dernières permettent de calculer de proche en proche, et par voie récurrente, les nombres α_i, a_i et b_i.

La première donne les relations suivantes entre les réduites consécutives :

$$f_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n} x f_n + f_{n-1} = 0,$$

$$\varphi_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n} x \varphi_n + \varphi_{n-1} = 0.$$

En exprimant que

$$[(n+1)x^3 + \alpha_n x]^2 - (x^3 + \lambda x)^2 - (a_n x^2 + b_n)(a_{n-1} x^2 + b_{n-1})$$

est exactement divisible par $x^4 + 2\lambda x^2 + 1$, on obtient encore les relations

$$(23) \quad \begin{cases} a_n a_{n-1} - b_n b_{n-1} = 2(n+1)\alpha_n = 2\lambda(n+1)^2, \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} + 2\lambda b_n b_{n-1} = \alpha_n^2 - \lambda^2 - n(n+2); \end{cases}$$

et l'on trouve la valeur suivante du quotient :

$$S_n = n(n+2)x^2 + 2(n+1)\alpha_n - a_n a_{n-1} - 2\lambda(n+1)^2.$$

25. La partie entière du développement de z étant simplement x, on a pour valeurs des premières réduites

$$f_0 = 1, \quad \varphi_0 = x, \quad f_{-1} = 0, \quad \varphi_{-1} = -1,$$

puis

$$\Theta_{-1} = 0, \quad \Theta_0 = -2\lambda x^2 - 2, \quad \Omega_0 = x^2 + \lambda x,$$

d'où les valeurs initiales suivantes

$$\alpha_0 = \lambda, \quad a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = -2\lambda, \quad b_0 = -2,$$

d'où, au moyen des formules (22), on déduit successivement les valeurs des coefficients α_i, a_i et b_i, à savoir

$$\alpha_1 = -\lambda + \frac{3}{\lambda}, \quad \dots,$$

$$a_1 = 6 - \frac{9}{2\lambda^2}, \quad \dots,$$

$$b_1 = \frac{3}{2\lambda}, \quad \dots.$$

Les relations (23) fournissent des moyens faciles de vérification.

26. Soit encore à déterminer les réduites de la fonction z dont le développement, suivant les puissances décroissantes de x, satisfait à l'équation différentielle

$$x^3 z' = 2(x^2 + px + q)z + rx + s.$$

On a ici

$$W = x^3, \quad V = x^2 + px + q, \quad U = rx + s;$$

on peut poser

$$\Omega_n = (n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n,$$
$$\Theta_n = a_n x + b_n,$$
$$Q_n = A_n x + B_n.$$



Cela posé, des identités (19) et (20) on déduit

$$(A_n x + B_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + \beta_{n+1} - \beta_n] \\ + (a_{n+1} - a_n)x + b_{n+1} - b_n = A_n x^3$$

et

$$(2n+3)x^2 + (\alpha_{n+1} + \alpha_n)x + \beta_{n+1} + \beta_n = -(a_n x + b_n)(A_n x + B_n);$$

d'où les relations suivantes

$$(24)\quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\alpha_n + \dfrac{2n+3}{2n+4}\dfrac{b_n}{a_n}, \\ \beta_{n+1} = -\beta_n - (2n+3)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\dfrac{b_n}{a_n}, \\ a_{n+1} = a_{n-1} + \dfrac{2n+3}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n) - \dfrac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha)^2, \\ b_{n+1} = b_{n-1} - \dfrac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n), \end{cases}$$

qui permettront de calculer, par voie de récurrence, les nombres α_i, β_i et a_i, b_i.

On aura, d'ailleurs,

$$Q_n = \frac{2n+3}{a_n}(-x + \alpha_{n+1} - \alpha_n),$$

d'où l'on déduira successivement les valeurs des réduites par les formules

$$f_{n+1} = Q_n f_n - f_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = Q_n \varphi_n - \varphi_{n-1}.$$

27. Le polynome

$$[(n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - (x^2 + px + q)^2 - (a_n x + b_n)(a_{n-1}x + b_{n-1})$$

devant être divisible par x^3, on a encore ces identités

$$(25)\quad \begin{cases} a_n a_{n-1} = \alpha_n^2 + 2(n+1)\beta_n - p^2 - 2q, \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} = 2\alpha_n \beta_n - 2pq, \\ b_n b_{n-1} = \beta_n^2 - q^2, \end{cases}$$

qui peuvent être considérées comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (24) et qui peuvent servir, soit comme vérification des calculs, soit pour déterminer les coefficients a_i et b_i.

On a d'ailleurs, puisque le développement de z ne renferme pas

de partie entière,

$$f_0 = 1, \qquad \varphi_0 = 0;$$

par suite,

$$\Omega_0 = V = x^2 + px + q$$

et

$$\Theta_0 = U = rx + s.$$

On a donc les valeurs initiales suivantes :

$$a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = r, \quad b_0 = s, \quad \alpha_0 = p, \quad \beta_0 = q;$$

d'où l'on déduit, par voie de récurrence, la suite des nombres qui déterminent les polynomes Q_n.

28. Ayant

$$\begin{aligned}[(n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - (x^2 + px + q)^2 - (a_n x + b_n)(a_{n-1} x + b_n) \\ = x^3[n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p],\end{aligned}$$

on en déduit

$$S_n = n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p.$$

Dans le cas où il y a surapproximation, Θ_n doit se réduire à une constante; on a donc

$$a_n = 0,$$

et l'équation différentielle à laquelle satisfait f_n devient

$$x^3 y'' + (5x^2 + 2px + 2q)y' - [n(n+4)x + (2n+3)\alpha_n - 3p] = 0.$$

Réciproquement, si l'on détermine la quantité α_n, de telle sorte que l'équation précédente ait pour solution un polynome entier f_n, on peut déterminer les quantités r et s, de telle sorte que le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de z soit f_n.

29 Comme dernière application, je considérerai la fonction

$$z = (x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 + 3gx + h)z' = 2\mu(x^2 + g)z - (x^3 + 3gx + h).$$

On a, dans ce cas,

$$W = x^3 + 3gx + h, \qquad V = \mu(x^2 + g) \qquad \text{et} \qquad U = -(x^3 + 3gx + h),$$

et l'on peut poser

$$\begin{aligned} \Omega_n &= (n + \mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n, \\ \Theta_n &= a_n x + b_n, \\ Q_n &= A_n x + B_n. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les relations (19) et (20), on obtient les égalités suivantes, qui doivent être identiquement satisfaites,

$$\begin{aligned} &(A_n x + B_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + (\beta_{n+1} - \beta_n)] \\ &\qquad + (a_{n+1} - a_{n-1})x + b_{n+1} - b_n = A_n(x^3 + 3gx + h), \\ &(2n + 2\mu + 1)x^2 \\ &\qquad + (\alpha_{n+1} + \alpha_n)x + \beta_{n+1} + \beta_n = -(A_n x + B_n)(a_n x + b_n), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$Q_n = -\frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(x + \alpha_n - \alpha_{n+1}),$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{n + \mu}{n + \mu + 1}\alpha_n + \frac{2n + 2\mu + 1}{2n + 2\mu + 2}\frac{b_n}{a_n}, \\ \beta_{n+1} &= -\beta_n - (2n + 2\mu + 1)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\frac{b_n}{a_n}, \\ a_{n+1} &= a_{n-1} + \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n - 3g) - \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2, \\ b_{n+1} &= b_{n-1} - \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}h. \end{aligned} \right.$$

Ces relations permettent de calculer successivement les nombres a_i, b_i, α_i, β_i et par suite les quotients incomplets Q_i.

On a d'ailleurs

$$\Theta_{-1} = 0, \qquad \Omega_0 = \mu(x^2 + g),$$

et, comme la partie entière du développement de r est $\dfrac{x}{2\mu - 1}$,

$$\begin{aligned} f_{-1} &= 0, \qquad \varphi_{-1} = -1, \\ f_0 &= 1, \qquad \varphi_0 = \frac{x}{2\mu - 1}; \end{aligned}$$

d'où

$$\Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0 = \frac{2\mu}{1 - 2\mu}(2gx + h),$$

et par suite les valeurs initiales suivantes :

$$a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = \frac{4\mu g}{1-2\mu}, \quad b_0 = \frac{2\mu h}{1-2\mu}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \mu g;$$

d'où l'on déduira successivement, au moyen des formules (26), les valeurs de

$$a_1, \ a_2, \ \ldots; \quad b_1, \ b_2, \ \ldots; \quad \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots; \quad \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots.$$

30. On obtient un autre système de formules qui permet également de calculer a_n et b_n et que l'on peut considérer comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (26).

Il s'obtient en exprimant que le polynome

$$\Omega_n^2 - V^2 - \Theta_n \Theta_{n-1} = [(n+\mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - \mu^2(x^2+g)^2 - (a_n x + a_{n-1})(b_n x + b_{n-1}$$

est exactement divisible par

$$W = x^3 + 3gx + h.$$

De là résultent les relations suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} a_n a_{n-1} = \alpha_n^2 + 2(n+\mu)\beta_n - 2g\mu^2 - 3gn(n+2\mu), \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} = 2\alpha_n\beta_n - 6g(n+\mu)\alpha_n - hn(n+2\mu), \\ b_n b_{n-1} = \beta_n^2 - 2h(n+\mu)\alpha_n - \mu^2 g^2. \end{cases}$$

Il est important de remarquer que l'on a ainsi trois relations pour déterminer a_n et b_n ; d'où cette conséquence que, si l'on pose

$$\frac{b_n}{a_n} = \lambda,$$

λ est une racine d'une équation du second degré de la forme

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda + R = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de g, h, α_n, β_n, ces deux dernières quantités étant elles-mêmes des fonctions rationnelles de g et de h.

L'autre racine de l'équation est évidemment la valeur de $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$.

Il résulte de là, en particulier, que l'expression

$$Q^2 - PR$$

est le carré d'une fonction rationnelle de g et de h.

Mais c'est un point que je me réserve de traiter plus tard en essayant, du moins dans des cas particuliers, d'intégrer les systèmes d'équations aux différences finies (27) et (28).

VI.

31. Les formules précédentes permettent, pour une valeur donnée de x, de calculer de la façon la plus simple les valeurs des réduites d'une fonction z qui satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients sont rationnels.

Au point de vue du calcul numérique, la solution peut être regardée comme complète; mais, si l'on veut déterminer effectivement par des expressions analytiques les valeurs des coefficients des quotients incomplets, on est conduit à intégrer un système d'équations aux différences ordinaires dans lequel le nombre des quantités inconnues est d'autant plus grand que le degré du polynome Θ_n est plus élevé.

L'intégration de ces équations semble, en général, présenter d'assez grandes difficultés; nous savons, en effet, que, dans un cas particulier relativement simple étudié par Jacobi et par Borchardt (à savoir celui où z est l'inverse de la racine carrée d'un polynome entier), l'intégration dépend de la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes.

FIN DU TOME II.



TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE.


Hosted by Google

FIN DE LA TABLE DU TOME II.



26680 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55

